Stochastische processen

3de bachelor wiskunde
Vrije Universiteit Brussel

U. Einmahl

Academiejaar 2016/2017

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

Markovketens

1.1 Definities en voorbeelden

Een **stochastisch proces** is een collectie toevalsvariabelen $\{X_t : t \in T\}$ die op een kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ gedefinieerd zijn en waar T een niet-lege indexverzameling is. Vaak kiezen we voor T de verzamelingen $[0, \infty[$ of $\{0, 1, 2, \ldots\}$ en kunnen in dit geval t als continue of discrete tijdparameter interpreteren. De **toestandsruimte** van een stochastisch proces zijn alle mogelijke waarden die de toevalsvariabelen $X_t, t \in T$ kunnen aannemen. We duiden deze verzameling meestal door $\mathcal{S}$ aan.

Definitie 1.1 *Een* **Markovketen** *is een rij toevalsvariabelen* $\{X_n : n \geq 0\}$ *met waarden in een hoogstens aftelbare verzameling* $\mathcal{S}$ *zodanig dat voor* $n \geq 1$ *en* $(x_0, \ldots, x_{n+1}) \in \mathcal{S}^{n+2}$ *met* $\mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) > 0$ *geldt:*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_{n+1} | X_0 = x_n)$$

Dus het is een stochastisch proces met discrete tijdparameter in $\{0, 1, \ldots\}$ en een discrete (dwz hoogstens aftelbare) toestandsruimte.
De definitie betekent dat de "toekomstige" realisatie X_{n+1} alleen afhankelijk is van de toestand x_n "heden" en niet van het "verleden" $x_0, \ldots, x_{n-1}$. Dit noemt men ook de Markov-eigenschap.
Verder is voor elke keuze x, y de conditionele kans $\mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x)$ stationair, dwz onafhankelijk van de tijdparameter n. We noemen deze kans de **overgangskans** van x naar y en duiden ze door $p(x, y)$ aan.
Het is zeer handig deze overgangskansen als een matrix $p = p(x, y)_{x, y \in \mathcal{S}}$ op te schrijven en we noemen deze matrix de **overgangsmatrix**. Als $\mathcal{S}$ eindig is met n elementen, verkrijgen we een (n, n)-matrix en we kunnen producten van dergelijke matrices berekenen. Ook in het oneindige geval is dit mogelijk. We vervangen gewoon de som in de definitie van het matrixproduct door een reeks. (Dit kan omdat de overgangskansen niet-negatief zijn.)
Uit de definitie volgt onmiddellijk dat overgangsmatrices **stochastische matrices** zijn, waar we een matrix $p = p(x, y)_{x, y \in \mathcal{S}}$ stochastisch noemen indien we hebben $0 \leq p(x, y) \leq 1, x, y \in \mathcal{S}$ en de rijsommen gelijk aan 1 zijn, dwz

$$\sum_{y \in \mathcal{S}} p(x, y) = 1, \forall x \in \mathcal{S}.$$

We noemen de verdeling van X_0 de **startverdeling** van de Markovketen $\{X_n : n \geq 0\}$. Deze is natuurlijk bepaald (het is een discrete toevalsvariabele) door de kansfunctie

$$\pi(x) := \mathbb{P}\{X_0 = x\}, x \in \mathcal{S}.$$

Om kansen voor de Markovketen te berekenen, hebben we alleen de startverdeling en de overgangsmatrix nodig.

Stelling 1.1 *Zij $\{X_n : n \geq 0\}$ een Markovketen met startverdeling $\pi(x) = \mathbb{P}\{X_0 = x\}, x \in \mathcal{S}$ en overgangsmatrix p. Dan geldt voor $n \geq 1$ en $x_0, \ldots, x_n \in \mathcal{S}$:*

$$\mathbb{P}\{X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n\} = \pi(x_0) \prod_{j=1}^{n} p(x_{j-1}, x_j).$$

Bewijs Dit volgt direct via de kettingregel. □

Een direct gevolg daarvan is de volgende formule die geldig is voor $(x_0, \ldots, x_n) \in \mathcal{S}^{n+1}$ met $\mathbb{P}\{X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n\} > 0$ en voor elke keuze $(y_1, \ldots, y_m) \in \mathcal{S}^m$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_{n+1} = y_1, \ldots, X_{n+m} = y_m | X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0) \\ = \ & \mathbb{P}(X_{n+1} = y_1, \ldots, X_{n+m} = y_m | X_n = x_n) \\ = \ & p(x_n, y_1) \prod_{j=2}^{m} p(y_{j-1}, y_j). \end{aligned}$$

Als $B_1, \ldots, B_m$ deelverzamelingen van $\mathcal{S}$ zijn volgt verder dat

$$\mathbb{P}(X_{n+1} \in B_1, \ldots, X_{n+m} \in B_m | X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0) = \sum_{y_1 \in B_1} \cdots \sum_{y_m \in B_m} p(x_n, y_1) \prod_{j=2}^{m} p(y_{j-1}, y_j).$$

Dit kunnen we nog verder veralgemenen met behulp van het volgende lemma.

Lemma 1.1 *Beschouw een klasse van gebeurtenissen $C_i, i \in I$ (I hoogstens aftelbaar) die disjunct zijn en waarvoor geldt $\mathbb{P}(C_i) > 0$. Veronderstel dat voor een bepaalde gebeurtenis $D \in \mathcal{F}$ geldt:*

$$\mathbb{P}(D | C_i) = p, \forall i \in I.$$

Dan geldt er ook

$$\mathbb{P}(D | \dot{\bigcup_{i \in I}} C_i) = p.$$

Bewijs Dit volgt direct uit de definitie van conditionele kansen. We hebben:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D | \dot{\bigcup_{i \in I}} C_i) &= \frac{\mathbb{P}(D \cap \dot{\bigcup}_{i \in I} C_i)}{\mathbb{P}(\dot{\bigcup}_{i \in I} C_i)} = \frac{\mathbb{P}(\dot{\bigcup}_{i \in I} (C_i \cap D))}{\sum_{i \in I} \mathbb{P}(C_i)} \\ &= \frac{\sum_{i \in I} \mathbb{P}(D \cap C_i)}{\sum_{i \in I} \mathbb{P}(C_i)} = \frac{\sum_{i \in I} \mathbb{P}(D | C_i) \mathbb{P}(C_i)}{\sum_{i \in I} \mathbb{P}(C_i)} \\ &= \frac{p \sum_{i \in I} \mathbb{P}(C_i)}{\sum_{i \in I} \mathbb{P}(C_i)} = p. \end{aligned}$$

Daarmee is het lemma bewezen. □

Stelling 1.2 *Zij* $\{X_n : n \geq 0\}$ *een Markovketen met overgangsmatrix* p.
Dan geldt er voor $x \in \mathcal{S}$, $A_0, \ldots, A_{n-1} \subset \mathcal{S}$ *zodanig dat* $\mathbb{P}\{X_0 \in A_0, \ldots, X_{n-1} \in A_{n-1}, X_n = x\} > 0$ *en* $B_1, \ldots, B_m \subset \mathcal{S}, m, n \geq 1$

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_{n+1} \in B_1, \ldots, X_{n+m} \in B_m | X_n = x, X_{n-1} \in A_{n-1} \ldots, X_0 \in A_0) \\ = & \sum_{y_1 \in B_1} \cdots \sum_{y_m \in B_m} p(x, y_1) \prod_{j=2}^{m} p(y_{j-1}, y_j) \\ = & \mathbb{P}(X_1 \in B_1, \ldots, X_m \in B_m | X_0 = x). \end{aligned}$$

Bewijs Stel $I = A_0 \times \ldots \times A_{n-1}$ en

$$C_i = \{X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x\}, i = (x_0, \ldots, x_{n-1}) \in I.$$

Het is evident dat deze gebeurtenissen disjunct zijn en we hebben voor elke $i \in I$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} \in B_1, \ldots, X_{n+m} \in B_m | C_i) = \sum_{y_1 \in B_1} \cdots \sum_{y_m \in B_m} p(x, y_1) \prod_{j=2}^{m} p(y_{j-1}, y_j).$$

Gezien $\biguplus_{i \in I} C_i = \{X_n = x, X_{n-1} \in A_{n-1} \ldots, X_0 \in A_0\}$ volgt de eerste gelijkheid via lemma 1.1. De tweede gelijkheid is een direct gevolg van 1.1. □

Als $m = 2$, verkrijgen we met de keuze $B_1 = \mathcal{S}$ en $B_2 = \{y\}$

$$\mathbb{P}(X_{n+2} = y | X_n = x, X_{n-1} \in A_{n-1}, \ldots, X_0 \in A_0) = \sum_{z \in \mathcal{S}} p(x, z) p(z, y),$$

hetgeen gelijk is aan $q(x, y)$, waar $q = p^2$ het kwadraat van de overgangsmatrix p is.
Analoog vinden we dat als $m \geq 3$, geldt

$$\mathbb{P}(X_{n+m} = y | X_n = x, X_{n-1} \in A_{n-1}, \ldots, X_0 \in A_0) = \sum_{z_1 \in \mathcal{S}} \cdots \sum_{z_{m-1} \in \mathcal{S}} p(x, z_1) \prod_{j=1}^{m-2} p(z_j, z_{j+1}) p(z_{m-1}, y),$$

hetgeen gelijk is aan het element in rij x en kolom y van de m-de macht van p die we in het vervolg altijd door $p^{(m)}(x, y)_{x, y \in \mathcal{S}}$ gaan aanduiden.

Gevolg 1.1 *Zij* $\{X_n : n \geq 0\}$ *een Markovketen met overgangsmatrix* p. *Als* $x \in \mathcal{S}$ *en* $A_0, \ldots, A_{n-1} \subset \mathcal{S}$ *verzamelingen zijn zodanig dat* $\mathbb{P}\{X_0 \in A_0, \ldots, X_{n-1} \in A_{n-1}, X_n = x\} > 0$, *geldt er voor* $m \geq 1$

$$\mathbb{P}\{X_{n+m} = y | X_0 \in A_0, \ldots, X_{n-1} \in A_{n-1}, X_n = x) = p^{(m)}(x, y), y \in \mathcal{S},$$

waar $p^m = p^{(m)}(x, y)_{x, y \in \mathcal{S}}$ *de* m*-de macht van de overgangsmatrix* p *is.*
Verder hebben we voor $m \geq 1$, $\mathbb{P}\{X_m = y\} = \sum_{x \in \mathcal{S}} \pi(x) p^{(m)}(x, y)$.

Bewijs Het eerste gedeelte van het gevolg is al bewezen.
We gebruiken stelling 1.1 om het tweede gedeelte voor $m \geq 2$ te bewijzen.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X_m = x_m\} &= \sum_{x_0 \in \mathcal{S}} \cdots \sum_{x_{m-1} \in \mathcal{S}} \mathbb{P}\{X_0 = x_0, \ldots, X_{m-1} = x_{m-1}, X_m = x_m\} \\ &= \sum_{x_0 \in \mathcal{S}} \pi(x_0) \sum_{x_1 \in \mathcal{S}} \cdots \sum_{x_{m-1} \in \mathcal{S}} \prod_{j=1}^{m} p(x_{j-1}, x_j) \\ &= \sum_{x_0 \in \mathcal{S}} \pi(x_0) p^{(m)}(x_0, x_m). \end{aligned}$$

Als $m = 1$ volgt dit direct via de wet van de totale kans. □

Stellen we $p^0 = I$ (dus $p^{(0)}(x,y) = 1$ als $x = y$ en $= 0$ als $x \neq y$), zijn de bovenstaande betrekkingen ook correct als $m = 0$.

Het volgende resultaat toont dat we voor elke gegeven stochastische matrix p en elke gegeven verdeling π op $\mathcal{S}$ een Markovketen met overgangsmatrix p en startverdeling π bestaat.

Stelling 1.3 *Zij $\mathcal{S}$ hoogstens aftelbaar met minstens twee elementen. Gegeven een stochastische matrix $p(x,y)_{x,y\in\mathcal{S}}$ en een kansfunctie $\pi(x), x \in \mathcal{S}$, bestaat er op een geschikte kansruimte $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ een Markovketen $\{X_n : n \geq 0\}$ zodanig dat $\mathbb{P}\{X_0 = x\} = \pi(x), x \in \mathcal{S}$ en $\mathbb{P}(X_1 = y|X_0 = x) = p(x,y), x,y \in \mathcal{S}$.*

Bewijs Kies een kansruimte $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ waar we een uniform(0,1)-verdeelde toevalsvariabele $U : \Omega \to [0,1]$ kunnen definiëren. (Een mogelijke keuze is $\Omega =]0,1], \mathcal{F} =$ Borel delen van $]0,1]$ en $\mathbb{P} = \lambda|_{\mathcal{F}}, U(\omega) = \omega, \omega \in \Omega$.)
Noteer $\mathcal{S}$ als $\{x_i : i \in I\}$, waar $I = \{0,\dots,m\}$ in het eindige geval of $I = \{0,1,2,\dots\}$ in het oneindige geval en waar in beide gevallen $x_i \neq x_j, i \neq j$.
Stel $\alpha_i = \pi(x_i)$ en $\beta_i = \sum_{j=0}^{i} \alpha_i, i \in I$. Dan hebben we $\beta_m = 1$ in het eindige geval en $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = 1$ in het oneindige geval,
We gaan recursief partities $\{B^{(n)}_{i_0,\dots,i_n} =]\beta^{(n)}_{i_0,\dots,i_n}, \gamma^{(n)}_{i_0,\dots,i_n}] : (i_0,\dots,i_n) \in I^{n+1}\}$ van $]0,1]$ definiëren die uit halfopen intervallen bestaan:
Stel

$$\beta^{(0)}_0 = 0 \text{ en } \beta^{(0)}_i = \gamma^{(0)}_{i-1} = \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_j, i \geq 1.$$

Het is dan evident dat

$$\mathbb{P}\{U \in B^{(0)}_i\} = \mathbb{P}\{\beta^{(0)}_i < U \leq \gamma^{(0)}_i\} = \alpha_i, i \in I.$$

Als we de intervallen $B^{(n)}_{i_0,\dots,i_n} =]\beta^{(n)}_{i_0,\dots,i_n}, \gamma^{(n)}_{i_0,\dots,i_n}], (i_0,\dots,i_n) \in I^{n+1}$ gedefinieerd hebben, stellen we

$$\beta^{(n+1)}_{i_0,\dots,i_n,0} = \beta^{(n)}_{i_0,\dots,i_n} \text{ en } \beta^{(n+1)}_{i_0,\dots,i_n,i} = \gamma^{(n+1)}_{i_0,\dots,i_n,i-1} = \beta^{(n)}_{i_0,\dots,i_n} + \sum_{j=0}^{i-1} p(x_{i_n},x_j)(\gamma^{(n)}_{i_0,\dots,i_n} - \beta^{(n)}_{i_0,\dots,i_n}), i \geq 1.$$

Aangezien p en een stochastische matrix is (dus, $\sum_{j\in I} p(x_{i_n},x_j) = 1$), volgt er dat

$$B^{(n)}_{i_0,\dots,i_n} = \dot{\bigcup_{j\in I}} B^{(n+1)}_{i_0,\dots,i_n,j}, \ \forall (i_0,\dots,i_n) \in I^{n+1}.$$

Verder is het evident dat $\mathbb{P}\{U \in B^{(n+1)}_{i_0,\dots,i_n,j}\} = p(x_{i_n},x_j)\mathbb{P}\{U \in B^{(n)}_{i_0,\dots,i_n}\}$ en via inductie zien we dat

$$\mathbb{P}\{U \in B^{(n)}_{i_0,\dots,i_n}\} = \alpha_{i_0} \prod_{j=1}^{n} p(x_{i_{j-1}},x_{i_j}), (i_0,\dots,i_n) \in I^{n+1}, n \geq 1.$$

Stel

$$X_0 = \sum_{i\in I} x_i I_{\{U\in B^{(0)}_i\}}$$

en

$$X_n = \sum_{i\in I} x_i I_{\{U\in C^{(n)}_i\}}, n \geq 1,$$

waar

$$C_i^{(n)} := \dot{\bigcup_{(i_0,\dots,i_{n-1})\in I^n}} B^{(n)}_{i_0,\dots,i_{n-1},i}, i \in I, n \ge 1.$$

Uit bovenstaande definitie blijkt duidelijk dat

$$\mathbb{P}\{X_0 = x_i\} = \mathbb{P}\{U \in B_i^{(0)}\} = \alpha_i = \pi(x_i), i \in I$$

en verder geldt er voor $n \ge 1$ en $(i_0,\dots,i_n) \in I^{n+1}$,

$$\mathbb{P}\{(X_0,\dots,X_n) = (x_{i_0},\dots,x_{i_n})\} = \mathbb{P}\{U \in B^{(n)}_{i_0,\dots,i_n}\} = \alpha_{i_0}\prod_{j=1}^n p(x_{i_{j-1}}, x_{i_j}).$$

Dit impliceert voor $n \ge 0$ en $(i_0,\dots,i_n) \in I^{n+1}$ met $\mathbb{P}\{(X_0,\dots,X_n) = (x_{i_0},\dots,x_{i_n})\} > 0$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{i_{n+1}} | X_n = x_{i_n},\dots,X_0 = x_{i_0}) = p(x_{i_n}, x_{i_{n+1}})$$

en via Lemma 1.1 volgt verder dat

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{i_{n+1}} | X_n = x_{i_n}) = p(x_{i_n}, x_{i_{n+1}}), n \ge 0.$$

Dus is $\{X_n : n \ge 0\}$ een Markovketen met overgangsmatrix p en startverdeling π. □

We bekijken nu enkele

Voorbeelden

1. Zij $f(x), x \in \mathbb{Z}^d$ een willekeurige kansfunctie, dus, $0 \le f(x), x \in \mathbb{Z}^d$ en $\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} f(x) = 1$. Dan is $p(x,y) := f(y-x), x, y \in \mathbb{Z}^d$ een stochastische matrix.
(Merk op dat $\sum_{y\in\mathbb{Z}^d} f(y-x) = \sum_{z\in\mathbb{Z}^d - x} f(z) = \sum_{z\in\mathbb{Z}^d} f(z) = 1$.)
Zij verder π een willekeurige verdeling op $\mathbb{Z}^d$. Stelling 1.3 impliceert dan dat er een Markovketen $\{X_n : n \ge 0\}$ met overgangsmatrix p en startverdeling π bestaat.
Stel $\xi_0 = X_0$ en $\xi_n = X_n - X_{n-1}, n \ge 1$. Dan geldt er voor $n \ge 1$ en $y_1,\dots,y_n \in \mathbb{Z}^d$,

$$\mathbb{P}\{\xi_0 = y_0,\dots,\xi_n = y_n\} = \mathbb{P}\{X_0 = z_0,\dots,X_n = z_n\},$$

waar $z_n = \sum_{j=0}^n y_j, n \ge 0$. Stelling 1.1 impliceert dan verder dat de kans rechts gelijk is aan

$$\pi(z_0)\prod_{j=1}^n f(z_j - z_{j-1}) = \pi(y_0)\prod_{j=1}^n f(y_j).$$

Dus zijn de toevalsvariabelen $\xi_n, n \ge 0$ onafhankelijk en bovendien zijn de toevalsvariabelen $\xi_n, n \ge 1$ identiek verdeeld met de door f bepaalde verdeling. Gezien $X_n = \sum_{j=0}^n \xi_j, n \ge 0$, hebben we sommen van onafhankelijke toevalsvariabelen. We spreken in dit geval ook van een **stochastische wandeling**.

2. Een speciaal geval is de 1-dimensionale stochastische wandeling met $f(1) = p = 1 - f(0)$. (Bernoulli(p)-verdeling) Als we de startverdeling zo kiezen dat $\sum_{j=0}^\infty \pi(j) = 1$ verkrijgen we een stochastische wandeling $X_n, n \ge 0$ met toestandsruimte $\{0, 1, 2, \dots\}$. In dit geval hebben we $X_0 \le X_1 \le X_2 \le \dots$. Verder is ook voor elke $m \ge 0$ $X_n \wedge m$ in dit geval een stochastische wandeling met een absorberende grens. (We hebben $p(m,m) = 1$.)

3. (**Ehrenfestketen**) We hebben twee urnen en m ballen die tussen deze twee urnen verdeeld zijn. Veronderstel dat op elke bal een nummer van 1 t/m m staat. Kies (uniform) een nummer uit $\{1,\ldots,m\}$ en leg de bal met dit nummer in de andere urn. Stel X_n = aantal ballen in urn 1 op tijdstip n. Het is evident dat als $X_n = x$ er (hoogstens) twee mogelijkheden zijn voor X_{n+1}, namelijk $x-1$ en $x+1$. We hebben dan voor de overgangskansen:
$$p(0,1) = 1 = p(m,m-1) \text{ en } p(x,x-1) = x/m, p(x,x+1) = 1 - x/m, 1 \le x \le m-1.$$
Als $m = 3$ krijgen we bv de volgende overgangsmatrix
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. (**Ruïneringsketen**) Er zijn twee spelers A en B met startkapitaal i Euro en $m-i$ Euro, waar $1 \le i \le m-1$. Speler A werpt een muntstuk waar de kans op “kop” gelijk aan p is. In dit geval zal hij een Euro van B krijgen. Als het “munt” is moet hij 1 Euro aan B betalen. Ze gaan dit zo lang doen totdat de eerste speler geruïneerd is. (Dit zal het geval zijn als het kapitaal van A gelijk is aan 0 of m.) Zij X_n het kapitaal van A op tijdstip n. Dan is dit een Markovketen zodanig dat
$$p(0,0) = p(m,m) = 1 \text{ en } p(x,x+1) = p, p(x,x-1) = 1-p, 1 \le x \le m-1.$$

5. (**Geboorte- en sterfteketens**) Deze zijn Markovketens met toestandsruimte $\mathcal{S} = \{0,\ldots,m\}$ of $\mathcal{S} = \{0,1,\ldots\}$ waar voor de overgangskansen geldt:
$$p(x,y) = 0 \text{ als } |x-y| \ge 2.$$
De overgangsmatrix p is dan bepaald door
$$r_x := p(x,x), x \ge 0, q_x := p(x,x-1), x \ge 1 \text{ en } p_x := p(x,x+1), x \ge 0,$$
waarbij $p_m = 0$ als $\mathcal{S} = \{0,\ldots,m\}$.
Voorbeelden 2-4 zijn speciale gevallen van geboorte- en sterfteketens.

6. (**Vertakkingsketen**) Beschouw partikels die nieuwe partikels kunnen genereren (bv, bacteriën, neutronen). Stel $X_0 =$ het aantal partikels op het startmoment (generatie 0), en $X_n =$ het aantal partikels van de n-de generatie, waarbij de partikels van de eerdere generaties niet meetellen.

   Voorwaarde *De toevalsvariabelen $\xi_i^{(n)}$ = het aantal “kinderen” van partikel i van de n-de generatie, $i \ge 1, n \ge 0$ zijn onafhankelijk en identiek verdeeld.*

   Dan hebben we voor $n \ge 1$
$$X_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{als } X_n = 0, \\ \sum_{i=1}^{X_n} \xi_i^{(n)} & \text{als } X_n > 0. \end{cases}$$
De bovenstaande voorwaarde impliceert dan dat $X_n, n \ge 0$ een Markovketen is met overgangsmatrix $p(m,n)_{m,n\ge 0}$ die bepaald is door $p(0,0) = 1$ en
$$p(m,n) = \mathbb{P}\{\sum_{i=1}^{m} \xi_i^{(0)} = n\}, m \ge 1, n \ge 0.$$

1.2 Classificatie van de toestanden

Stel voor $\emptyset \neq A \subset \mathcal{S}$,

$$T_A := \inf\{n \geq 1 : X_n \in A\},$$

waar $\inf \emptyset = \infty$.
Als $X_0 = x \notin A$, is T_A de intreetijd van $\{X_n : n \geq 1\}$ in A. In het geval $x \in A$ gaat het om de terugkeertijd.
In plaats van $T_{\{a\}}$ zullen we altijd $T_a, a \in \mathcal{S}$ schrijven. Verder gaan we voorwaardelijke kansen $\mathbb{P}(A|X_0 = x)$ door $P_x(A), A \in \mathcal{F}$ aanduiden en schrijven $E_x[X]$ voor de verwachtingswaarde van een toevalsvariabele $X : \Omega \to \mathbb{R}$ t.o.v. P_x.
Stel

$$\rho_{xy} := P_x\{T_y < \infty\}, x, y \in \mathcal{S}.$$

Definitie 1.2 *We noemen een toestand $y \in \mathcal{S}$* **recurrent** *indien $\rho_{yy} = 1$. Als $\rho_{yy} < 1$ zeggen we dat de toestand* **transiënt** *is.*

Het is evident dat elke absorberende toestand y recurrent is.
(We hebben dan $p(y,y) = 1$ of $P_y\{T_y = 1\} = 1$ en dus $\rho_{yy} = P_y\{T_y < \infty\} = 1$.)
Stel verder voor elke toestand $y \in \mathcal{S}$,

$$N(y) = \sum_{n=1}^{\infty} I_{\{X_n = y\}},$$

dus het aantal tijdstippen (vanaf 1) wanneer $X_n = y$.
Aangezien $P_x\{X_n = y\} = p^{(n)}(x,y)$ kunnen we via de stelling van de monotone convergentie concluderen dat

$$E_x[N(y)] = \sum_{n=1}^{\infty} p^{(n)}(x,y), x, y \in \mathcal{S}. \tag{1.1}$$

Stelling 1.4 *Zij $\{X_n : n \geq 0\}$ een Markovketen met toestandsruimte $\mathcal{S}$. Dan hebben we voor elke toestand $y \in \mathcal{S}$:*

(i) y transiënt $\Rightarrow E_x[N(y)] = \frac{\rho_{xy}}{1-\rho_{yy}} < \infty$.

(ii) y recurrent $\Rightarrow P_x\{N(y) = \infty\} = \rho_{xy}$. In het bijzonder: $P_y\{N(y) = \infty\} = 1$.

Bewijs We tonen eerst dat voor alle toestanden $x, y \in \mathcal{S}$ geldt:

$$P_x\{N(y) \geq k\} = \rho_{xy}\rho_{yy}^{k-1}, k \geq 1. \tag{1.2}$$

We gaan dit via inductie bewijzen.
$\boxed{k = 1}$ Dit is evident omdat $\{T_y < \infty\} = \{N(y) \geq 1\}$ en dus geldt er:

$$P_x\{N(y) \geq 1\} = P_x\{T_y < \infty\} = \rho_{xy},$$

hetgeen toont dat de bewering klopt als $k = 1$.
$\boxed{k \to k+1}$ Stel $T_y^{(1)} = T_y$ en

$$T_y^{(k+1)} = \inf\{n > T_y^{(k)} : X_n = y\}, k \geq 1,$$

waarbij $\inf \emptyset = \infty$.

Kies natuurlijke getallen $m_1, \ldots, m_{k+1} \geq 1$ en stel $n_j = \sum_{i=1}^{j} m_i, 1 \leq j \leq k+1$. We berekenen eerst de voorwaardelijke kans dat $T_y^{(k+1)} = n_{k+1}$, gegeven dat $T_y^{(j)} = n_j, 1 \leq j \leq k$. Dus $n_1 < n_2 < \ldots < n_{k+1}$ zijn precies de tijdstippen in $\{1, \ldots, n_{k+1}\}$, wanneer de Markovketen op y zit.
Uit de definitie van voorwaardelijke kansen volgt dat

$$\begin{aligned} & P_x\left(T_y^{(k+1)} = n_{k+1} \middle| T_y^{(j)} = n_j, 1 \leq j \leq k\right) \\ = \; & \mathbb{P}\left(T_y^{(k+1)} = n_{k+1} \middle| T_y^{(j)} = n_j, 1 \leq j \leq k, X_0 = x\right) \end{aligned}$$

Omdat $T_y^{(j)} = n_j, 1 \leq j \leq k+1$ betekent dat $X_n = y$ als $n \in \{n_j : 1 \leq j \leq k+1\}$ en $X_n \neq y$ als $n \notin \{n_j : 1 \leq j \leq k+1\}$ kunnen we de laatste kans via de Markov-eigenschap herschrijven als

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(X_{n_{k+1}} = y, X_n \neq y, n_k < n < n_{k+1} \middle| \bigcap_{i=1}^{k} \{X_{n_i} = y\} \cap \{X_n \neq y, n \notin \{n_1, \ldots n_k\}\} \cap \{X_0 = x\}\right) \\ = \; & \mathbb{P}\left(X_{n_{k+1}} = y, X_n \neq y, n_k < n < n_{k+1} \middle| X_{n_k} = y\right) \\ = \; & P_y\left(X_{n_{k+1}-n_k} = y, X_{n-n_k} \neq y, n_k < n < n_{k+1}\right) \\ = \; & P_y\left(X_{m_{k+1}} = y, X_m \neq y, 0 < m < m_{k+1}\right) \\ = \; & P_y(T_y = m_{k+1}) \end{aligned}$$

We kunnen concluderen dat voor $m_1, \ldots, m_k \geq 1$ geldt

$$\begin{aligned} & P_x\left(T_y^{(k+1)} < \infty \middle| T_y^{(j)} = \sum_{i=1}^{j} m_i, 1 \leq j \leq k\right) \\ = \; & \sum_{m_{k+1}=1}^{\infty} P_x\left(T_y^{(k+1)} = n_k + m_{k+1} \middle| T_y^{(j)} = n_j, 1 \leq j \leq k\right) \\ = \; & \sum_{m_{k+1}=1}^{\infty} P_y(T_y = m_{k+1}) = P_y(T_y < \infty) = \rho_{yy} \end{aligned}$$

Aangezien

$$\{T_y^{(k)} < \infty\} = \dot{\bigcup_{m_1=1}^{\infty}} \ldots \dot{\bigcup_{m_k=1}^{\infty}} \left\{T_y^{(j)} = \sum_{i=1}^{j} m_i, 1 \leq j \leq k\right\},$$

zien we via Lemma 1.1 dat

$$P_x\left(T_y^{(k+1)} < \infty \middle| T_y^{(k)} < \infty\right) = \rho_{yy}.$$

Omdat we hebben $\{T_y^{(j)} < \infty\} = \{N(y) \geq j\}, j \geq 1$, volgt verder dat

$$\begin{aligned} P_x\{N(y) \geq k+1\} &= P_x(N(y) \geq k+1 | N(y) \geq k) P_x\{N(y) \geq k\} \\ &= P_x\left(T_y^{(k+1)} < \infty \middle| T_y^{(k)} < \infty\right) P_x\{N(y) \geq k\} \\ &= \rho_{yy} P_x\{N(y) \geq k\} \end{aligned}$$

en dus impliceert de inductie-hypothese dat

$$P_x\{N(y) \geq k+1\} = \rho_{xy}\rho_{yy}^{k}.$$

Daarmee is (1.2) bewezen.

We kunnen nu concluderen dat als $\rho_{yy} < 1$, we hebben

$$E_x[N(y)] = \sum_{k=1}^{\infty} P_x\{N(y) \geq k\} = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{xy}\rho_{yy}^{k-1} = \frac{\rho_{xy}}{1 - \rho_{yy}} < \infty.$$

Als y recurrent is, dwz $\rho_{yy} = 1$, dan hebben we

$$P_x\{N(y) \geq k\} = \rho_{xy}, k \geq 1$$

en bijgevolg

$$P_x\{N(y) = \infty\} = \lim_{k\to\infty} P_x\{N(y) \geq k\} = \rho_{xy}.$$

Daarmee is de stelling bewezen. □

Opmerkingen

1. Als y transiënt is, geldt er: $p^{(n)}(x, y) \to 0$ als $n \to \infty$. ($x \in \mathcal{S}$)
   (Dit volgt direct uit (1.1) omdat $E_x[N(y)] < \infty$ in dit geval.)

2. Als $\mathcal{S}$ **eindig** is, bestaan er recurrente toestanden.
   (Onderstel dat alle toestanden transiënt zijn. Gezien $\sum_{y\in\mathcal{S}} p^{(n)}(x, y) = 1, \forall n \geq 1$, hebben we

   $$1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{y\in\mathcal{S}} p^{(n)}(x, y) = \sum_{y\in\mathcal{S}} \lim_{n\to\infty} p^{(n)}(x, y),$$

   waar wegens de eerste opmerking de laatste som gelijk aan 0 is als alle toestanden transiënt zijn. Deze tegenspraak toont dat er recurrente toestanden moeten bestaan.)

3. y recurrent $\iff \sum_{n=1}^{\infty} p^{(n)}(y, y) = \infty$.
   (Dit volgt weer via (1.1) omdat stelling 1.4 impliceert dat y recurrent is als en slechts als $E_y[N(y)] = \infty$.)

1.3 Ontbinding van de toestandsruimte

Zij $\{X_n : n \geq 0\}$ een Markovketen met toestandsruimte $\mathcal{S}$ en overgangsmatrix $p(x, y)_{x,y\in\mathcal{S}}$.

Definitie 1.3 *We zeggen dat een toestand y vanuit x bereikbaar is indien $\rho_{xy} > 0$.*
(Notatie: $x \to y$)

Lemma 1.2 *Voor toestanden $x, y, z \in \mathcal{S}$, geldt:*
(i) *$x \to y$ als en slechts als $\exists\, n \geq 1 : p^{(n)}(x, y) > 0$.*
(ii) *$x \to y$ en $y \to z$ impliceert $x \to z$.*

Bewijs (i) Het is evident dat $x \to y \iff P_x\{N(y) \geq 1\} > 0 \iff E_x[N(y)] > 0$.
Aangezien $E_x[N(y)] = \sum_{n=1}^{\infty} p^{(n)}(x, y)$ (zie (1.1)), hebben we ook

$$E_x[N(y)] > 0 \iff \exists n \geq 1 : p^{(n)}(x, y) > 0.$$

(ii) Wegens (i) bestaan er $n_1, n_2 \geq 1$ zodanig dat $p^{(n_1)}(x, y) > 0$ en $p^{(n_2)}(y, z) > 0$. Dit impliceert

$$p^{(n_1+n_2)}(x, z) = \sum_{a\in\mathcal{S}} p^{(n_1)}(x, a)p^{(n_2)}(a, z) \geq p^{(n_1)}(x, y)p^{(n_2)}(y, z) > 0,$$

wat wegens de equivalentie in (i) betekent dat $x \to z$. □

Stelling 1.5 *Als $x \in \mathcal{S}$ recurrent is en $x \to y$, dan is ook y recurrent en bovendien geldt er $\rho_{xy} = \rho_{yx} = 1$.*

Bewijs Zonder beperking van de algemeenheid kunnen we veronderstellen dat $x \neq y$.
(i) Stel $n_0 = \min\{n \geq 1 : p^{(n)}(x,y) > 0\}$. (Dit bestaat wegens lemma 1.2(i).)
Stel $y_0 = x$ en $y_{n_0} = y$. Als $n_0 \geq 2$ hebben we dan

$$0 < p^{(n_0)}(x,y) = \sum_{y_1 \in \mathcal{S}} \cdots \sum_{y_{n_0-1} \in \mathcal{S}} \prod_{j=1}^{n_0} p(y_{j-1}, y_j),$$

hetgeen impliceert dat er $y_1, \ldots, y_{n_0-1} \in \mathcal{S}$ bestaan zodanig dat $p(y_{j-1}, y_j) > 0, 1 \leq j \leq n_0$. Omdat n_0 het kleinste aantal stappen is om van x naar y te komen (zie definitie van n_0) hebben we ook dat $y_i \notin \{x,y\}, 1 \leq i \leq n_0 - 1$.
Als $n_0 = 1$ hebben we dat $p(x,y) = p(y_0, y_1) > 0$.
(ii) $\boxed{\rho_{yx} = 1}$ Aangezien P_y zoals elke kansmaat continu van boven is, hebben we

$$1 - \rho_{yx} = P_y\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \{X_m \neq x\}\right) = \lim_{n\to\infty} P_y\left(\bigcap_{m=1}^{n} \{X_m \neq x\}\right) \tag{1.3}$$

De toestand x is recurrent en dus weten we dat

$$\begin{aligned}
0 &= P_x\left(\bigcap_{j=1}^{n_0}\{X_j = y_j\} \cap \bigcap_{j=n_0+1}^{\infty} \{X_j \neq x\}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} P_x\left(\bigcap_{j=1}^{n_0}\{X_j = y_j\} \cap \bigcap_{j=n_0+1}^{n_0+n} \{X_j \neq x\}\right) \\
&= \prod_{j=1}^{n_0} p(y_{j-1}, y_j) \lim_{n\to\infty} P_y\left(\bigcap_{m=1}^{n}\{X_m \neq x\}\right) \\
&= (1 - \rho_{yx}) \prod_{j=1}^{n_0} p(y_{j-1}, y_j) (\text{ wegens (1.3)})
\end{aligned}$$

De overgangskansen $p(y_{j-1}, y_j)$ zijn positief en bijgevolg is $1 - \rho_{yx} = 0$.
(iii) $\boxed{y \text{ is recurrent}}$ Wegens stelling 1.4 is het voldoende te tonen dat $E_y[N(y)] = \infty$. Kies $n_1, n_2 \geq 1$ zodanig dat $p^{(n_1)}(x,y) > 0$ en $p^{(n_2)}(y,x) > 0$. (n_2 bestaat wegens $\rho_{yx} = 1$.)
Dan geldt er $p^{(n+n_1+n_2)}(y,y) \geq p^{(n_2)}(y,x)p^{(n)}(x,x)p^{(n_1)}(x,y), n \geq 1$ en dus (zie (1.1)),

$$\begin{aligned}
E_y[N(y)] &\geq \sum_{m=1+n_1+n_2}^{\infty} p^{(m)}(y,y) \\
&\geq \sum_{n=1}^{\infty} p^{(n_2)}(y,x)p^{(n)}(x,x)p^{(n_1)}(x,y) \\
&= p^{(n_1)}(x,y)p^{(n_2)}(y,x)E_x[N(x)] = \infty.
\end{aligned}$$

(iv) We weten nu dat y recurrent is en ook dat $y \to x$. Verwisselen we x en y in (i) en (ii), volgt er ook dat $\rho_{xy} = 1$, waarmee de stelling bewezen is. □

Definitie 1.4 *Een niet-lege verzameling $C \subset \mathcal{S}$ heet* **gesloten** *indien geldt:*

$$x \in C, y \notin C \Rightarrow \rho_{xy} = 0.$$

Een eenvoudig voorbeeld voor een gesloten verzameling is $\{a\}$ als a absorberend is.
Het volgende lemma toont hoe men door inspectie van de overgangsmatrix gesloten delen van $\mathcal{S}$ kan vinden.

Lemma 1.3 *$\varnothing \neq C \subset \mathcal{S}$ is gesloten als en slechts als geldt: $p(x,y) = 0, x \in C, y \notin C$.*

Bewijs $\boxed{\Rightarrow}$ Zij $x \in C$ en $y \notin C$. Dan hebben we per definitie $\rho_{xy} = 0$, hetgeen impliceert dat $p^{(n)}(x,y) = 0, \forall n \geq 1$ (zie lemma 1.2). Dus hebben we zeker (kies $n = 1$) dat $p(x,y) = 0$ als $x \in C$ en $y \notin C$.

$\boxed{\Leftarrow}$ We tonen via inductie dat $p^{(n)}(x,y) = 0, \forall n \geq 1$ als $x \in C, y \notin C$.
($n = 1$) Dit is de voorwaarde.
($n \to n+1$) Veronderstel dat we reeds weten dat $p^{(n)}(x,y) = 0, \forall n \geq 1$ als $x \in C, y \notin C$. Aangezien $p^{(n+1)}(x,y)_{x,y \in \mathcal{S}}$ de $(n+1)$-ste macht van de overgangsmatrix p is en bijgevolg gelijk aan het matrixproduct van de n-de macht p^n en p is, volgt uit de inductiehypothese voor $x \in C$ en $y \in \mathcal{S}$,

$$p^{(n+1)}(x,y) = \sum_{z \in \mathcal{S}} p^{(n)}(x,z)p(z,y) = \sum_{z \in C} p^{(n)}(x,z)p(z,y).$$

Als $y \notin C$, geldt ook $p(z,y) = 0, z \in C$ en dus is $p^{(n+1)}(x,y) = 0, x \in C, y \notin C$. □

Definitie 1.5 *Een gesloten verzameling $C \subset \mathcal{S}$ heet* **irreducibel** *indien $\rho_{xy} > 0, x, y \in C$. We zeggen verder dat een Markovketen irreducibel is als de toestandsruimte $\mathcal{S}$ irreducibel is.*

Als a_1, a_2 twee verschillende absorberende toestanden zijn (bv, $a_1 = 0, a_2 = m$ in de ruïneringsketen), dan zijn $\{a_1\}, \{a_2\}$ gesloten en irreducibel, maar $\{a_1, a_2\}$ is niet irreducibel (wel gesloten).
Stelling 1.5 impliceert dan onmiddellijk:

Gevolg 1.2 *Als $C \subset \mathcal{S}$ gesloten en irreducibel is, dan zijn er twee mogelijkheden:*
(a) alle toestanden in C zijn recurrent of (b) alle toestanden in C zijn transiënt.
In geval (a) hebben we ook $\rho_{xy} = 1, \forall x, y \in C$.

Soms is het moeilijk te zien of de toestanden in een gesloten en irreducibele verzameling $C \subset \mathcal{S}$ recurrent of transiënt zijn. Dit probleem bestaat alleen voor oneindige verzamelingen. Als C eindig is, zijn alle toestanden in C recurrent.

Lemma 1.4 *Zij $C \subset \mathcal{S}$ een* **eindige** *verzameling die gesloten en irreducibel is. Dan zijn alle toestanden in C recurrent.*

Bewijs Als $X_0 = x \in C$ volgt er dat $X_n \in C, \forall\, n \geq 1$. Dus hebben we $\sum_{y \in C} N(y) = \infty$ en ook $\sum_{y \in C} E_x[N(y)] = \infty$. De conclusie is dat er een $y \in C$ moet bestaan zodanig dat $E_x[N(y)] = \infty$. (Als een eindige som $= \infty$ is, moet een van de termen die we optellen oneindig zijn.)
We kunnen via stelling 1.4 concluderen dat y recurrent is. Dit impliceert natuurlijk dat dan alle toestanden in de verzameling C recurrent zijn. □

Voorbeelden

1. Zij $\{X_n : n \geq 0\}$ een Markovketen met toestandsruimte $\mathcal{S} = \{0,1,2,3\}$ en overgangsmatrix
$$p = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
In dit geval is $\mathcal{S}$ irreducibel (en natuurlijk ook gesloten) en dus zijn alle toestanden recurrent. Dat deze keten irreducibel is, volgt direct uit het feit dat er een positieve kans is voor $0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 0$. Omdat deze "pad" alle elementen van $\mathcal{S}$ bevat en bij zijn startpunt 0 eindigt is het evident dat voor twee willekeurig gekozen elementen $x, y \in \mathcal{S}$ geldt: $x \to y$.

2. Bekijk nu een Markovketen met toestandsruimte $\mathcal{S} = \{0,1,2,3,4\}$ en overgangsmatrix
$$p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \end{bmatrix}$$
Dan is 0 absorberend en dus recurrent. Verder volgt via Lemma 1.3 dat $\{2,4\}$ gesloten is. Gezien alle overgangskansen $p(x,y), x, y \in \{2,4\}$ positief zijn, volgt er dat $\{2,4\}$ ook irreducibel is. Lemma 1.4 impliceert dan dat $2,4$ recurrente toestanden zijn. De toestanden 1, 3 zijn transiënt omdat $\rho_{10}, \rho_{30} > 0$, maar $\rho_{01} = \rho_{03} = 0$. Dit is onmogelijk voor recurrente toestanden (zie stelling 1.5).

Stelling 1.6 *Zij $X_n, n \geq 0$ een Markovketen met toestandsruimte $\mathcal{S}$ waaronder ook recurrente toestanden zijn. Dan geldt er:*
$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_T \cup \dot{\bigcup_{i \in I}} C_i,$$
waar $\mathcal{S}_T$ de verzameling van de transiënte toestanden is en de verzamelingen C_i irreducibele gesloten klassen van recurrente toestanden zijn.

Bewijs Als $\mathcal{S}_R$ de verzameling van de recurrente toestanden in $\mathcal{S}$ is, hebben we natuurlijk $\mathcal{S} = \mathcal{S}_T \cup \mathcal{S}_R$ en het is voldoende te tonen dat $\mathcal{S}_R$ een disjuncte unie van gesloten irreducibele verzamelingen is.
Stelling 1.5 impliceert dat "$\to$" een equivalentierelatie op $\mathcal{S}_R$ is.
Stel voor $x \in \mathcal{S}_R : D_x = \{y \in \mathcal{S}_R : x \to y\}$. Dan geldt voor $x_1, x_2 \in \mathcal{S}_R : D_{x_1} = D_{x_2}$ of $D_{x_1} \cap D_{x_2} = \varnothing$. Dus bestaan er toestanden $x_i, i \in I$ zodanig dat $\mathcal{S}_R = \dot{\bigcup}_{i \in I} D_{x_i}$. Stel $C_i = D_{x_i}, i \in I$. We moeten nog tonen dat deze verzamelingen gesloten en irreducibel zijn.
Om in te zien dat C_i gesloten is, nemen we een $y_1 \in C_i$ en een $y_2 \in \mathcal{S}$ zodanig dat $y_1 \to y_2$. Dan hebben we $x_i \to y_1 \to y_2$ en dus $x_i \to y_2$, wat betekent dat $y_2 \in C_i$. We zien dat $y_1 \to y_2$ alleen voor $y_2 \in C_i$ mogelijk is. Dus is C_i gesloten.
De verzamelingen C_i zijn irreducibel: als $z_1, z_2 \in C_i$ hebben we $z_1 \to x_i$ (weer wegens stelling 1.5) en $x_i \to z_2$. Dus $z_1 \to x_i \to z_2$ en $z_1 \to z_2$. Daarmee is de stelling bewezen. $\square$

Veronderstel dat we een Markovketen hebben waar $\mathcal{S}_T$ **eindig** is. Gezien de keten deze toestanden telkens voor eindig veel tijdstippen gaat zien of helemaal niet, komt de keten uiteindelijk in een recurrente toestand terecht. Als in de bovenstaande ontbinding meer dan een irreducibele gesloten klasse van recurrente toestanden bestaat, stelt zich de vraag wat de respectieve kansen zijn uiteindelijk in C_i terecht te komen, $i \in I$. Merk op dat zodra de keten in een van deze verzamelingen zit, ze ook erin zal blijven (omdat deze klassen gesloten zijn). Vandaar dat men ook van **absorptiekansen** spreekt.

Probleem *Zij* $X_n, n \geq 0$ *een Markovketen met overgangsmatrix* p *en zij* $\mathcal{S} = \mathcal{S}_T \uplus \biguplus_{i \in I} C_i$ *de ontbinding van de toestandsruimte zoals in stelling 1.6. Bepaal*

$$\rho_{C_i}(x) := P_x\{T_{C_i} < \infty\}, x \in \mathcal{S}_T, i \in I.$$

Stelling 1.7 *Zij* $X_n, n \geq 0$ *een Markovketen met overgangsmatrix* p *en zij* $\mathcal{S}_T$ *eindig. Als* C *een gesloten en irreducibele klasse van recurrente toestanden is, dan is* $\rho_C(x), x \in \mathcal{S}_T$ *de unieke oplossing van het volgende stelsel*

$$f(x) = \sum_{y \in C} p(x,y) + \sum_{y \in \mathcal{S}_T} p(x,y) f(y),\ x \in \mathcal{S}_T.$$

Bewijs (i) We tonen eerst dat $f(x) = \rho_C(x), x \in \mathcal{S}_T$ een oplossing van het bovenstaande stelsel is. Via de wet van de totale kans (op de kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, P_x)$) volgt dat

$$\begin{aligned}\rho_C(x) &= \sum_{y \in C} p(x,y) P_x(T_c < \infty | X_1 = y) + \sum_{y \in \mathcal{S}_T} p(x,y) P_x(T_c < \infty | X_1 = y) \\ &\quad + \sum_{y \in \mathcal{S}_R \setminus C} p(x,y) P_x(T_c < \infty | X_1 = y)\end{aligned}$$

Het is evident dat $P_x(T_C < \infty | X_1 = y) = 1$ als $y \in C$ omdat $\{X_1 = y\} \subset \{T_C < \infty\}$ in dit geval. Verder geldt voor $x, y \notin C$,

$$P_x(T_C < \infty | X_1 = y) = \mathbb{P}(T_C < \infty | X_1 = y, X_0 = x) = P_y(T_C < \infty) \tag{1.4}$$

Om de laatste gelijkheid in te zien, redeneren we zoals volgt,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_C < \infty | X_1 = y, X_0 = x) &= \sum_{m=2}^{\infty} \mathbb{P}(T_C = m | X_1 = y, X_0 = x) \text{ (omdat } x, y \notin C) \\ &= \sum_{m=2}^{\infty} \mathbb{P}(X_m \in C, X_j \notin C, 2 \leq j < m | X_1 = y, X_0 = x) \\ &= \sum_{m=2}^{\infty} \mathbb{P}(X_{m-1} \in C, X_j \notin C, 1 \leq j < m-1 | X_0 = y) \text{ (stelling 1.2)} \\ &= \sum_{m=2}^{\infty} P_y\{T_C = m-1\} = P_y\{T_C < \infty\}\end{aligned}$$

Als y recurrent is, maar niet in C, hebben we $\rho_{zy} = 0$ en wegens stelling 1.5 ook $\rho_{yz} = 0, \forall z \in C$. Dit impliceert dat

$$P_y(T_C < \infty) = P_y\left(\bigcup_{z \in C} \{T_z < \infty\}\right) \leq \sum_{z \in C} P_y\{T_z < \infty\} = \sum_{z \in C} \rho_{yz} = 0.$$

De conclusie is dat

$$\rho_C(x) = \sum_{y\in C} p(x,y) + \sum_{y\in \mathcal{S}_T} p(x,y)\rho_C(y), x \in \mathcal{S}_T$$

en dus is $f(x) = \rho_C(x), x \in \mathcal{S}_T$ inderdaad een oplossing van het bovenstaande stelsel.

(ii) (*Uniciteit van de oplossing*). We tonen eerst via inductie dat als $f(x), x \in \mathcal{S}$ een oplossing van het bovenstaande stelsel is, geldt:

$$f(x) = P_x\{T_C \le n\} + \sum_{z\in \mathcal{S}_T} p^{(n)}(x,z) f(z), x \in \mathcal{S}_T. \tag{1.5}$$

Dit klopt zeker als $\boxed{n = 1}$ omdat $P_x\{T_C = 1\} = P_x\{X_1 \in C\} = \sum_{y\in C} p(x,y)$.

$\boxed{n \to n+1}$ Vervangen we in formule (1.5) $f(z)$ door $\sum_{y\in C} p(z,y) + \sum_{y\in \mathcal{S}_T} p(z,y)f(y)$, dan volgt voor $x \in \mathcal{S}_T$ dat

$$\begin{aligned}
f(x) &= P_x\{T_C \le n\} + \sum_{z\in \mathcal{S}_T} p^{(n)}(x,z)\left(\sum_{y\in C} p(z,y) + \sum_{y\in \mathcal{S}_T} p(z,y)f(y)\right) \\
&= P_x\{T_C \le n\} + \sum_{y\in C}\sum_{z\in \mathcal{S}_T} p^{(n)}(x,z)p(z,y) + \sum_{y\in \mathcal{S}_T}\sum_{z\in \mathcal{S}_T} p^{(n)}(x,z)p(z,y)f(y) \\
&= P_x\{T_C \le n\} + P_x\{T_C = n+1\} + \sum_{y\in \mathcal{S}_T}\sum_{z\in \mathcal{S}} p^{(n)}(x,z)p(z,y)f(y) \text{ [omdat } p(z,y) = 0, z \notin \mathcal{S}_T] \\
&= P_x\{T_C \le n+1\} + \sum_{y\in \mathcal{S}_T} p^{(n+1)}(x,y)f(y).
\end{aligned}$$

Daarmee is (1.5) bewezen.
Aangezien $p^{(n)}(x,z) \to 0, x \in \mathcal{S}, z \in \mathcal{S}_T$ (zie opmerking 1 na stelling 1.4) en $\mathcal{S}_T$ eindig is, kunnen we de limieten in (1.5) berekenen en we zien dat

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} P_x\{T_C \le n\} + \sum_{z\in \mathcal{S}_T} f(z) \lim_{n\to\infty} p^{(n)}(x,z) = \rho_C(x), x \in \mathcal{S}_T.$$

Dus is $\rho_C(x)$ de enige mogelijke oplossing. □

Voorbeeld We bekijken nog een keer de Markovketen met toestandsruimte $\mathcal{S} = \{0,1,2,3,4\}$ en overgangsmatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \end{bmatrix}$$

We hebben al gezien dat 0, 2, 4 recurrente toestanden zijn en dat 1, 3 transiënt zijn. Verder is het evident dat $C_1 = \{0\}$ en $C_2 = \{2,4\}$ irreducibel en gesloten zijn. We kunnen nu via stelling 1.7 de absorptiekansen $\rho_{C_i}(x), x = 1,3, i = 1,2$ bepalen. Aangezien $\rho_{C_1}(x) + \rho_{C_2}(x) = 1, x = 1,3$ is het voldoende de stelling voor C_1 te gebruiken. In dit geval verkrijgen de twee volgende vergelijkingen:

$$f(1) = p(1,0) + p(1,1)f(1) + p(1,3)f(3) = 0 + 1/3f(1) + 2/3f(3)$$

en

$$f(3) = p(3,0) + p(3,1)f(1) + p(3,3)f(3) = 1/5 + 1/5f(1) + 1/5f(3).$$

Dus $f(1) = f(3) = 1/3$. De conclusie is dat $\rho_{C_1}(1) = \rho_{C_1}(3) = 1/3$ en $\rho_{C_2}(1) = \rho_{C_2}(3) = 2/3$.

1.4 Irreducibele geboorte- en sterfteketens

Zij $X_n, n \geq 0$ een geboorte- en sterfteketen, dus een Markovketen met toestandsruimte $\{0,\ldots,m\}$ of $\{0,1,\ldots\}$ en overgangskansen zodanig dat $p(x,y) = 0$ als $|x-y| \geq 2$.
Stel $q_x = p(x,x-1), x \geq 1$, $p_x = p(x,x+1), x \geq 0$ en (als $\mathcal{S}$ eindig is) $p_m = 0$. Zij verder $r_0 = 1 - p_0$, $r_x = 1 - p_x - q_x, x \geq 1$.
Het is dan evident dat een geboorte- en sterfteketen in het oneindige geval irreducibel is als en slechts als geldt:

$$q_x > 0, x \geq 1 \text{ en } p_x > 0, x \in \mathcal{S}.$$

In het eindige geval is de keten irreducibel indien

$$q_x > 0, 1 \leq x \leq m \text{ en } p_x > 0, 0 \leq x < m.$$

Lemma 1.4 impliceert dan dat alle toestanden in $\mathcal{S}$ recurrent zijn. In het oneindige geval is dit niet altijd het geval en we gaan hier een stelling herleiden die toont wanneer irreducibele geboorte- en sterfteketens met oneindige toestandsruimten recurrent zijn.

Daarvoor hebben we een lemma nodig dat ook voor bepaalde niet irreducibele geboorte- en sterfteketens van toepassing is.

Lemma 1.5 *Zij $X_n, n \geq 0$ een geboorte- en sterfteketen. Neem drie toestanden $a < x < b$ en veronderstel dat $p_j > 0, a < j < b$. Dan geldt:*

$$P_x\{T_a < T_b\} = \frac{\sum_{y=x}^{b-1} \gamma'_y}{\sum_{y=a}^{b-1} \gamma'_y},$$

waar $\gamma'_y = \prod_{z=a+1}^{y} q_z/p_z, a < y < b$ en $\gamma'_a = 1$.

Bewijs Stel $v(a) = 1, v(b) = 0$ en $v(y) = P_y\{T_a < T_b\}, a < y < b$. We moeten $v(x)$ bepalen. Algemeen kunnen we $v(y)$ met behulp van de wet van de totale kans herschrijven als

$$v(y) = P_y(T_a < T_b | X_1 = y-1)q_y + P_y(T_a < T_b | X_1 = y)r_y + P_y(T_a < T_b | X_1 = y+1)p_y.$$

Als $y = a+1$, hebben we $P_y(T_a < T_b | X_1 = y-1) = 1 = v(y-1)$. Dit klopt ook als $y > a+1$. In dit geval volgt via stelling 1.2:

$$\begin{aligned}
P_y(T_a < T_b | X_1 = y-1) &= \sum_{m=2}^{\infty} \mathbb{P}(T_a = m < T_b | X_1 = y-1, X_0 = y) \\
&= \sum_{m=2}^{\infty} \mathbb{P}(X_m = a, X_j \notin \{a,b\}, 2 \leq j < m | X_1 = y-1, X_0 = y) \\
&= \sum_{m=2}^{\infty} P_{y-1}(X_{m-1} = a, X_j \notin \{a,b\}, 1 \leq j < m-1) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P_{y-1}(T_a = n < T_b) = P_{y-1}(T_a < T_b) = v(y-1).
\end{aligned}$$

Analoog zien we dat $P_y(T_a < T_b | X_1 = y) = v(y)$ en $P_y(T_a < T_b | X_1 = y+1) = v(y+1), a < y < b$. Dus hebben we

$$v(y) = q_y v(y-1) + r_y v(y) + p_y v(y+1), a < y < b. \tag{1.6}$$

Aangezien $q_y + r_y + p_y = 1$, zien we dat

$$p_y(v(y+1) - v(y)) = q_y(v(y) - v(y-1)), a < y < b,$$

hetgeen onmiddellijk impliceert dat

$$v(y+1) - v(y) = \gamma'_y(v(a+1) - v(a)), a \le y < b$$

en verder dat

$$-1 = v(b) - v(a) = (v(a+1) - v(a)) \sum_{y=a}^{b-1} \gamma'_y.$$

Vervangen we boven $v(a+1) - v(a)$ door $-1/\sum_{y=a}^{b-1}\gamma'_y$, volgt er dat

$$v(y) - v(y+1) = \frac{\gamma'_y}{\sum_{y=a}^{b-1}\gamma'_y}, a \le y < b.$$

We concluderen dat

$$v(x) = \sum_{y=x}^{b-1}(v(y) - v(y+1)) = \frac{\sum_{y=x}^{b-1}\gamma'_y}{\sum_{y=a}^{b-1}\gamma'_y}, a < x < b,$$

waarmee het lemma bewezen is. □

Toepassing We bekijken de ruïneringsketen: In dit geval zijn de twee toestanden 0 en m absorberend (dus recurrent) en de andere toestanden zijn transiënt (omdat $\rho_{0j} = 0$ als $1 \le j < m$). Verder geldt $p_j = 1 - q_j = p = 1 - q, 1 \le j < m$. Het bovenstaande lemma impliceert dan dat voor $0 \le a < x < b \le m$ geldt:

$$P_x\{T_a < T_b\} = \frac{\sum_{j=x}^{b-1}(q/p)^j}{\sum_{j=a}^{b-1}(q/p)^j}.$$

Als $p = q = 1/2$ verkrijgen we dat $P_x\{T_a < T_b\} = (b-x)/(b-a), a < x < b$.
In het geval $p \ne q$ hebben we

$$P_x\{T_a < T_b\} = \frac{(q/p)^x - (q/p)^b}{(q/p)^a - (q/p)^b}.$$

Kiezen we $a = 0$ en $b = m$, verkrijgen we $P_x\{T_0 < T_m\}$, wat de kans is dat speler A (met startkapitaal x) failliet gaat en het ganse kapitaal naar speler B gaat.

We keren terug naar het probleem wanneer irreducibele geboorte- en sterfteketens recurrent zijn. Stel

$$\gamma_0 = 1, \gamma_y = \prod_{j=1}^{y}\frac{q_j}{p_j}, y \ge 1.$$

Stelling 1.8 *Zij $X_n, n \ge 0$ een irreducibele geboorte- en sterfteketen met toestandsruimte $\mathcal{S} = \{0, 1, \ldots\}$. Deze is recurrent als en slechts als $\sum_{y=0}^{\infty}\gamma_y = \infty$.*

Bewijs Wegens gevolg 1.2 is de Markovketen recurrent als en slechts als 0 recurrent is, dus als $\rho_{00} = 1$. Met een analoge redenering als in het bewijs van (1.4) zien we dat

$$\rho_{00} = P_0\{T_0 < \infty\} = r_0 P_0(T_0 < \infty | X_1 = 0) + p_0 P_0(T_0 < \infty | X_1 = 1) = r_0 + p_0\rho_{10}.$$

Dit impliceert (wegens $r_0 + p_0 = 1$ en $p_0 > 0$) dat $\rho_{00} = 1 \Leftrightarrow \rho_{10} = 1$.

De kans ρ_{10} kunnen we met behulp van lemma 1.5 berekenen. Merk op dat als $X_0 = 1$ er geldt $T_n \geq n-1, n \geq 0$ omdat $|X_n - X_{n-1}| \leq 1, n \geq 1$. Bovendien impliceert dit dat de rij toevalsvariabelen $T_n, n \geq 1$ monotoon stijgend is, dwz we hebben $T_1 < T_2 < \ldots$. De conclusie is dat

$$\rho_{10} = P_1\{T_0 < \infty\} = \lim_{n\to\infty} P_1\{T_0 < T_n\}.$$

Wegens lemma 1.5 geldt er voor $n \geq 2$,

$$P_1\{T_0 < T_n\} = \frac{\sum_{y=1}^{n-1}\gamma_y}{\sum_{y=0}^{n-1}\gamma_y} = 1 - \frac{1}{\sum_{y=0}^{n-1}\gamma_y}.$$

Dus hebben we (stel $1/\infty = 0$)

$$\rho_{10} = 1 - \frac{1}{\sum_{y=0}^{\infty}\gamma_y}$$

en het is evident dat $\rho_{10} = 1 \Leftrightarrow \sum_{y=0}^{\infty}\gamma_y = \infty$. Daarmee is de stelling bewezen. $\square$

1.5 Vertakkingsketens

We bekijken nu vertakkingsketens ($\rightarrow$ voorbeeld 6 in 1.1). Deze worden gebruikt om de evolutie van bepaalde "bevolkingen" te modelleren. We hebben de toestandsruimte $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ en overgangskansen

$$p(0,0) = 1,\ p(m,n) = \mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{m}\xi_i = n\right\}, m \geq 1, n \geq 0,$$

waar $\xi_n, n \geq 1$ (de aantallen "kinderen") onafhankelijke, identiek verdeelde toevalsvariabelen zijn met waarden in $\{0, 1, \ldots\}$.

We noteren de kansfunctie van deze toevalsvariabelen als $f(k), k = 0, 1, \ldots$.

Het is evident dat 0 een absorberende toestand is.

Als $\boxed{f(0) > 0}$ volgt er dat $p(m,0) = f(0)^m > 0, m \geq 1$ en we zien dat 0 vanuit m bereikbaar is, maar m is niet meer vanuit 0 bereikbaar. Stelling 1.5 impliceert dan dat de toestanden $m \geq 1$ transiënt zijn.

Dit klopt ook als $\boxed{f(0) = 0 \text{ en } f(1) < 1}$. In dit geval hebben we namelijk $p(m,n) = 0, m > n$ (omdat $\xi_i \geq 1, i \geq 1$). Verder bestaat er een $k \geq 2$ met $f(k) > 0$. We hebben dan voor elke $m \geq 1$,

$$p(m, mk) \geq \mathbb{P}\{\xi_i = k, 1 \leq i \leq m\} = f(k)^m > 0.$$

Dus is mk bereikbaar vanuit m, maar m is niet bereikbaar vanuit mk, hetgeen weer via stelling 1.5 impliceert dat m transiënt is.

Als $\boxed{\text{f(1)=1}}$ geldt er $p(m,m) = 1$ en alle toestanden zijn absorberend, hetgeen impliceert dat dan de vertakkingsketen $X_n, n \geq 0$ constant is.
De conclusie is dat behalve in het triviale geval $f(1) = 1$ er twee mogelijkheden zijn voor een vertakkingsketen:
(A) $X_n \to \infty$ als $n \to \infty$
(B) $X_n = 0$, uiteindelijk (de "bevolking" gaat uitsterven).

Om ρ_{x0} (= voorwaardelijke kans op (B), gegeven $X_0 = x$) te berekenen, hebben we kansgenererende functies nodig.

1.5.1 Kansgenererende functies

Stel $Z : \Omega \to \{0, 1, 2, \ldots\}$ een discrete toevalsvariabele met waarden in $\{0, 1, \ldots\}$. Dan is de kansgenererende functie $G : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ van Z gedefinieerd door

$$G(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\{Z = k\} t^k.$$

We merken op dat $G(0) = \mathbb{P}\{Z = 0\}$ en $G(1) = 1$. Een standaard resultaat over machtreeksen impliceert verder dat G afgeleiden van elke orde op het open interval $]-1, 1[$ heeft. Deze hebben ook representaties als machtreeksen. Er geldt voor $-1 < t < 1$ en elke $m = 1, 2, \ldots$

$$G^{(m)}(t) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{k!}{(k-m)!} \mathbb{P}\{Z = k\} t^{k-m}$$

Uit deze formule kunnen we halen dat $G^{(m)}(0) = m! \mathbb{P}\{Z = m\}, m = 1, 2 \ldots$ en ook dat

$$\boxed{\mathbb{E}[Z] = \lim_{t \to 1} G'(t)}.$$

Om de kans dat een vertakkingsketen gaat uitsterven te berekenen, moeten we de vergelijking $\boxed{G(t) = t, 0 \le t \le 1}$ bestuderen. Het volgende lemma toont dat er hoogstens twee oplossingen zijn waarvan een triviaal is, namelijk $t = 1$.

Lemma 1.6 *Zij $Z : \Omega \to \{0, 1, \ldots\}$ een toevalsvariabele met kansgenererende functie G.*
(i) *Als $\mathbb{E}[Z] \le 1$ en $\mathbb{P}\{Z = 1\} < 1$, is $t = 1$ de enige oplossing van de vergelijking $G(t) = t$.*
(ii) *Als $\mathbb{E}[Z] > 1$ zijn er precies twee oplossingen: 1 en $t_0 \in [0, 1[$.*

Bewijs. Stel $H(t) = t - G(t), -1 \le t \le 1$. We moeten de nulpunten van deze functie in $[0, 1]$ bepalen.
(i) Als $\mathbb{E}[Z] \le 1$ en $\mathbb{P}\{Z = 1\} < 1$, volgt er dat $p := \mathbb{P}\{Z = 0\} > 0$ en dus $H(0) = -p < 0$. Verder geldt er dat

$$H'(t) = 1 - G'(t) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbb{P}\{Z = k\} t^{k-1} \ge 1 - \mathbb{E}[Z].$$

Als $\mathbb{E}[Z] < 1$, is het evident dat $H'(t) > 0, 0 < t < 1$.
In het geval $\mathbb{E}[Z] = 1$ hebben we voor $0 < t < 1$.

$$G'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbb{P}\{Z = k\} t^{k-1} < \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbb{P}\{Z = k\} = \mathbb{E}[Z]$$

omdat er minstens een $k \ge 2$ moet bestaan met $\mathbb{P}\{Z = k\} > 0$. ($\mathbb{P}\{Z = 1\} = 1$ is niet mogelijk.) Dus hebben we in beide gevallen dat H' positief op $]0, 1[$ is en bijgevolg is H (strikt) monotoon stijgend op $[0, 1]$, hetgeen wegens $H(0) < 0$ en $H(1) = 0$ impliceert dat H precies een nulpunt in $[0, 1]$ heeft, namelijk 1.

(ii) (**Stap 1**) [*H heeft minstens een nulpunt in* $[0, 1[$.]
Als $\mathbb{P}\{Z = 0\} = 0$ is dit evident omdat dan $H(0) = 0$.
Als $\mathbb{P}\{Z = 0\} =: p > 0$, geldt er weer $H(0) = -p < 0$. Verder hebben we dat

$$\lim_{t \to 1} H'(t) = 1 - \lim_{t \to 1} G'(t) = 1 - \mathbb{E}[Z] < 0.$$

Dus bestaat er een $\epsilon \in]0,1[$ zodanig dat $H'(t) < 0, 1-\epsilon < t < 1$. Dit impliceert dat er een $t_\epsilon \in]1-\epsilon, 1[$ bestaat zodanig dat

$$-H(1-\epsilon) = H(1) - H(1-\epsilon) = H'(t_\epsilon)\epsilon < 0.$$

Bijgevolg is $H(1-\epsilon) > 0$. Aangezien $H(0) < 0$, kunnen we via de tussenwaardestelling concluderen dat er een t_0 tussen 0 en $1-\epsilon$ moet bestaan zodanig dat $H(t_0) = 0$.
(**Stap 2**) [*H heeft hoogstens een nulpunt in* $[0,1[$.]
(indirect) Veronderstel dat er twee nulpunten $0 \le t_1 < t_2 < 1$ bestaan. Dan geldt er

$$H(t_1) = H(t_2) = H(1) = 0.$$

Dit impliceert via de stelling van Rolle dat er $t_1 < u_1 < t_2 < u_2 < 1$ bestaan zodanig dat

$$H'(u_1) = H'(u_2) = 0.$$

Een tweede toepassing van de stelling van Rolle toont dan dat er een $u_1 < t < u_2$ bestaat met

$$H''(t) = -G''(t) = 0.$$

Dit is onmogelijk omdat we hebben,

$$G''(t) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\mathbb{P}\{Z = k\}t^{k-2} > 0.$$

(Er moet minstens een $k \ge 2$ bestaan met $\mathbb{P}\{Z = k\} > 0$ omdat $\mathbb{E}[Z] > 1$.)
Deze tegenspraak impliceert dat er hoogstens een nulpunt van H is in $[0,1[$. Daarmee is het lemma bewezen. □

1.5.2 Kans dat een vertakkingsketen gaat uitsterven

Zij $\xi : \Omega \to \{0,1,\ldots\}$ een toevalsvariabele met kansfunctie $f(k), k \ge 0$. Stel $\mu = \mathbb{E}[\xi]$ en zij $G(t), |t| \le 1$ de kansgenererende functie van ξ. Als $\mu > 1$ heeft de vergelijking $G(t) = t$ een unieke oplossing ρ in $[0,1[$ (zie lemma 1.6).

Stelling 1.9 *Zij $X_n, n \ge 0$ de vertakkingsketen met overgangskansen bepaald door de kansfunctie $f(k), k \ge 0$.*
(i) *Als $\mu \le 1$ en $f(1) < 1$, hebben we: $P_x\{X_n = 0 \text{ uiteindelijk}\} = 1, x \ge 1$.*
(ii) *Als $\mu > 1$, hebben we $P_x\{X_n = 0 \text{ uiteindelijk}\} = \rho^x, x \ge 1$.*

Bewijs Zij $0 < t < 1$ en stel $Z_n = t^{X_n}, n \ge 0$. Dan geldt natuurlijk $Z_n(\omega) \to 0$ als $X_n(\omega) \to \infty$ en $Z_n(\omega) \to 1$ als $X_n(\omega) = 0$ uiteindelijk (of equivalent $T_0(\omega) < \infty$). Dus hebben we bijna overal: $Z_n \to Z_\infty := I_{\{T_0<\infty\}}$.
De stelling van de begrensde convergentie impliceert dan dat

$$\rho_{x0} = E_x[Z_\infty] = \lim_{n\to\infty} E_x[Z_n].$$

Het is evident dat $E_x[Z_0] = t^x$. Verder geldt er als $n \ge 1$ en $m \in \{1,2,\ldots\}$

$$\begin{aligned} E_x[Z_n|X_{n-1} = m] &= \sum_{k=0}^{\infty} t^k P_x(X_n = k|X_{n-1} = m) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} t^k \mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{m} \xi_i = k\right\} = \mathbb{E}\left[t^{\sum_{i=1}^m \xi_i}\right], \end{aligned}$$

waar de toevalsvariabelen ξ_i onafhankelijk zijn met kansfunctie f. Dus

$$E_x[Z_n|X_{n-1}=m]=\mathbb{E}\left[t^{\sum_{i=1}^m \xi_i}\right]=\prod_{i=1}^m \mathbb{E}\left[t^{\xi_i}\right]=G(t)^m, m\geq 1.$$

Dit klopt ook als $m=0$. (Dan is $X_n=0$ en $Z_n=1=G(t)^0$.)
Bijgevolg, hebben we voor elke $n\geq 1$,

$$E_x[Z_n|X_{n-1}]=G(t)^{X_{n-1}} \tag{1.7}$$

Bewijs van (i) Lemma 1.6 impliceert dat $G(t)\neq t, t\in[0,1[$ in dit geval. Aangezien $G(0)=f(0)>0$, hebben we $G(t)>t, 0\leq t<1$. Uit betrekking (1.7) volgt dan dat $E_x[Z_n|X_{n-1}]\geq Z_{n-1}$ en dus

$$E_x[Z_n]=E_x[E_x[Z_n|X_{n-1}]]\geq E_x[Z_{n-1}], n\geq 1.$$

We zien dat $\rho_{x0}=\lim_{n\to\infty}E_x[Z_n]\geq E_x[Z_0]=t^x$. Omdat we t willekeurig in $[0,1[$ kunnen kiezen volgt er dat $\rho_{x0}=1$.

Bewijs van (ii) Als $\rho=0$, geldt er $f(0)=0$, dus $X_0\leq X_1\leq\dots$. In dit geval is het evident dat $\rho_{x0}=0=\rho^x, x\geq 1$.
Als $\rho>0$, stellen we $t=\rho$ in betrekking (1.7). Dan is $E_x[Z_n|X_{n-1}]=Z_{n-1}, n\geq 1$. Dus hebben we in dit geval $\rho_{x0}=\lim_{n\to\infty}E_x[Z_n]=E_x[Z_0]=\rho^x$, waarmee ook deel (ii) van de stelling bewezen is. □

1.6 Stationaire verdelingen

Definitie 1.6 *Een rij toevalsvariabelen $X_n, n\geq 0$ heet* **stationair** *indien geldt:*

$$\mathbb{P}_{(X_n,\dots,X_{n+m})}=\mathbb{P}_{(X_0,\dots,X_m)},\ \forall m,n\geq 0.$$

Het stelt zich de vraag of er ook stationaire Markovketens bestaan. Een nodige voorwaarde is dat de startverdeling $\pi(x), x\in\mathcal{S}$ zo gekozen is dat geldt $\mathbb{P}_{X_1}(x)=\pi(x), x\in\mathcal{S}$. Dit kunnen we via gevolg 1.1 herschrijven als

$$\sum_{x\in\mathcal{S}}\pi(x)p(x,y)=\pi(y), y\in\mathcal{S} \tag{1.8}$$

Dus we hebben een stelsel lineaire vergelijkingen wat we in bepaalde gevallen kunnen oplossen. De oplossing is niet uniek (omdat als $\pi(x), x\in\mathcal{S}$ een oplossing is dit ook het geval is voor $\alpha\pi(x), \alpha\in\mathbb{R}$). Om een stationaire verdeling te verkrijgen, moeten we echter ook nog hebben dat $\pi(x)\geq 0, x\in\mathcal{S}$ en $\sum_{x\in\mathcal{S}}\pi(x)=1$. Als we een oplossing van (1.8) zoeken die aan deze extra voorwaarden voldoet, is deze in veel gevallen uniek.
Soms is het ook nuttig (1.8) als matrixproduct op te schrijven:

$$(\pi(x))_{x\in\mathcal{S}}\times(p(x,y))_{x,y\in\mathcal{S}}=(\pi(y))_{y\in\mathcal{S}} \tag{1.9}$$

waar $(\pi(x))_{x\in\mathcal{S}}$ de door π bepaalde rijvector is.
Merk op dat als p^t de getransponeerde van de overgangsmatrix p is, dit equivalent daarmee is dat 1 een eigenwaarde van p^t is en de colomvector $(\pi(x))^t_{x\in\mathcal{S}}$ een eigenvector voor deze eigenwaarde van p^t is.

De volgende stelling toont dat als we een verdeling π gevonden hebben die aan (1.8) voldoet en deze als startverdeling kiezen, de resulterende Markovketen $X_n, n\geq 0$ stationair is.

Stelling 1.10 *Zij π_0 een verdeling op $\mathcal{S}$ die aan conditie (1.8) voldoet. Als $X_n, n \geq 0$ een Markovketen met startverdeling π_0 een overgangsmatrix p is, is $X_n, n \geq 0$ een stationaire rij toevalsvariabelen. We noemen π_0 een* **stationaire verdeling** *voor p.*

Bewijs Omdat aan (1.8) voldaan is, geldt er dat $\mathbb{P}_{X_1} = \pi_0$. Aangezien

$$\mathbb{P}\{X_n = y\} = \sum_{x \in \mathcal{S}} \mathbb{P}\{X_{n-1} = x\} p(x,y), y \in \mathcal{S},$$

volgt via inductie dat $\mathbb{P}_{X_n} = \pi_0, n \geq 1$.
Wegens stellingen 1.2 en 1.1 geldt verder voor $y_1, \ldots, y_m \in \mathcal{S}, m \geq 1$ en $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X_n = y_0, \ldots, X_{n+m} = y_m\} &= \mathbb{P}\{X_n = y_0\} \prod_{j=1}^{m} p(y_{j-1}, y_j) \\
&= \mathbb{P}\{X_0 = y_0\} \prod_{j=1}^{m} p(y_{j-1}, y_j) \\
&= \mathbb{P}\{X_0 = y_0, \ldots, X_m = y_m\}
\end{aligned}$$

en we zien dat de rij $X_n, n \geq 0$ stationair is. □

Voorbeelden

1. Zij $X_n, n \geq 0$ een Markovketen met toestandsruimte $\mathcal{S} = \{0,1\}$ en overgangsmatrix $\begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}$, waar $p, q \in]0,1[$. In dit geval moeten we een oplossing vinden van

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \end{bmatrix}.$$

   Dus

$$\alpha_0 = \alpha_0(1-p) + \alpha_1 q \text{ en } \alpha_1 = \alpha_0 p + \alpha_1(1-q).$$

   Dit is het geval als en slechts als $\alpha_0 = q\alpha_1/p$. Om een kansverdeling te verkrijgen moet ook $\alpha_0 + \alpha_1$ gelijk aan 1 zijn. Het volgt dat $\pi(0) = \alpha_0 = q/(p+q), \pi(1) = \alpha_1 = p/(p+q)$ een stationaire verdeling voor p is en deze is ook uniek. Verder kan men tonen dat als $n \to \infty$,

$$p^{(n)}(x,y) \to \pi(y), x, y = 0, 1$$

   Dus is n-de macht p^n van de overgangsmatrix $\approx \begin{bmatrix} \pi(0) & \pi(1) \\ \pi(0) & \pi(1) \end{bmatrix}$ als n groot.

2. Zij $X_n, n \geq 0$ de Ehrenfestketen met toestandsruimte $\mathcal{S} = \{0, \ldots, m\}$. In dit geval bestaat er ook een unieke stationaire verdeling π - de binomiaal$(m, 1/2)$-verdeling. Aangezien $p^{(2n)}(x,y) = 0$ als $x - y$ oneven is, hebben we echter $p^{(n)}(x,y) \not\to \pi(y), y \in \mathcal{S}$ als $n \to \infty$.

Men kan zich afvragen wanneer een Markovketen een (unieke) stationaire verdeling π heeft en wanneer in dit geval de overgangskansen $p^{(n)}(x,y)$ naar $\pi(y)$ convergeren.

De eerste vraag kunnen we in het vervolg volledig beantwoorden voor irreducibele geboorte- en sterfteketens.

Stelling 1.11 *Zij $X_n, n \geq 0$ een irreducibele geboorte- en sterfteketen.*
(i) *Als $\mathcal{S} = \{0, \ldots, m\}$ bestaat er een unieke stationaire verdeling.*
(ii) *Als $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ bestaat er een unieke stationaire verdeling als en slechts als*

$$C := \sum_{n \in \mathcal{S} \setminus \{0\}} \prod_{j=1}^{n} \frac{p_{j-1}}{q_j} < \infty.$$

In beide gevallen is de stationaire verdeling π bepaald door

$$\pi(0) = \frac{1}{C+1}, \; \pi(i) = \frac{1}{C+1} \prod_{j=1}^{i} \frac{p_{j-1}}{q_j}, i \geq 1.$$

Bewijs We gaan eerst na of er $\alpha_i \geq 0, i \in \mathcal{S}$ bestaan zodanig dat

$$\sum_{i \geq 0} \alpha_i p(i,j) = \alpha_j, j \geq 0. \tag{1.10}$$

Aangezien $p(j,j) = r_j, p(j,j+1) = p_j$(waar we $p_m = 0$ stellen in het eindige geval), $p(j,j-1) = q_j, j \geq 1$ en $p(i,j) = 0$ als $|i-j| \geq 2$, kunnen we dit herschrijven:

$$\alpha_0 r_0 + \alpha_1 q_1 = \alpha_0,$$

$$\alpha_{i-1} p_{i-1} + \alpha_i r_i + \alpha_{i+1} q_{i+1} = \alpha_i, i \geq 1.$$

We tonen via inductie dat dit impliceert

$$\alpha_i = (p_{i-1}/q_i)\alpha_{i-1}, i \geq 1 \tag{1.11}$$

$\boxed{i = 1}$ De eerste vergelijking is (wegens $p_0 + r_0 = 1$) equivalent met $q_1\alpha_1 = p_0\alpha_0$.
$\boxed{i \to i+1}$ Als we weten dat $p_{i-1}\alpha_{i-1} = q_i\alpha_i$ volgt uit de i-de vergelijking boven dat

$$\alpha_i = (q_i + r_i)\alpha_i + \alpha_{i+1} q_{i+1}$$

hetgeen wegens $p_i + q_i + r_i = 1$ toont dat $p_i\alpha_i = q_{i+1}\alpha_{i+1}$.

Uit betrekking (1.11) volgt onmiddellijk dat

$$\alpha_n = \alpha_0 \prod_{j=1}^{n} \frac{p_{j-1}}{q_j}, n \geq 1 \tag{1.12}$$

Omgekeerd geldt ook dat elke rij α_n van deze vorm een oplossing van (1.10) is.
Als er een stationaire verdeling π bestaat geldt er (stel $\alpha_n = \pi(n), n \geq 0$)

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \pi(n) = \pi(0)(C+1),$$

dus moet C eindig zijn. (Dit is triviaal als $\mathcal{S}$ eindig is.)
Omgekeerd, als C eindig is, stellen we $\pi(0) = 1/(C+1)$ en $\pi(n) = \prod_{j=1}^{n} \frac{p_{j-1}}{q_j}/(C+1)$. Dan geldt $\sum_{n=0}^{\infty} \pi(n) = 1$ en het is aan (1.10) voldaan. Dus π is een stationaire verdeling. Deze is uniek omdat elke oplossing van (1.10) van de vorm in (1.12) moet zijn. □

We merken op dat we in de twee bovenstaande voorbeelden de stationaire verdelingen ook via stelling 1.11 hadden kunnen vinden.

We bekijken het probleem wanneer de overgangskansen van een Markovketen naar stationaire kansen convergeren. Dit geldt onder zeer zwakke voorwaarden als we in plaats van de gewone convergentie de **Cesaro-convergentie** bekijken. We zeggen dat voor een rij $a_n, n \geq 1$ in $\mathbb{R}$ Cesaro-convergentie naar een reëel getal a bestaat indien geldt $\sum_{j=1}^{n} a_j/n \to a$. Het is evident dat de gewone convergentie $a_n \to a$ de Cesaro-convergentie impliceert, maar de omkering daarvan klopt niet. (Bekijk de rij $1, 0, 1, 0, \ldots$)

Zij $X_n, n \geq 0$ een Markovketen met toestandsruimte $\mathcal{S}$ en overgangsmatrix p. Stel

$$N_n(y) = \sum_{j=1}^{n} I_{\{X_j = y\}}, y \in \mathcal{S}, n \geq 1.$$

Dan is $G_n(x,y) := E_x[N_n(y)] = \sum_{j=1}^{n} p^{(j)}(x,y)$.
Als y transiënt is, geldt natuurlijk $\sup_{n\geq 1} N_n(y) < \infty$ b.o. (=bijna overal) en bijgevolg $N_n(y)/n \to 0$ b.o. De stelling van de begrensde convergentie impliceert dan dat

$$G_n(x,y)/n = E_x[N_n(y)/n] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} p^{(j)}(x,y) \to 0 \text{ als } n \to \infty.$$

Dus we hebben in dit geval Cesaro-convergentie van $p^{(n)}(x,y)$ naar 0 (voor elke $x \in \mathcal{S}$.)
Als y recurrent is en vanuit een toestand x bereikbaar is, geldt $E_x[N(y)] = \infty$ en we gaan met behulp van de sterke wet van de grote getallen tonen dat in dit geval ook Cesaro-convergentie van de overgangskansen $p^{(n)}(x,y)$ bestaat (waar de limieten verschillend van 0 kunnen zijn.)

We herinneren dat

$$T_y = T_y^{(1)} = \inf\{n \geq 1 : X_n = y\} \text{ en } T_y^{(k+1)} = \inf\{n > T_y^{(k)} : X_n = y\}, k \geq 1$$

Als $T_y < \infty$, zijn dit de tijdstippen in $\{1, 2, \ldots\}$ wanneer de Markovketen $X_n, n \geq 0$ op de recurrente toestand y zit.
We definiëren verder: $W_y^{(1)} = T_y^{(1)}$ en voor $k \geq 1$,

$$W_y^{(k+1)} = \begin{cases} T_y^{(k+1)} - T_y^{(k)} & \text{als } T_y^{(k+1)} < \infty \\ \infty & \text{als } T_y^{(k+1)} = \infty \end{cases}$$

Gezien y recurrent is, hebben we bijna overal $W_y^{(k)} < \infty, k \geq 1$ op $A = \{T_y < \infty\}$.
Als y vanuit $x \in \mathcal{S}$ bereikbaar is, geldt $\rho_{xy} = P_x(A) > 0$, en we stellen $Q_x = P_x(\cdot|A)$.

Lemma 1.7 *Zij $y \in \mathcal{S}$ recurrent en zij x een toestand zodanig dat $x \to y$.*
Dan zijn de toevalsvariabelen $W_y^{(k)}, k \geq 2$ Q_x-onafhankelijk en we hebben voor elke $k \geq 2$,

$$Q_x\{W_y^{(k)} = m\} = P_y\{T_y = m\}, m = 1, 2, \ldots,$$

i.e. de Q_x-verdeling van $W_y^{(k)}$ is gelijk aan de P_y-verdeling van T_y.

Bewijs. We berekenen voor $k \geq 2$ de gezamenlijke kansfunctie van $(W_y^{(2)}, \ldots, W_y^{(k)})$ t.o.v. Q_x. Dus kies $m_2, \ldots, m_k \geq 1$. Dan hebben we,

$$Q_x\{W_y^{(2)} = m_2, \ldots, W_y^{(k)} = m_k\} = P_x(\{W_y^{(2)} = m_2, \ldots, W_y^{(k)} = m_k\}|\{T_y < \infty\})$$

Verder geldt voor elke $m_1 \geq 1$ zodanig dat $P_x\{T_y = m_1\} > 0$,

$$P_x(\{W_y^{(2)} = m_2, \ldots, W_y^{(k)} = m_k\}|\{T_y = m_1\}) = P_x(\{T_y^{(2)} = n_2, \ldots, T_y^{(k)} = n_k\}|\{T_y = n_1\}),$$

waar $n_j = \sum_{i=1}^j m_i, 1 \leq j \leq k$.
De laatste voorwaardelijke kans is wegens de kettingregel gelijk aan

$$\frac{P_x\left(\bigcap_{j=1}^k \{T_y^{(j)} = n_j\}\right)}{P_x\{T_y = n_1\}} = \prod_{j=2}^k P_x\left(\{T_y^{(j)} = n_j\} \Big| \bigcap_{i=1}^{j-1} \{T_y^{(i)} = n_i\}\right)$$

Uit het bewijs van stelling 1.4 volgt dat dit product gelijk is aan

$$\prod_{j=2}^k P_y\{T_y = m_j\}.$$

Dus geldt er uniform voor $m_1 \geq 1$ met $P_x\{T_y = m_1\} > 0$,

$$P_x(\{W_y^{(2)} = m_2, \ldots, W_y^{(k)} = m_k\}|\{T_y = m_1\}) = \prod_{j=2}^k P_y\{T_y = m_j\}.$$

Een toepassing van lemma 1.1 levert dan dat voor elke keuze van $m_2, \ldots, m_k \geq 1$ geldt:

$$\begin{aligned} Q_x(\{W_y^{(2)} = m_2, \ldots, W_y^{(k)} = m_k\}) &= P_x\left(\{W_y^{(2)} = m_2, \ldots, W_y^{(k)} = m_k\} \Big| \dot{\bigcup_{m_1=1}^{\infty}} \{T_y = m_1\}\right) \\ &= \prod_{j=2}^k P_y\{T_y = m_j\} \end{aligned}$$

Dit impliceert natuurlijk dat de toevalsvariabelen $W_y^{(j)}, j \geq 2$ Q_x-onafhankelijk een identiek verdeeld zijn (waar de verdeling gelijk is aan de P_y-verdeling van T_y. Daarmee is lemma 1.7 bewezen. □

We definiëren nog voor elke toestand $y \in \mathcal{S}$, $\boxed{m_y := E_y[T_y] \in [1, \infty]}$

Merk op dat $m_y = \infty$ als y transiënt is omdat dan $P_y\{T_y = \infty\} > 0$.

Stelling 1.12 *Zij $X_n, n \geq 0$ een Markovketen met toestandsruimte $\mathcal{S}$.*
Dan geldt voor $x, y \in \mathcal{S}$,

(i)

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N_n(y)}{n} = \frac{1}{m_y} I_{\{T_y < \infty\}} \ P_x\text{-b.o.}$$

(ii)

$$\frac{G_n(x, y)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n p^{(j)}(x, y) \to \frac{\rho_{xy}}{m_y},$$

waar $1/\infty = 0$.

Bewijs (i) Het is voldoende dit te bewijzen als y recurrent is. (We hebben al eerder getoond dat $N_n(y)/n \to 0$ als y transiënt is.) We kunnen ook veronderstellen dat $x \to y$ omdat anders de stelling triviaal is. (Dan is $N_n(y) = 0 = I_{\{T_y<\infty\}}, P_x$-b.o.)

In dit geval kunnen we de kansmaat Q_x definiëren en de toevalsvariabelen $W_y^{(k)}, k \geq 2$ zijn Q_x-onafhankelijk (zie lemma 1.7). De sterke wet van de grote getallen impliceert dan dat als $k \to \infty$,

$$\frac{1}{k}\sum_{j=2}^{k} W_y^{(j)} \to E_y[T_y] = m_y \ Q_x\text{-b.o.}$$

Aangezien $\sum_{j=2}^k W_y^{(j)} = T_y^{(k)} - T_y$ en $T_y/k \to 0$ op $A = \{T_y < \infty\}$, hebben we als $k \to \infty$,

$$T_y^{(k)}/k \to m_y \ Q_x\text{-b.o.} \tag{1.13}$$

Als $n \geq T_y$ is $N_n(y) \geq 1$ en het is evident dat $T_y^{(N_n(y))} \leq n < T_y^{(N_n(y)+1)}$. Er geldt dan

$$\frac{T_y^{(N_n(y))}}{N_n(y)} \leq \frac{n}{N_n(y)} \leq \frac{T_y^{(N_n(y)+1)}}{N_n(y)+1}\frac{N_n(y)+1}{N_n(y)}. \tag{1.14}$$

De toestand y is recurrent en dus $N_n(y) \to \infty$ Q_x-b.o. De twee betrekkingen (1.13) en (1.14) impliceren dan samen dat $n/N_n(y) \to m_y$ Q_x-b.o. of equivalent dat

$$N_n(y)/n \to 1/m_y \ Q_x\text{-b.o.}$$

Aangezien $N_n(y)/n \to 0$ op A^c, kunnen we concluderen dat

$$N_n(y)/n \to \frac{1}{m_y} I_A \ P_x\text{-b.o.},$$

waarmee deel (i) bewezen is.

(ii) We hebben $0 \leq N_n(y)/n \leq 1$ en wegens (i) $N_n(y)/n \to I_A/m_y$ zodat we de stelling van de begrensde convergentie kunnen toepassen. De conclusie is dat

$$G_n(x,y)/n = E_x[N_n(y)]/n \to \frac{P_x(A)}{m_y} = \frac{\rho_{xy}}{m_y},$$

waarmee ook deel (ii) bewezen is. □

Definitie 1.7 *Zij $X_n, n \geq 0$ een Markovketen met toestandsruimte $\mathcal{S}$. We zeggen dat een recurrente toestand x* **positief recurrent** *is indien $m_x = E_x[T_x] < \infty$. Als $m_x = \infty$ zeggen we dat de toestand x* **nulrecurrent** *is.*

Lemma 1.8 *Zij $X_n, n \geq 0$ een Markovketen met toestandsruimte $\mathcal{S}$ en overgangsmatrix p. Als $x \in \mathcal{S}$ positief recurrent is en $x \to y$, dan is ook y positief recurrent.*

Bewijs We noteren eerst dat wegens stelling 1.5 de toestand y ook recurrent is en bovendien geldt: $\rho_{xy} = \rho_{yx} = 1$. Dus (zie lemma 1.2) bestaan er $n_1, n_2 \geq 1$ zodanig dat

$$p^{(n_1)}(x,y) > 0 \text{ en } p^{(n_2)}(y,x) > 0.$$

Bijgevolg,

$$p^{(n+n_1+n_2)}(y,y) \geq cp^{(n)}(x,x), n \geq 1,$$

waar $c := p^{(n_2)}(y,x)p^{(n_1)}(x,y) > 0$. Als $n \geq n_1 + n_2 + 1$, volgt dan dat

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} p^{(j)}(y,y) \geq c\left(1 - \frac{n_1+n_2}{n}\right)\frac{1}{n-n_1-n_2}\sum_{j=1}^{n-n_1-n_2} p^{(j)}(x,x),$$

waar het rechterlid naar $c/m_x > 0$ convergeert als $n \to \infty$.
De conclusie is dat de limiet van het linkerlid die gelijk is aan $1/m_y$, ook positief moet zijn. Dus is y positief recurrent. □

Opmerkingen

1. Als $C \subset \mathcal{S}$ gesloten en irreducibel zijn er drie mogelijkheden:
   (A) alle toestanden in C zijn positief recurrent, of
   (B) alle toestanden in C zijn nulrecurrent, of
   (C) alle toestanden in C zijn transiënt.

2. Als C **eindig** en gesloten is, bestaat er minstens een positief recurrente toestand. (C gesloten impliceert dat $p^{(j)}(x,z) = 0, x \in C, z \notin C, j \geq 1$ (zie lemma 1.3). Dus hebben we voor $x \in C$, $\sum_{y\in C} p^{(j)}(x,y) = \sum_{z\in\mathcal{S}} p^{(j)}(x,z) = 1, j \geq 1$ en $\sum_{y\in C} G_n(x,y)/n = 1, n \geq 1$. Aangezien C eindig is, geldt er dat $\sum_{y\in C}\lim_{n\to\infty} G_n(x,y)/n = 1$, zodat er een $y \in C$ moet bestaan waarvoor $\lim_{n\to\infty} G_n(x,y)/n = \rho_{xy}/m_y > 0$. Deze toestand is positief recurrent.)

3. Wegens opmerking 2 kunnen we concluderen dat als $C \subset \mathcal{S}$ eindig, gesloten en irreducibel is, alle toestanden in C positief recurrent zijn.

4. Verder volgt dat als de toestandsruimte $\mathcal{S}$ eindig is, er alleen positief recurrente of transiënte toestanden bestaan.

Lemma 1.9 *Zij $X_n, n \geq 0$ een Markovketen waarvoor een stationaire verdeling π bestaat. Dan geldt er $\pi(x) = 0$ voor alle transiënte en nulrecurrente toestanden $x \in \mathcal{S}$.*

Bewijs Als π een stationaire verdeling is, geldt: $\pi(x) = \sum_{z\in\mathcal{S}} \pi(z)p^{(j)}(z,x), x \in \mathcal{S}, 1 \leq j \leq n$, hetgeen impliceert dat

$$\pi(x) = \sum_{z\in\mathcal{S}} \pi(z)G_n(z,x)/n.$$

Als x vast is, is $z \to g_n(z) := G_n(z,x)/n$ een rij toevalsvariabelen op de discrete kansruimte $(\mathcal{S}, 2^{\mathcal{S}}, \pi)$ zodanig dat $g_n(z) \to 0, z \in \mathcal{S}$ (zie stelling 1.12). De stelling van de begrensde convergentie impliceert dan dat $E_\pi[g_n] = \sum_{z\in\mathcal{S}} g_n(z)\pi(z) \to 0$. Aangezien $\sum_{z\in\mathcal{S}} g_n(z)\pi(z) = \pi(x), n \geq 1$, volgt er dat $\pi(x) = 0$. □

Opmerking Uit vorig lemma blijkt dat een nodige voorwaarde voor het bestaan van een stationaire verdeling is dat er minstens een positief recurrente toestand bestaat. De volgende stelling impliceert onder meer dat deze conditie ook voldoende is.

Stelling 1.13 *Zij $X_n, n \geq 0$ een irreducibele, positief recurrente Markovketen. Dan bestaat er een unieke stationaire verdeling π die gedefinieerd is door*

$$\pi(x) = \frac{1}{m_x}, x \in \mathcal{S}.$$

Bewijs (*Stap 1*: uniciteit) Aangezien $X_n, n \geq 0$ irreducibel is en alle toestanden recurrent zijn, hebben we wegens stelling 1.5 dat $\rho_{zx} = 1, \forall\, x, z \in \mathcal{S}$. Stelling 1.12(ii) impliceert dan dat

$$G_n(z,x)/n \to \frac{1}{m_x}, \forall\, x, z \in \mathcal{S} \tag{1.15}$$

en we kunnen zoals in het bewijs van lemma 1.9 concluderen dat als er een stationaire verdeling π bestaat er moet gelden: $\pi(x) = 1/m_x, x \in \mathcal{S}$.
(*Stap 2*) We tonen dat

$$\sum_{x \in \mathcal{S}} \frac{1}{m_x} \leq 1 \tag{1.16}$$

We gebruiken weer het feit dat machten van stochastische matrices stochastische matrices blijven, dus we hebben:

$$\sum_{x \in \mathcal{S}} p^{(j)}(z,x) = 1, j \geq 1, z \in \mathcal{S},$$

hetgeen impliceert dat

$$\sum_{x \in \mathcal{S}} \frac{G_n(z,x)}{n} = 1, n \geq 1, z \in \mathcal{S}.$$

Zij $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ eindig. Dan volgt wegens (1.15) dat

$$1 \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{x \in \mathcal{S}_0} \frac{G_n(z,x)}{n} = \sum_{x \in \mathcal{S}_0} \lim_{n\to\infty} \frac{G_n(z,x)}{n} = \sum_{x \in \mathcal{S}_0} \frac{1}{m_x}$$

Gezien $\mathcal{S}$ hoogstens aftelbaar is en dit voor elke eindige deelverzameling $\mathcal{S}_0$ van $\mathcal{S}$ geldt, volgt (1.16).
(*Stap 3*) We tonen dat

$$\sum_{x \in \mathcal{S}} \frac{1}{m_x} p(x,y) \leq \frac{1}{m_y}, y \in \mathcal{S} \tag{1.17}$$

We hebben voor $1 \leq j \leq n$,

$$\sum_{x \in \mathcal{S}} p^{(j)}(z,x) p(x,y) = p^{(j+1)}(z,y)$$

en bijgevolg

$$\sum_{x \in \mathcal{S}} \frac{G_n(z,x)}{n} p(x,y) = \frac{G_{n+1}(z,y)}{n} - \frac{p(z,y)}{n}.$$

Als $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ eindig is, hebben we

$$\sum_{x \in \mathcal{S}_0} \frac{G_n(z,x)}{n} p(x,y) \leq \frac{G_{n+1}(z,y)}{n},$$

hetgeen in combinatie met (1.15) impliceert dat

$$\sum_{x \in \mathcal{S}_0} \frac{1}{m_x} p(x,y) \leq \frac{1}{m_y}, y \in \mathcal{S}.$$

Omdat dit weer voor elke eindige deelverzameling $\mathcal{S}_0$ van $\mathcal{S}$ geldt, volgt betrekking (1.17).

(*Stap 4*) We bewijzen indirect dat

$$\sum_{x\in\mathcal{S}} \frac{1}{m_x} p(x,y) \geq \frac{1}{m_y}, \forall\, y \in \mathcal{S} \tag{1.18}$$

Dus veronderstel dat er een $y_0 \in \mathcal{S}$ bestaat zodanig dat

$$\sum_{x\in\mathcal{S}} \frac{1}{m_x} p(x,y_0) < \frac{1}{m_{y_0}}.$$

Wegens (1.16) en (1.17) volgt dan dat

$$1 \geq \sum_{y\in\mathcal{S}} \frac{1}{m_y} > \sum_{y\in\mathcal{S}} \sum_{x\in\mathcal{S}} \frac{1}{m_x} p(x,y) = \sum_{x\in\mathcal{S}} \frac{1}{m_x} \sum_{y\in\mathcal{S}} p(x,y) = \sum_{x\in\mathcal{S}} \frac{1}{m_x}.$$

Dit is onmogelijk en we zien dat (1.18) geldt. (We mogen de twee sommen verwisselen omdat alle termen niet-negatief zijn.)

(*Stap 5*) Betrekkingen (1.17) en (1.18) tonen nu dat met $\alpha_x = 1/m_x$ geldt:

$$\sum_{x\in\mathcal{S}} \alpha_x p(x,y) = \alpha_y, y \in \mathcal{S}.$$

Stellen we $\pi(x) = \alpha_x/c$, $x \in \mathcal{S}$ waar $c = \sum_{x\in\mathcal{S}} 1/m_x \in]0,1]$, verkrijgen we een stationaire verdeling.
We hebben in stap 1 getoond dat dan $\pi(x) = 1/m_x, x \in \mathcal{S}$ en de conclusie is dat $c = 1$ en $\pi(x) = 1/m_x, x \in \mathcal{S}$ is de unieke stationaire verdeling. □

Bovenstaande stelling impliceert onmiddellijk,

Gevolg 1.3 *Zij $X_n, n \geq 0$ een irreducibele Markovketen. Dan zijn equivalent:*

(a) $X_n, n \geq 0$ is positief recurrent

(b) $X_n, n \geq 0$ heeft een (unieke) stationaire verdeling.

Bewijs $\boxed{\text{(a)} \Rightarrow \text{(b)}}$ zie stelling 1.13

$\boxed{\text{(b)} \Rightarrow \text{(a)}}$ Als er een stationaire verdeling bestaat (niet noodzakelijk uniek) moet er (minstens) een $x \in \mathcal{S}$ bestaan zodanig dat $\pi(x) > 0$. Wegens lemma 1.9 moet deze toestand positief recurrent zijn en daarmee zijn alle andere toestanden ook positief recurrent (zie lemma 1.8). Dus geldt (a). □

De volgende stelling geeft een karakterisatie van positief recurrent/ nulrecurrent/ transiënt voor irreducibele geboorte- en sterfteketens.

Stelling 1.14 *Zij $X_n, n \geq 0$ een irreducibele geboorte- en sterfteketen met toestandsruimte $\mathcal{S} = \{0,1,\ldots\}$. Dan geldt:*

(i) *$X_n, n \geq 0$ is positief recurrent / heeft stationaire verdeling* $\Leftrightarrow \sum_{x=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{x} \frac{p_{j-1}}{q_j} < \infty$.

(ii) *$X_n, n \geq 0$ is transiënt* $\Leftrightarrow \sum_{x=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{x} \frac{q_j}{p_j} < \infty$.

(iii) *$X_n, n \geq 0$ is nulrecurrent* $\Leftrightarrow \sum_{x=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{x} \frac{p_{j-1}}{q_j} = \infty$ *en* $\sum_{x=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{x} \frac{q_j}{p_j} = \infty$.

Bewijs (i) Dit volgt wegens stellingen 1.11 en 1.13.
(ii) Dit is stelling 1.8.
(iii) Dit is precies het geval waar (i) en (ii) **niet** geldig zijn. Dus moeten de twee reeksen divergent zijn. □

Voorbeeld We bekijken een modificatie van de ruïneringsketen:
een Markovketen met toestandsruimte $\mathcal{S} = \{0, 1, \ldots\}$ en overgangskansen

$$p(0,1) = 1, p = p(x, x+1), p(x, x-1) = q = 1 - p, x \geq 1$$

We kunnen zeggen dat het weer twee spelers A en B zijn waar speler B een kapitaal heeft wat oneindig is en speler A niet failliet kan gaan omdat hij/ zij als het kapitaal op is een Euro zal krijgen van een vriend zodat hij/ zij kan blijven spelen.
Dan geldt:

1. $p = q = 1/2 \Rightarrow$ de keten is nulrecurrent (en heeft dus geen stationaire verdeling).

2. $p > 1/2 \Rightarrow$ de keten is transiënt (en dus $X_n \to \infty$)

3. $p < 1/2 \Rightarrow$ de keten is positief recurrent en er bestaat een stationaire verdeling. (Het gevolg is dat speler A relatief vaak zijn kapitaal op nul heeft en de vriend telkens moet tussenkomen.)

Het laatste gevolg van stelling 1.13 toont wanneer een algemene Markovketen (niet noodzakelijk irreducibel) een stationaire verdeling heeft en wanneer deze uniek is.

Gevolg 1.4 *Zij $X_n, n \geq 0$ een Markovketen met toestandsruimte $\mathcal{S}$. Zij verder $\mathcal{S}_{R,+}$ de verzameling van de positief recurrente toestanden in $\mathcal{S}$. Dan geldt:*
(i) *$X_n, n \geq 0$ heeft een stationaire verdeling $\Longleftrightarrow \mathcal{S}_{R,+} \neq \emptyset$.*
(ii) *$X_n, n \geq 0$ heeft een unieke stationaire verdeling $\Longleftrightarrow \mathcal{S}_{R,+} \neq \emptyset$ en $\mathcal{S}_{R,+}$ is irreducibel.*

Bewijs (i) "$\Rightarrow$" Dit volgt direct uit lemma 1.9.
"$\Leftarrow$" Als $\mathcal{S}_{R,+} \neq \emptyset$, kunnen we een irreducibele gesloten deelverzameling C van $\mathcal{S}_{R,+}$ vinden. (Neem $x \in \mathcal{S}_{R,+}$ en stel $C = \{y \in \mathcal{S} : x \to y\}$. Zoals in het bewijs van stelling 1.6 volgt dat C irreducibel en gesloten is.)
Gezien C gesloten is, is $q = p(x,y)_{x,y \in C}$ een stochastische matrix en voor elke kansverdeling π' op C bestaat er een Markovketen $Y_n, n \geq 0$ met toestandsruimte $\mathcal{S} = C$, overgangsmatrix q en startverdeling π'. Als $q^n = q^{(n)}(x,y)_{x,y \in C}$ de n-de macht van q is, hebben we voor elke $n \geq 1$, $q^{(n)}(x,y) = p^{(n)}(x,y), x, y \in C$ en we kunnen concluderen dat $Y_n, n \geq 0$ irreducibel en positief recurrent is. Bijgevolg bestaat er een stationaire verdeling π voor $Y_n, n \geq 0$, namelijk $\pi'(x) = 1/m_x, x \in C$. Dan is

$$\pi(x) = \begin{cases} 1/m_x & \text{als } x \in C \\ 0 & \text{als } x \notin C \end{cases}$$

een stationaire verdeling voor p.

(ii) "$\Rightarrow$" We moeten nog tonen dat $\mathcal{S}_{R,+}$ irreducibel is. Was dit niet het geval, bestonden er (minstens) twee disjuncte gesloten en irreducibele deelverzamelingen C_1 en C_2 van $\mathcal{S}_{R,+}$. Stel dan $\pi_i = 1/m_x, x \in C_i$ en $\pi_i(x) = 0, x \notin C_i, i = 1, 2$. Zoals boven volgt, dat $\pi_i, i = 1, 2$ stationaire verdelingen zijn wat niet mogelijk is omdat we veronderstellen dat er een unieke stationaire verdeling is.

"$\Leftarrow$" Wegens lemma 1.9 geldt er voor de stationaire verdeling $\pi(x) = 0, x \notin \mathcal{S}_{R,+}$. Bijgevolg hebben we: $\pi(x) = \sum_{z \in \mathcal{S}} \pi(z) G_n(z,x)/n = \sum_{z \in \mathcal{S}_{R,+}} \pi(z) G_n(z,x)/n, n \geq 1$. Aangezien $G_n(z,x)/n \to 1/m_x, z, x \in \mathcal{S}_{R,+}$ (zie stelling 1.12(ii) en merk op dat $\rho_{zx} = 1$ omdat $\mathcal{S}_{R,+}$ irreducibel is), volgt via de stelling van de begrensde convergentie dat $\pi(x) = 1/m_x, x \in \mathcal{S}_{R,+}$. Dus is de stationaire verdeling uniek. □

1.7 Convergentie naar stationaire verdelingen

We gaan in dit laatste gedeelte van hoofdstuk 1 na wanneer we (gewone) convergentie van de overgangskansen $p^{(n)}(x,y)$ naar de stationaire kansen $\pi(y)$ hebben. Hier zal de periode van een toestand een belangrijke rol spelen.

Definitie 1.8 *Zij $X_n, n \geq 0$ een Markovketen met toestandsruimte $\mathcal{S}$. Als $x \in \mathcal{S}$ een toestand is zodanig dat $\rho_{xx} > 0$, stellen we*

$$d_x := \text{ggd}\{n \geq 1 : p^{(n)}(x,x) > 0\}$$

een we noemen d_x de **periode** *van x.*

Het volgende lemma toont onder meer dat alle toestanden van een irreducibele Markovketen dezelfde periode hebben.

Lemma 1.10 *Als $x, y \in \mathcal{S}$ toestanden zijn met $x \to y$ en $y \to x$, geldt $d_x = d_y$.*

Merk op dat $x \to y$ en $y \to x$ impliceert dat $\rho_{xx}, \rho_{yy} > 0$ en dus zijn d_x en d_y gedefinieerd.

Bewijs Kies $n_1, n_2 \geq 1$ zodanig dat $p^{(n_1)}(x,y), p^{(n_2)}(y,x) > 0$. (Deze bestaan wegens lemma 1.2.) Dan geldt natuurlijk $p^{(n_1+n_2)}(x,x) \geq p^{(n_1)}(x,y)p^{(n_2)}(y,x) > 0$ en $d_x \,|\, n_1 + n_2$, waar $m|n$ voor natuurlijke getallen m, n betekent dat m een deler van n is.
Als $p^{(m)}(y,y) > 0$ voor een $m \geq 1$, hebben we ook dat

$$p^{(n_1+n_2+m)}(x,x) \geq p^{(n_1)}(x,y)p^{(m)}(y,y)p^{(n_2)}(y,x) > 0,$$

en dus volgt er dat $d_x \,|\, n_1 + n_2 + m$. We weten ook dat $d_x \,|\, n_1 + n_2$ en bijgevolg hebben we dat $d_x \,|\, m$. Dus is d_x een gemene deler van $\{m \geq 1 : p^{(m)}(y,y) > 0\}$, hetgeen impliceert dat $d_x \leq d_y$. Wegens symmetrie geldt dan ook $d_y \leq d_x$, waarmee het lemma bewezen is. □

Definitie 1.9

(i) *Een toestand $x \in \mathcal{S}$ heet* **aperiodiek** *indien $d_x = 1$.*

(ii) *Een Markovketen met toestandsruimte $\mathcal{S}$ heet aperiodiek indien alle toestanden $x \in \mathcal{S}$ aperiodiek zijn.*

Voorbeeld Zij $X_n, n \geq 0$ een irreducibele geboorte- en sterfteketen.
Dan zijn er twee gevallen.
Geval 1: $\exists\, y \in \mathcal{S} : r_y = 1$ Dan is $d_y = 1$ en daarmee de Markovketen aperiodiek.
Geval 2: $\forall\, y \in \mathcal{S} : r_y = 0$. In dit geval is $d_x = 2, x \in \mathcal{S}$. Om dit in te zien, merken we op dat dan de Markovketen van even toestanden naar oneven toestanden gaat en vice versa, dus is zeker $d_x \geq 2, x \in \mathcal{S}$. We hebben $d_0 \leq 2$ omdat $p^{(2)}(0,0) = p_0 q_1 > 0$. Dus $d_0 = 2$ en wegens lemma 1.10 $d_x = 2, x \in \mathcal{S}$.

Definitie 1.10 *We zeggen dat een Markovketen $X_n, n \geq 0$* **ergodisch** *is indien deze irreducibel, positief recurrent en aperiodiek is.*

De volgende stelling toont dat de overgangskansen van een ergodische Markovketen naar de stationaire kansen convergeren. Merk op dat er een unieke stationaire verdeling bestaat omdat ergodische ketens positief recurrent zijn.

Stelling 1.15 (Convergentiestelling voor ergodische Markovketens)
Zij $X_n, n \geq 0$ een ergodische Markovketen met toestandsruimte $\mathcal{S}$ en stationaire verdeling $\pi(x), x \in \mathcal{S}$. Dan geldt:

$$p^{(n)}(x,y) \to \pi(y) = \frac{1}{m_y}, \forall x, y \in \mathcal{S}.$$

Om deze stelling te bewijzen hebben we een lemma uit de getallentheorie nodig.

Lemma 1.11 *Zij $I \neq \varnothing$ een deelverzameling van $\{1,2,\ldots\}$.*
Veronderstel dat (i) ggd(I)=1 en (ii) $n, m \in I \Rightarrow n + m \in I$.
Dan bestaat er een $n_0 \geq 1$ zodanig dat $I \supset \{n_0, n_0 + 1, \ldots\}$.

Bewijs Stel $I' = I \cup \{0\}$ en $J = \{m - m' : m, m' \in I'\} \subset \mathbb{Z}$. Dan geldt natuurlijk $J \supset I$ en J is een (additieve) deelgroep van $\mathbb{Z}$. Dit impliceert dat er een $d \geq 1$ bestaat zodanig dat $J = d\mathbb{Z}$. Gezien $I \subset J$ geldt $d|m, m \in I$. De grootste gemene deler van I is 1, dus hebben we $d = 1$ en $J = \mathbb{Z}$. Dit impliceert natuurlijk dat $1 \in J$ en bijgevolg hebben we $1 = m - m'$, waar $m, m' \in I$. Stel $n_0 = (m + m')^2$. Als $\boxed{n \geq n_0}$ bestaan er gehele getallen $q \geq 1$ en $0 \leq r < m + m'$ zodanig dat

$$n = q(m + m') + r = q(m + m') + r(m - m') = (q + r)m + (q - r)m'.$$

Als we kunnen tonen dat $q - r > 0$, volgt $n \in I$ wegens eigenschap (ii) van I.
Dit volgt omdat

$$r(m + m') + r = r(m + m' + 1) \leq (m + m' - 1)(m + m' + 1) = n_0 - 1,$$

hetgeen toont dat $q > r$. Daarmee is het lemma bewezen. □

Bewijs van stelling 1.15
Stap 1 Neem twee toestanden $x, y \in \mathcal{S}$. We beweren dat er een $n_0 = n_0(x,y) \geq 1$ bestaat met

$$p^{(n)}(x,y) > 0, n \geq n_0. \tag{1.19}$$

Om dit te bewijzen nemen we een willekeurige toestand $a \in \mathcal{S}$ en stellen

$$I = \{n \geq 1 : p^{(n)}(a,a) > 0\}.$$

Dan is aan de voorwaarden van lemma 1.11 voldaan en we kunnen concluderen dat er een $n_1 \geq 1$ bestaat zodanig dat $p^{(n)}(a,a) > 0, n \geq n_1$. Kies verder $n_2, n_3 \geq 1$ waarvoor $p^{(n_2)}(x,a) > 0$ en $p^{(n_3)}(a,y) > 0$. Dan geldt voor $n \geq n_1$,

$$p^{(n+n_2+n_3)}(x,y) \geq p^{(n_2)}(x,a)p^{(n)}(a,a)p^{(n_3)}(a,x) > 0$$

en dus volgt (1.19) met $n_0 = n_1 + n_2 + n_3$.

Stap 2 Zij $(Y_n, Z_n), n \geq 0$ een Markovketen met toestandsruimte $\mathcal{S}^2$ en overgangsmatrix

$$\overline{p}((y_1,z_1),(y_2,z_2)) = p(y_1,y_2)p(z_1,z_2), (y_1,z_1),(y_2,z_2) \in \mathcal{S}^2.$$

Dit is een stochastische matrix omdat

$$\sum_{(y_2,z_2)\in\mathcal{S}^2} \overline{p}((y_1,z_1),(y_2,z_2)) = \sum_{y_2\in\mathcal{S}} p(y_1,y_2) \sum_{z_2\in\mathcal{S}} p(z_1,z_2) = 1.$$

Stelling 1.3 impliceert dan dat zo'n Markovketen bestaat.

Verder zijn $Y_n, n \geq 0$ en $Z_n, n \geq 0$ Markovketens met toestandsruimte $\mathcal{S}$ en overgangsmatrix p. Om dit in te zien redeneren we zoals volgt:
Kies $y_0, \dots, y_n, z_0, \dots, z_n \in \mathcal{S}$ met $\mathbb{P}((Y_{n-1}, Z_{n-1}) = (y_{n-1}, z_{n-1}), \dots, (Y_0, Z_0) = (y_0, z_0)) > 0$. Dan geldt wegens de Markoveigenschap van de keten $(Y_n, Z_n), n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(Y_n = y_n | (Y_{n-1}, Z_{n-1}) = (y_{n-1}, z_{n-1}), \dots, (Y_0, Z_0) = (y_0, z_0)) \\
= & \sum_{z_n \in \mathcal{S}} \mathbb{P}((Y_n, Z_n) = (y_n, z_n) | (Y_{n-1}, Z_{n-1}) = (y_{n-1}, z_{n-1}), \dots, (Y_0, Z_0) = (y_0, z_0)) \\
= & \sum_{z_n \in \mathcal{S}} \mathbb{P}((Y_n, Z_n) = (y_n, z_n) | (Y_{n-1}, Z_{n-1}) = (y_{n-1}, z_{n-1})) \\
= & \; p(y_{n-1}, y_n) \sum_{z_n \in \mathcal{S}} p(z_{n-1}, z_n) = p(y_{n-1}, y_n).
\end{aligned}$$

Lemma 1.1 impliceert dan dat

$$\mathbb{P}(Y_n = y_n | Y_{n-1} = y_{n-1}, \dots, Y_0 = y_0) = p(y_{n-1}, y_n),$$

hetgeen toont dat $Y_n, n \geq 0$ inderdaad een Markovketen met overgangsmatrix p is.
Het bewijs voor $Z_n, n \geq 0$ is analoog.

Stap 3 De Markovketen $(Y_n, Z_n), n \geq 0$ is irreducibel. Dit volgt uit (1.19). Neem twee toestanden (y_1, z_1) en (y_2, z_2) in $\mathcal{S}^2$. Dan bestaat er een $\tilde{n} \geq 1$ zodanig dat

$$p^{(n)}(y_1, y_2), p^{(n)}(z_1, z_2) > 0, \forall\, n \geq \tilde{n}.$$

Aangezien $\overline{p}^{(n)}((y_1, z_1), (y_2, z_2)) = p^{(n)}(y_1, y_2) p^{(n)}(z_1, z_2), n \geq 1$ (wat via inductie uit de definitie van $\overline{p}$ volgt), hebben we dat

$$\overline{p}^{(n)}((y_1, z_1), (y_2, z_2)) > 0, n \geq \tilde{n}$$

en bijgevolg $(y_1, z_1) \to (y_2, z_2)$.

Stap 4 De Markovketen $(Y_n, Z_n), n \geq 0$ is positief recurrent. Om dit aan te tonen is het voldoende te tonen dat er een stationaire verdeling voor $\overline{p}$ op $\mathcal{S}^2$ bestaat. Als π de stationaire verdeling voor p is, stellen we $\overline{\pi}(y, z) = \pi(y)\pi(z)$ en door narekenen volgt onmiddellijk dat

$$\sum_{(y_1, z_1) \in \mathcal{S}^2} \overline{\pi}(y_1, z_1) \overline{p}((y_1, z_1), (y_2, z_2)) = \overline{\pi}(y_2, z_2), \forall (y_2, z_2) \in \mathcal{S}^2.$$

Stap 5 Zij $a \in \mathcal{S}$ en stel $T = T_{(a,a)} = \inf\{n \geq 1 : (Y_n, Z_n) = (a, a)\}$. Dan is $T < \infty$, $\mathbb{P}$-b.o. (omdat de keten $(Y_n, Z_n), n \geq 0$ irreducibel en recurrent is). Verder geldt:

$$\mathbb{P}\{Y_n = y, T \leq n\} = \mathbb{P}\{Z_n = y, T \leq n\}, y \in \mathcal{S} \tag{1.20}$$

Om dit te tonen, berekenen we eerst de voorwaardelijke kansen $\mathbb{P}(Y_n = y | T = m)$ als $1 \leq m < n$. Uit de definitie van T volgt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_n = y | T = m) &= \sum_{z \in \mathcal{S}} \mathbb{P}(\{(Y_n, Z_n) = (y, z) | (Y_m, Z_m) = (a, a), (Y_j, Z_j) \neq (a, a), 1 \leq j < m\}) \\
&= \sum_{z \in \mathcal{S}} \overline{p}^{(n-m)}((a, a), (y, z)) = p^{(n-m)}(a, y) \sum_{z \in \mathcal{S}} p^{(n-m)}(a, z) = p^{(n-m)}(a, y).
\end{aligned}$$

Dit klopt ook als $n = m$ (omdat $p^{(0)}(a, y) = 1$ als $a = y$ en $= 0$ als $a \neq x$.)
Analoog volgt er dat $\mathbb{P}(Z_n = y | T = m) = p^{(n-m)}(a, y), y \in \mathcal{S}, 1 \leq m \leq n$.

Het is nu evident dat

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{Y_n = y, T \le n\} &= \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}(Y_n = y | T = m)\mathbb{P}\{T = m\} \\ &= \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}(Z_n = y | T = m)\mathbb{P}\{T = m\} = \mathbb{P}\{Z_n = y, T \le n\},\end{aligned}$$

waarmee (1.20) bewezen is.

Stap 6 Zij $y \in \mathcal{S}$. Dan geldt er wegens (1.20),

$$\begin{aligned}|\mathbb{P}\{Y_n = y\} - \mathbb{P}\{Z_n = y\}| &= |\mathbb{P}\{Y_n = y, T > n\} - \mathbb{P}\{Z_n = y, T > n\}| \\ &= \left|\mathbb{E}\left[(I_{\{Y_n=y\}} - I_{\{Z_n=y\}})I_{\{T>n\}}\right]\right| \\ &\le \mathbb{E}\left[|I_{\{Y_n=y\}} - I_{\{Z_n=y\}}|I_{\{T>n\}}\right] \le \mathbb{P}\{T > n\}.\end{aligned}$$

Aangezien deze bovengrens onafhankelijk van $y \in \mathcal{S}$ is, kunnen we concluderen dat

$$\sup_{y\in\mathcal{S}} |\mathbb{P}\{Y_n = y\} - \mathbb{P}\{Z_n = y\}| \le \mathbb{P}\{T > n\} \tag{1.21}$$

We weten dat $\mathbb{P}\{T < \infty\} = 1$ en dus hebben we $\mathbb{P}\{T > n\} \to 0$ als $n \to \infty$.
Kiezen we de startverdeling $\mathbb{P}_{(Y_0,Z_0)}(y,z) = I_{\{x\}}(y)\pi(z), (y,z) \in \mathcal{S}^2$ waar $\pi(z), z \in \mathcal{S}$ de stationaire verdeling voor de ergodische Markovketen $X_n, n \ge 0$ is, hebben we (zie stap 2):

$$\mathbb{P}\{Y_n = y\} = p^{(n)}(x,y) \text{ en } \mathbb{P}\{Z_n = y\} = \pi(y), y \in \mathcal{S}.$$

De conclusie is dan dat voor $x \in \mathcal{S}$ geldt:

$$\sup_{y\in\mathcal{S}} \left|p^{(n)}(x,y) - \pi(y)\right| \to 0 \text{ als } n \to \infty,$$

waarmee de stelling bewezen is. □

We bekijken nu irreducibele, recurrente Markovketens met periode $d > 1$.

Lemma 1.12 *Zij $X_n, n \ge 0$ een irreducibele, recurrente Markovketen waar één toestand (en dus elke toestand) periode $d > 1$ heeft. Gegeven $x \in \mathcal{S}$, stel*

$$K_y := \{n \ge 1 : p^{(n)}(x,y) > 0\}, y \in \mathcal{S}.$$

Dan geldt:

(i) $\exists r_y \in \{0,\dots,d-1\} : \forall n \in K_y : n \equiv r_y \bmod d$

(ii) *Stel* $\mathcal{S}_r := \{y \in \mathcal{S} : r_y = r\}, 0 \le r \le d-1$. *Dan geldt:*

$$y \in \mathcal{S}_i, z \in \mathcal{S}_j, p^{(n)}(y,z) > 0 \Rightarrow n \equiv j - i \bmod d.$$

(iii) $\mathcal{S}_0,\dots,\mathcal{S}_{d-1}$ *zijn gesloten en irreducibel voor de Markovketen* $X_{nd}, n \ge 0$.

Bewijs (i) Aangezien $y \to x$ (de Markovketen $X_n, n \ge 0$ is irreducibel), bestaat er een $m_y \ge 1$ zodanig dat $p^{(m_y)}(y,x) > 0$. Als $n \in K_y$ geldt er $p^{(n)}(x,y) > 0$ en dus ook

$$p^{(n+m_y)}(x,x) \ge p^{(n)}(x,y)p^{(m_y)}(y,x) > 0.$$

De toestand x heeft periode d en bijgevolg geldt er $d | n + m_y$ of $n \equiv -m_y$ mod d. Als r_y het unieke getal in$\{0,\dots,d-1\}$ is zodanig dat $-m_y \equiv r_y$ mod d, hebben we $n \equiv r_y$ mod d.

(ii) Kies een $m \geq 1$ zodanig dat $p^{(m)}(x,y) > 0$. Dan geldt natuurlijk

$$p^{(n+m)}(x,z) \geq p^{(m)}(x,y)p^{(n)}(y,z) > 0,$$

hetgeen wegens definitie van $\mathcal{S}_j$ impliceert dat $n+m \equiv j \mod d$. Aangezien $y \in \mathcal{S}_i$ hebben we $m \equiv i \mod d$ en dus $n = (n+m) - m \equiv j - i \mod d$.

(iii) Via stelling 1.2 volgt dat $X_{nd}, n \geq 0$ een Markovketen is met overgangsmatrix $q = p^d$ (als p de overgangsmatrix voor de Markovketen $X_n, n \geq 0$ is). Verder zijn de klassen $\mathcal{S}_i$ gesloten omdat we wegens (ii) hebben $p^{(d)}(x,y) = 0, x \in \mathcal{S}_i, y \notin \mathcal{S}_i$. Als x_1 en x_2 toestanden in $\mathcal{S}_i$ zijn, hebben we $x_1 \to x_2$ omdat de Markovketen $X_n, n \geq 0$ irreducibel is. Dus bestaat er een $m \geq 1$ zodanig dat $p^{(m)}(x_1,x_2) > 0$. Wegens (ii) moet m van de gedaante kd zijn, waar $k \geq 1$. Dus hebben we $q^{(k)}(x_1,x_2) = p^{(kd)}(x_1,x_2) > 0$ en we zien dat ook $x_1 \to x_2$ geldt voor de Markovketen $X_{nd}, n \geq 0$. Dus is de klasse $\mathcal{S}_i$ irreducibel voor deze Markovketen. □

Opmerking $\mathcal{S}_0, \dots, \mathcal{S}_{d-1}$ heet de **cyclische ontbinding** van $\mathcal{S}$. De Markovketen gaat altijd van $\mathcal{S}_i$ naar $\mathcal{S}_{i+1}$ als $0 \leq i < d-1$ en van $\mathcal{S}_{d-1}$ weer terug naar $\mathcal{S}_0$. Dus er is een cyclus van lengte d waar de d klassen in deze volgorde worden doorlopen. Deze ontbinding is uniek omdat de $\mathcal{S}_i$ de irreducibele en gesloten klassen recurrente toestanden zijn voor de Markovketen $X_{nd}, n \geq 0$.

Stelling 1.16 (Convergentiestelling: het periodieke geval)
Zij $X_n, n \geq 0$ een irreducibele Markovketen met stationaire verdeling π. Veronderstel dat $d_x = d > 1, x \in \mathcal{S}$ en zij $\mathcal{S}_0, \dots, \mathcal{S}_{d-1}$ de cyclische ontbinding van $\mathcal{S}$. Dan geldt voor $0 \leq i, j < d$,

$$\forall x \in \mathcal{S}_i, y \in \mathcal{S}_j : \lim_{m\to\infty} p^{(md+r)}(x,y) = d\pi(y),$$

waarbij $r \in \{0, \dots, d-1\}$ zo te kiezen is dat $j - i \equiv r$ mod d.

Bewijs *Stap 1* ($i = j$) De restrictie van de Markovketen $X_{nd}, n \geq 0$ tot $\mathcal{S}_i$ is irreducibel (omdat $\mathcal{S}_i$ gesloten en irreducibel is voor deze Markovketen). Verder hebben alle toestanden dan periode 1 en ze zijn ook positief recurrent (omdat $E_x[T_x] < \infty$, als T_x de terugkeertijden voor de Markovketen $X_n, n \geq 0$ zijn hetgeen natuurlijk impliceert dat ook de terugkeertijden $T'_x = T_x/d$ voor de Markovketen $X_{nd}, n \geq 0$ eindige verwachtingswaarden hebben).
De conclusie is dat we een ergodische Markovketen hebben met toestandsruimte $\mathcal{S}_i$ en overgangsmatrix $p^{(d)}(x,y)_{x,y\in\mathcal{S}_i}$. Stelling 1.15 impliceert dan dat

$$\lim_{n\to\infty} p^{(nd)}(x,y) = \pi'(y), x, y \in \mathcal{S}_i \tag{1.22}$$

waar π' de stationaire verdeling voor $p^{(d)}(x,y)_{x,y\in\mathcal{S}_i}$ is.
Uit stelling 1.12(ii) volgt dat als $n \to \infty$,

$$\frac{1}{nd}\sum_{j=1}^{nd} p^{(j)}(x,y) \to \pi(y), x, y \in \mathcal{S} \tag{1.23}$$

Als $x, y \in \mathcal{S}_i$ geldt wegens lemma 1.12: $p^{(j)}(x,y) = 0, j \notin \{d, \dots, nd\}$. Dus hebben we in dit geval als $n \to \infty$,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p^{(id)}(x,y) \to d\pi(y) \tag{1.24}$$

en het is nu evident dat $\pi'(y) = d\pi(y), y \in \mathcal{S}_i$.

Stap 2 ($i \neq j$) Neem twee toestanden $x \in \mathcal{S}_i, y \in \mathcal{S}_j$ en zij $r \in \{0, \ldots, d-1\}$ zo gekozen dat geldt $j - i \equiv r \bmod d$. Dan hebben we natuurlijk,

$$p^{(nd+r)}(x,y) = \sum_{z \in \mathcal{S}} p^{(r)}(x,z)p^{(nd)}(z,y) = \sum_{z \in \mathcal{S}_j} p^{(r)}(x,z)p^{(nd)}(z,y),$$

omdat $p^{(r)}(x,z) = 0, z \notin \mathcal{S}_j$ (zie lemma 1.12).
Uit stap 1 volgt dat $p^{(nd)}(z,y) \to d\pi(y), z \in \mathcal{S}_j$.
Aangezien $p^{(r)}(x,y)_{x,y \in \mathcal{S}}$ een stochastische matrix is, hebben we ook

$$\sum_{z \in \mathcal{S}} p^{(r)}(x,z) = \sum_{z \in \mathcal{S}_j} p^{(r)}(x,z) = 1$$

Zij $Q : 2^{\mathcal{S}_j} \to [0,1]$ de discrete kansmaat die bepaald is door $Q(\{z\}) = p^{(r)}(x,z), z \in \mathcal{S}_j$ en stel $f_n(z) = p^{(nd)}(z,y), z \in \mathcal{S}_j$. ($x$ en y zijn vast.)
Dan kunnen we via de stelling van de begrensde convergentie concluderen dat als $n \to \infty$,

$$p^{(nd+r)}(x,y) = \sum_{z \in \mathcal{S}_j} f_n(z)Q(\{z\}) = E_Q[f_n] \to d\pi(y),$$

waarmee de stelling bewezen is. □

Voorbeeld We bekijken de Ehrenfestketen met $m = 3$. Dan is de overgangsmatrix gelijk aan

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

en de stationaire verdeling π is gelijk aan $(1/8, 3/8, 3/8, 1/8)$. Verder is $d = 2$ (omdat dit een geboorte- en sterfteketen is met $r_x = 0, 0 \leq x \leq 3$). Als we $x = 0$ stellen in lemma 1.12 verkrijgen we $\mathcal{S}_0 = \{0,2\}, \mathcal{S}_1 = \{1,3\}$.
We kunnen concluderen dat als n groot is, we hebben

$$p^{2n} \approx \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad p^{2n+1} \approx \begin{bmatrix} 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \end{bmatrix}$$

Referenties

Billingsley, P. (1995) *Probability and measure*, 3rd edition. (→ Hoofdstuk 8)
Hoel, P.; Port, S. and Stone, C. (1971) *Introduction to stochastic processes* (→ Hoofdstukken 1 en 2)

Hoofdstuk 2

Vernieuwingsprocessen

2.1 Definitie en elementaire eigenschappen

Zij $X_n, n \geq 1$ een rij onafhankelijke, identiek verdeelde toevalsvariabelen met verdelingsfunctie $F(x) = \mathbb{P}\{X_1 \leq x\}, x \in \mathbb{R}$. Veronderstel dat deze toevalsvariabelen *positief* zijn. Dan hebben we $F(x) = 0, x \leq 0$ en $\mu = \mathbb{E}X_1$ bestaat in $]0, \infty]$.
Stel $S_0 = 0$ en $S_n = \sum_{k=1}^n X_k, n \geq 1$. Dan is $S_n, n \geq 0$ monotoon stijgend en de sterke wet van de grote getallen impliceert dat $S_n \nearrow \infty$.
We kunnen dan een stochastisch proces $N(t), t \geq 0$ met continue tijdparameter en discrete toestandsruimte op de volgende manier definiëren:

Definitie 2.1 *Zij $X_n, n \geq 0$ zoals boven. Stel $N(t) := \max\{n \geq 0 : S_n \leq t\}, t \geq 0$. We noemen dit proces het* **vernieuwingsproces** *op de basis van $S_n = \sum_{j=1}^n X_j, n \geq 1$.*

Merk op dat wegens $S_n \nearrow \infty$ de verzamelingen $\{n : S_n(\omega) \leq t\}$ eindig zijn, bijna overal, en dus het maximum in de definitie bestaat (en is eindig).

Interpretatie Beschouw een machine waar we een bepaald onderdeel regelmatig moeten vervangen. Als X_1 gelijk is aan de leeftijd van het eerste (originele) onderdeel, X_2 van het tweede onderdeel enzovoort, dan is S_n het moment waarop we het n-de onderdeel moeten vervangen en $N(t)$ is gelijk aan het totale aantal vervangingen tijdens het tijdsinterval $[0, t]$.

Voorbeeld. Veronderstel dat F de exponentiële verdeling met verwachtingswaarde λ^{-1} is, dwz $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x), x \geq 0$. Dan kan men tonen (oef.) dat $N(t), t \geq 0$ een Poissonproces met parameter λ is. In het bijzonder geldt er:

$$\mathbb{E}[N(t)] = \mathrm{Var}(N(t)) = \lambda t,\ t \geq 0.$$

Het volgende lemma zal zeer nuttig zijn voor wat volgt.

Lemma 2.1

(i) $\{N(t) \geq k\} = \{S_k \leq t\}$, $t \geq 0$, $k = 0, 1, \ldots$

(ii) $\mathbb{P}\{N(t) = k\} = F_k(t) - F_{k+1}(t)$, $t \geq 0$, $k = 0, 1, \ldots,$
waar $F_k(t) = \mathbb{P}\{S_k \leq t\}, t \geq 0$. *(In het bijzonder: $F_0(t) = 1, t \geq 0$ en $F_1 = F$.)*

Bewijs. (i) We tonen dat

$$N(t) \geq k \Leftrightarrow S_k \leq t \tag{2.1}$$

$\boxed{\text{“}\Rightarrow\text{”}}$ Uit de definitie van $N(t)$ volgt onmiddellijk dat $S_{N(t)} \leq t, t \geq 0$. Wegens de monotonie van $S_n, n \geq 0$ hebben we dan $S_k \leq S_{N(t)} \leq t$ als $N(t) \geq k$.

$\boxed{\text{“}\Leftarrow\text{”}}$ Als $S_k \leq t$ hebben we $k \in \{n : S_n \leq t\}$ en dus $k \leq N(t)$.

(ii) Wegens (i) geldt:

$$\mathbb{P}\{N(t) = k\} = \mathbb{P}\{N(t) \geq k\} - \mathbb{P}\{N(t) \geq k+1\} = \mathbb{P}\{S_k \leq t\} - \mathbb{P}\{S_{k+1} \leq t\},$$

waarmee ook deel (ii) bewezen is. □

Gevolg 2.1

$$m(t) := \mathbb{E}N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t).$$

Bewijs. We gebruiken het feit dat als Z een toevalsvariabele met waarden $0, 1, 2, \ldots$ is, dat dan geldt: $\mathbb{E}Z = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\{Z \geq k\}$. Dus: $\mathbb{E}N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\{N(t) \geq k\} = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t)$. □

Opmerking We noemen $m(t)$ de door de verdelingsfunctie F bepaalde *vernieuwingsfunctie*. De volgende stelling toont dat $m(t)$ altijd eindig is.

Stelling 2.1 *We hebben voor elke* $t \geq 0 : m(t) < \infty$.

Bewijs Stel voor $j \geq 1$,

$$\bar{X}_j = \begin{cases} 0 & \text{als } X_j \leq \epsilon \\ \epsilon & \text{als } X_j > \epsilon \end{cases}$$

zodat $\bar{X}_j \leq X_j, j \geq 1$. Bijgevolg hebben we voor het vernieuwingsproces $\tilde{N}(t)$ op basis van de toevalsvariabelen $\bar{X}_j$ (dwz $\tilde{N}(t) = \max\{n : \sum_{j=1}^{n} \bar{X}_j \leq t\}$)

$$N(t) \leq \tilde{N}(t).$$

Kies $\epsilon > 0$ klein genoeg zodat $\mathbb{P}\{X_1 > \epsilon\} =: \delta \geq 1/2$.
(Zo'n ϵ bestaat omdat $\mathbb{P}\{X_1 > \epsilon\} \to \mathbb{P}\{X_1 > 0\} = 1$ als $\epsilon \to 0$.)
Uit de definitie van $\bar{X}_j$ volgt onmiddellijk dat

$$\tilde{N}(t) = \max\left\{n : \sum_{j=1}^{n} I_{\{X_j > \epsilon\}} \leq t/\epsilon\right\} = \max\left\{n : \sum_{j=1}^{n} I_{\{X_j > \epsilon\}} \leq [t/\epsilon]\right\},$$

waar $[x]$ het gehele gedeelte van $x \in \mathbb{R}$ is. Stel $N_{\epsilon,t} = \tilde{N}(t) + 1$. Dan is dit een negatief-binomiaal-verdeelde toevalsvariabele met parameters $r = [t/\epsilon] + 1$ en $p = \delta$.
Bijgevolg geldt er:

$$\mathbb{E}\tilde{N}(t) \leq \mathbb{E}N_{\epsilon,t} = ([t/\epsilon] + 1)/\delta < \infty,$$

waarmee de stelling bewezen is. □

2.2 Limietstellingen

We bewijzen eerst de volgende stelling.

Stelling 2.2

(i) Als $t \to \infty$ hebben we: $N(t)/t \to 1/\mu$ bijna overal , waarbij $\mu = \mathbb{E}X_1$ en $1/\infty = 0$.

(ii) Er geldt: $m(t)/t \to 1/\mu$ als $t \to \infty$.

Het bewijs van deel (i) is gebaseerd op de sterke wet van de grote getallen. Men zou kunnen denken dat dan (ii) onmiddellijk volgt omdat $m(t)/t = \mathbb{E}N(t)/t$, maar $N(t)/t, t \geq 0$ is onbegrensd en dus kunnen we niet de stelling van de begrensde convergentie toepassen. Vandaar dat we om deel (ii) te bewijzen een verdere stelling nodig hebben - de stelling van Wald. Deel (ii) noemt men in de literatuur vaak de "elementaire" vernieuwingsstelling.

Bewijs van stelling 2.2(i) Merk op dat $N(S_n) = n, n \geq 1$, hetgeen impliceert $N(t) \to \infty$ als $t \to \infty$, bijna overal. De sterke wet van de grote getallen impliceert dat $S_n/n \to \mu$ bijna overal en dus geldt er ook

$$S_{N(t)}/N(t) \to \mu \text{ bijna overal als } t \to \infty.$$

Analoog volgt: $S_{N(t)+1}/(N(t)+1) \to \mu$ bijna overal als $t \to \infty$.
Uit de definitie van $N(t)$ volgt: $S_{N(t)} \leq t < S_{N(t)+1}$ en dus hebben we

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} \leq \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1}\frac{N(t)+1}{N(t)},$$

waar de twee termen links en rechts bijna overal naar μ convergeren en dus ook $t/N(t)$. Dit impliceert natuurlijk dat $N(t)/t \to 1/\mu$ bijna overal als $t \to \infty$. □

We herinneren dat als $Y_i, i \in I$ een collectie toevalsvariabelen is (dus deze zijn allemaal $\mathcal{F}$-meetbaar) er een kleinste deel-σ-algebra van $\mathcal{F}$ bestaat waarvoor deze toevalsvariabelen meetbaar zijn. We duiden deze aan door $\sigma\{Y_i : i \in I\}$. Als $I = \{i_1, \ldots, i_n\}$ eindig, geldt er

$$\sigma\{Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_n}\} = \{(Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_n})^{-1}(B), B \in \mathcal{R}^n\}.$$

Stelling 2.3 (Wald) *Zij $\{X_n : n \geq 1\}$ een rij onafhankelijke identiek verdeelde toevalsvariabelen. Stel $S_n = \sum_{i=1}^n X_i, n \geq 1$. Zij $T : \Omega \to \{1, 2, 3, \ldots\}$ een $\sigma\{X_1, \ldots, X_n\}$-stoptijd, dwz*

$$\{T \leq n\} \in \sigma\{X_1, \ldots, X_n\}, n = 1, 2, \ldots$$

Als $\mathbb{E}|X_1| < \infty$ en $\mathbb{E}T < \infty$, geldt er: $\mathbb{E}S_T = \mathbb{E}X_1\mathbb{E}T$.

Bewijs We hebben natuurlijk:

$$S_T = \sum_{j=1}^{T} X_j^+ - \sum_{j=1}^{T} X_j^- =: Z_1 - Z_2,$$

waar $X_j^+ = X_j I_{\{X_j>0\}}$ en $X_j^- = -X_j I_{\{X_j<0\}}, j \geq 1$.
We herschrijven de toevalsvariabele Z_1 als $\sum_{j=1}^\infty X_j^+ I_{\{T\geq j\}}$ en via de stelling van de monotone convergentie in verband met de lineariteit van de verwachtingswaarde volgt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}Z_1 &= \sum_{j=1}^\infty \mathbb{E}[X_j^+ I_{\{T\geq j\}}] \\ &= \sum_{j=1}^\infty \mathbb{E}[X_j^+]\mathbb{E}[I_{\{T\geq j\}}] = \mathbb{E}X_1^+ \sum_{j=1}^\infty \mathbb{P}\{T \geq j\} = \mathbb{E}X_1^+\mathbb{E}T.\end{aligned}$$

Hier hebben we gebruikt dat $\{T \geq 1\} = \Omega$ en dat X_j^+ en $I_{\{T\geq j\}}$ onafhankelijk zijn als $j \geq 2$. (Dit volgt wegens $\{T \geq j\} = \{T \leq j-1\}^c \in \sigma\{X_1, \ldots, X_{j-1}\}, j \geq 2$ en de onafhankelijkheid van de toevalsvariabelen $X_n, n \geq 1$.)
Analoog zien we dat $\mathbb{E}Z_2 = \mathbb{E}X_1^-\mathbb{E}T$ en dus geldt er:

$$\mathbb{E}S_T = \mathbb{E}Z_1 - \mathbb{E}Z_2 = (\mathbb{E}X_1^+ - \mathbb{E}X_1^-)\mathbb{E}T = \mathbb{E}X_1\mathbb{E}T.$$

Daarmee is de stelling bewezen. □

Bewijs van stelling 2.2(ii)
(STAP 1) We tonen eerst dat $N_0(t) = N(t) + 1$ een $\sigma\{X_1, \ldots, X_n\}$-stoptijd is. Dit is evident omdat

$$\{N_0(t) \leq n\} = \{N(t) \leq n-1\} = \{S_n > t\} \in \sigma\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

(STAP 2) We hebben dat $t \leq S_{N(t)+1}$ en dus ook $t \leq \mathbb{E}S_{N(t)+1}$. Als $\mu = \mathbb{E}X_1 < \infty$ kunnen we via Walds stelling concluderen dat

$$t \leq \mu\mathbb{E}N_0(t) = \mu(m(t)+1), t \geq 0,$$

hetgeen impliceert dat

$$\liminf_{t\to\infty} m(t)/t \geq 1/\mu. \tag{2.2}$$

Deze laatste ongelijkheid klopt natuurlijk ook als $\mu = \infty$.
(STAP 3) Stel $\bar{X}_i = X_i \wedge M, i \geq 1$. ($M > 0$ is vast) en zij $\bar{N}(t)$ het vernieuwingsproces gebaseerd op deze toevalsvariabelen, dus

$$\bar{N}(t) = \max\{n : \sum_{i=1}^n \bar{X}_i \leq t\}.$$

Dan hebben we $N(t) \leq \bar{N}(t)$ en verder geldt er

$$\sum_{i=1}^{\bar{N}(t)+1} \bar{X}_i = \sum_{i=1}^{\bar{N}(t)} \bar{X}_i + \bar{X}_{\bar{N}(t)+1} \leq t + M.$$

Als we een tweede keer de stelling van Wald toepassen, zien we dat

$$t + M \geq \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\bar{N}(t)+1} \bar{X}_i\right] = \mathbb{E}[\bar{N}(t)+1]\mu_M \geq (m(t)+1)\mu_M,$$

waar $\mu_M = \mathbb{E}[X_1 \wedge M]$.
Het is nu evident dat

$$\limsup_{t\to\infty} m(t)/t \le 1/\mu_M. \tag{2.3}$$

De stelling van de monotone convergentie impliceert dat $\mu_M \to \mu$ als $M \to \infty$ en gezien ongelijkheid (2.3) geldig is voor elke $M > 0$ kunnen we concluderen dat

$$\limsup_{t\to\infty} m(t)/t \le 1/\mu, \tag{2.4}$$

hetgeen in verband met (2.2) deel (ii) van stelling 2.2 impliceert. □

Het bewijs van de volgende stelling is meer ingewikkeld en we verwijzen daarvoor naar boeken over gevorderde kanstheorie.
We zeggen dat een toevalsvariabele $X : \Omega \to \mathbb{R}$ een *tralieverdeling* heeft indien er voor een $d > 0$ geldt: $\mathbb{P}\{X \in d\mathbb{Z}\} = 1$.

Stelling 2.4 (Blackwell)
Als X_1 geen tralieverdeling heeft, geldt voor de door de verdeling van X_1 bepaalde vernieuwingsfunctie $m(t)$,

$$m(t+h) - m(t) \to h/\mu \text{ als } t \to \infty\ (\forall h > 0). \tag{2.5}$$

We zullen in het vervolg zien dat de stelling van Blackwell cruciaal is voor de meeste toepassingen van de vernieuwingstheorie.

We tonen eerst nog dat de stelling van Blackwell stelling 2.2(ii) impliceert. (Deze stelling - de elementaire vernieuwingsstelling- is echter niet totaal overbodig omdat deze ook geldig is als X_1 een tralieverdeling heeft.)
Dus, veronderstel dat (2.5) van toepassing is. We beweren dat dit voor elke rij $t_n \to \infty$ impliceert:

$$m(t_n)/t_n \to 1/\mu \text{ als } n \to \infty \tag{2.6}$$

Om (2.6) te bewijzen, noteren we eerst dat als we $h = 1$ kiezen, (2.5) impliceert, $m(n) - m(n-1) \to 1/\mu$ als $n \to \infty$ en bijgevolg hebben we (wegens $m(0) = 0$),

$$\frac{1}{n} m(n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (m(j) - m(j-1)) \to 1/\mu. \tag{2.7}$$

Stel $[t_n]$ gelijk aan het gehele gedeelte van t_n. Dan hebben we,

$$m(t_n)/t_n = m([t_n])/t_n + (m(t_n) - m([t_n]))/t_n =: a_{n,1} + a_{n,2},$$

waar $a_{n,1} \to 1/\mu$ wegens (2.7) en $[t_n]/t_n \to 1$.
Bovendien impliceert de stelling van Blackwell dat

$$m(t_n) - m([t_n]) \le m([t_n]+1) - m([t_n]) \to 1/\mu < \infty.$$

Aangezien $t_n \to \infty$ volgt er dat $a_{n,2} \to 0$ en (2.6) is bewezen.

2.3 De vernieuwingsvergelijking

We bekijken nog een keer de definitie van de de vernieuwingsfunctie $m(t) = \mathbb{E}N(t)$. We conditioneren op X_1 en we verkrijgen dat $m(t) = \mathbb{E}[\mathbb{E}[N(t)|X_1]]$. Gezien

$$N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} I_{\{S_k \le t\}}, t \ge 0$$

kunnen we via monotone convergentie en de lineariteit van (conditionele) verwachtingswaarden concluderen dat

$$\mathbb{E}[N(t)|X_1 = x] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[I_{\{S_k \le t\}}|X_1 = x],$$

hetgeen gelijk is aan

$$I_{[0,t]}(x) + \sum_{k=2}^{\infty} \mathbb{P}\{S_{k-1} \le t - x\} = 1 + m(t-x), 0 \le x \le t.$$

We zien nu dat

$$m(t) = F(t) + \int_{[0,t]} m(t-x)dF(x), t \ge 0.$$

(Hier is zoals altijd $F(t) = \mathbb{P}\{X_1 \le t\}, t \ge 0$ de verdelingsfunctie van X_1.)

Bovenstaande vergelijking is een speciaal geval van de

Algemene vernieuwingsvergelijking.
Gegeven een lokaal begrensde functie $g : [0,\infty[\to \mathbb{R}$. *Vind de oplossing van*

$$G(t) = g(t) + \int_{[0,t]} G(t-x)dF(x). \qquad (+)$$

Een functie $g : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ heet lokaal begrensd indien

$$\sup_{0 \le u \le M} |g(u)| \le C_M < \infty, \forall M > 0.$$

Stelling 2.5 *Zij* $g : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ *lokaal begrensd. Dan heeft de vernieuwingsvergelijking (+) een unieke lokaal begrensde oplossing* G *gegeven door*

$$G(t) = \int_{[0,t]} g(t-s)U(ds), t \ge 0,$$

waar U *de* σ*-eindige maat* $U(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{S_n \in A\}, A \in \mathcal{R}_+$(= *Borel-delen van* $[0,\infty[$) *is.*

Opmerking G is dus gedefinieerd als integraal ten opzichte van een algemene maat. Deze soort integratie wordt in de maattheorie (bachelor 3, wiskunde) besproken. Het enige wat we hier moeten weten is dat als we $g(u) = 0, u < 0$ stellen, deze integraal gelijk is aan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[g(t - S_n)].$$

(Dit volgt direct uit de formule van de beeldmaat).

Bewijs
(i) Stel $U_n(A) = \sum_{m=0}^n \mathbb{P}\{S_m \in A\}, A \in \mathcal{R}_+, n \geq 0$ en $G_n(t) = \int_{[0,t]} g(t-s)U_n(ds), t \geq 0$.
De formule van de beeldmaat impliceert dan (we stellen weer $g(u) = 0, u < 0$):

$$G_n(t) = \sum_{m=0}^{n} \mathbb{E}[g(t - S_m)], t \geq 0, n \geq 0.$$

Dit kunnen we dan herschrijven als

$$g(t) + \sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}[g(t - S_m)] = g(t) + \sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}[g(t - \hat{S}_m - X_1)],$$

waar $\hat{S}_m = \sum_{i=2}^m X_i, m \geq 2$ en $\hat{S}_1 = 0$.
Aangezien X_1 en $\hat{S}_m$ onafhankelijk zijn en $\hat{S}_m \stackrel{d}{=} S_{m-1}, m \geq 1$, volgt verder dat

$$G_n(t) = g(t) + \sum_{m=0}^{n-1} \int_{[0,t]} \mathbb{E}[g(t - s - S_m)]dF(s)$$

of

$$G_n(t) = g(t) + \int_{[0,t]} G_{n-1}(t-s)dF(s), t \geq 0. \tag{2.8}$$

Verder geldt er voor $0 \leq t \leq M$,

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq v \leq t} |G_n(v) - G(v)| &= \sup_{0 \leq v \leq t} \left| \sum_{m=n+1}^{\infty} \int_{[0,v]} g(v-s)\mathbb{P}_{S_m}(ds) \right| \\ &\leq \sup_{0 \leq u \leq t} |g(u)| \sum_{m=n+1}^{\infty} \mathbb{P}\{S_m \leq t\} \\ &\leq C_M \sum_{m=n+1}^{\infty} \mathbb{P}\{S_m \leq t\} \to 0 \text{ als } n \to \infty. \end{aligned}$$

Het laatste volgt wegens $m(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}\{S_m \leq t\} < \infty$ (zie stelling 2.1). We kunnen nu concluderen dat

$$G_n(t) \to G(t) \text{ als } n \to \infty \tag{2.9}$$

en ook

$$\begin{aligned} &\left| \int_{[0,t]} G_{n-1}(t-s)dF(s) - \int_{[0,t]} G(t-s)dF(s) \right| \\ \leq\ & \int_{[0,t]} |G(t-s) - G_{n-1}(t-s)|dF(s) \leq \sup_{0 \leq u \leq t} |G(u) - G_{n-1}(u)| \mathbb{P}\{X_1 \leq t\} \to 0 \text{ als } n \to \infty, \end{aligned}$$

hetgeen in combinatie met (2.8) en (2.9) impliceert dat G een oplossing van (+) is.

(ii) We bewijzen nog de uniciteit.
Dus onderstel dat $\tilde{G}_i, i = 1, 2$ lokaal begrensde oplossingen van (+) zijn. Stel

$$\Delta(t) = \begin{cases} \tilde{G}_2(t) - \tilde{G}_1(t) & \text{als } t \geq 0 \\ 0 & \text{als } t < 0 \end{cases}$$

Dan is het evident dat voor elke $t \in \mathbb{R}$:

$$\Delta(t) = \int_{[0,t]} \Delta(t-s)dF(s) = \int_{[0,\infty[} \Delta(t-u)dF(u) = \mathbb{E}\Delta(t-X_1).$$

Gezien we ook hebben: $\Delta(t-u) = \int_{[0,\infty[} \Delta(t-u-v)dF(v)$, zien we onmiddellijk dat

$$\Delta(t) = \int_{[0,\infty[} \int_{[0,\infty[} \Delta(t-u-v)dF(v)dF(u),$$

hetgeen wegens onafhankelijkheid gelijk is aan $\mathbb{E}\Delta(t-X_1-X_2) = \mathbb{E}\Delta(t-S_2)$. Via inductie volgt dan algemeen

$$\Delta(t) = \mathbb{E}\Delta(t-S_m), m \geq 1 \tag{2.10}$$

We hebben dan voor $M > 0$ vast en elke $m \geq 1$:

$$\sup_{0 \leq t \leq M} |\Delta(t)| \leq C'_M \mathbb{P}\{S_m \leq M\},$$

waar $C'_M > 0$. (Hier hebben we de lokale begrensdheid van $\tilde{G}_i, i = 1,2$ gebruikt.)

Stelling 2.1 toont dat $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{S_n \leq t\} < \infty, t > 0$ wat natuurlijk voor elke (vaste) $t > 0$, (en dus ook voor $t = M$) impliceert

$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\{S_m \leq t\} = 0.$$

Dus hebben we $\Delta(t) = 0, 0 \leq t \leq M$ voor elke $M > 0$ en we zien dat $\Delta \equiv 0$, waarmee de stelling bewezen is. □

Opmerking De vorige stelling is meer een theoretisch resultaat omdat we i.h.a. de maat U niet kunnen bepalen behalve in het geval waar de toevalsvariabelen $X_1, X_2, \ldots$ exponentieel verdeeld zijn. We zullen echter tonen dat in veel gevallen $G(t)$ naar een bepaalde Riemann-integraal convergeert als $t \to \infty$ en deze integraal kunnen we wel berekenen.

We hebben nog een definitie nodig.

Definitie 2.2 *Een functie $g : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ heet direct Riemann-integreerbaar indien*

$$I_\delta(g) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta \inf\{g(x) : x \in [k\delta,(k+1)\delta[\} \text{ en } I^\delta(g) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta \sup\{g(x) : x \in [k\delta,(k+1)\delta[\}$$

absoluut convergeren en $I^\delta(g) - I_\delta(g) \to 0$ als $\delta \to 0$.

Dit is een sterkere eigenschap dan gewoon Riemann-integreerbaar. Onder meer geldt altijd $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$ als g direct Riemann-intgreerbaar is. Verder is het evident dat we dan hebben

$$\lim_{\delta\to 0} I^\delta(g) = \lim_{\delta\to 0} I_\delta(g) = \int_0^\infty g(x)dx.$$

Het volgende lemma toont dat monotoon niet stijgende functies die Riemann-integreerbaar zijn, altijd direct Riemann-integreerbaar zijn.

Lemma 2.2 *Zij $g : [0,\infty[\to [0,\infty[$ monotoon niet stijgend. Als $\int_0^\infty g(u)du < \infty$, dan is g direct Riemann-integreerbaar.*

Bewijs. In dit geval geldt

$$0 \le \sum_{k=1}^{\infty} g(k\delta)\delta \le I_\delta(g) \le I^\delta(g) \le \sum_{k=0}^{\infty} g(k\delta)\delta.$$

waaruit blijkt dat $I^\delta(g) - I_\delta(g) \le g(0)\delta \to 0$ als $\delta \to 0$. De twee reeksen zijn ook absoluut convergent omdat

$$\sum_{k=1}^{\infty} g(k\delta)\delta \le \int_0^\infty g(u)du < \infty.$$

Daarmee is het lemma bewezen. □

Stelling 2.6 *Veronderstel dat X_1 geen tralieverdeling heeft en stel $\mu = \mathbb{E}[X_1]$.*
Zij $g : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ lokaal begrensd en direct Riemann-integreerbaar. Dan geldt als $t \to \infty$,

$$\int_{[0,t]} g(t-x)U(dx) \to \frac{1}{\mu}\int_0^\infty g(t)dt.$$

Om stelling 2.6 te bewijzen, hebben we nog een lemma nodig.

Stel $N(A) = \sum_{n=1}^\infty I_A(S_n), A \subset [0,\infty]$.

Lemma 2.3 *Beschouw het vernieuwingsproces $N(t) = N([0,t]) = \max\{n \ge 0 : S_n \le t\}, t \ge 0$ en stel $N_0(t) = N(t) + 1, t \ge 0$. Dan geldt voor $t, h > 0$,*

(i)
$$\mathbb{P}\{N([t,t+h]) \ge m\} \le \mathbb{P}\{N_0(h) \ge m\}, m = 0,1,2,\ldots$$

(ii)
$$U([t,t+h]) \le U([0,h]).$$

Bewijs (i) Stel $\tau = \min\{i \ge 1 : S_i \ge t\}$. Dan is τ een $\sigma\{S_1,\ldots,S_n\}$-stoptijd en we hebben,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{N([t,t+h]) \ge m\} &= \mathbb{P}\{S_{\tau+m-1} \le t+h\} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\{S_{i+m-1} \le t+h, \tau = i\} \\
&\le \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\{S_{i+m-1} - S_i \le h, \tau = i\} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\{S_{i+m-1} - S_i \le h\}\mathbb{P}\{\tau = i\} \\
&= \mathbb{P}\{S_{m-1} \le h\}\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}\{\tau = i\} = \mathbb{P}\{S_{m-1} \le h\} \\
&= \mathbb{P}\{N(h) \ge m-1\} = \mathbb{P}\{N_0(h) \ge m\} \ \ (m \ge 1).
\end{aligned}$$

(ii) Dit volgt direct uit (i) omdat

$$U([t,t+h]) = \mathbb{E}[N([t,t+h])] = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}\{N([t,t+h]) \ge m\} \le \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}\{N_0(h) \ge m\} = \mathbb{E}[N_0(h)].$$

Daarmee is het lemma bewezen. □

Bewijs van stelling 2.6
(STAP 1) Beschouw de functie $g(s) = \sum_{k=0}^\infty a_k I_{[k\delta,(k+1)\delta[}(s), s \ge 0$, waar $\delta > 0$ en

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty.$$

Dan geldt natuurlijk,

$$\int_{[0,t]} g(t-s)U(ds) = \int_{[0,t]} \sum_{k=0}^{\infty} a_k I_{]t-(k+1)\delta, t-k\delta]}(s)U(ds).$$

Aangezien $]t-(k+1)\delta, t-k\delta] \subset]-\infty, 0[$ als $k > k_\delta = [t/\delta]$, hebben we

$$\int_{[0,t]} g(t-s)U(ds) = \sum_{k=0}^{k_\delta} a_k U(]t-(k+1)\delta, t-k\delta]) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k U(]t-(k+1)\delta, t-k\delta]).$$

De stelling van Blackwell impliceert dat voor elke $k \geq 0$ geldt:

$$\lim_{t\to\infty} U(]t-(k+1)\delta, t-k\delta]) = \delta/\mu,$$

en we beweren dat dit verder impliceert

$$\lim_{t\to\infty} \int_{[0,t]} g(t-s)U(ds) = \lim_{t\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k U(]t-(k+1)\delta, t-k\delta]) \right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \delta/\mu. \tag{2.11}$$

Om dit in te zien kiezen we voor $\epsilon > 0$ eerst een $K \geq 1$ zodanig dat

$$\sum_{k=K+1}^{\infty} |a_k|(U([0,\delta]) + \delta/\mu) < \epsilon/2$$

en dan $T > 0$ zodanig dat

$$\max_{0\leq k\leq K} |a_k|\,|U(]t-(k+1)\delta, t-k\delta]) - \delta/\mu| \leq \frac{\epsilon}{2K+3}, t \geq T.$$

Wegens lemma 2.3 geldt dan voor $t \geq T$,

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \{U(]t-(k+1)\delta, t-k\delta]) - \delta/\mu\} \right| \\ \leq\ & \sum_{k=0}^{K} |a_k||U(]t-(k+1)\delta, t-k\delta]) - \delta/\mu| + \sum_{k=K+1}^{\infty} |a_k|(U[0,\delta] + \delta/\mu) \leq \frac{(K+1)\epsilon}{2K+3} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon. \end{aligned}$$

Daarmee is (2.11) bewezen.

(STAP 2) Als g direct Riemann-integreerbaar is, dan geldt er voor $\delta > 0$,

$$g_1 := \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,1} I_{[k\delta,(k+1)\delta[} \leq g \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,2} I_{[k\delta,(k+1)\delta[} =: g_2,$$

waar $a_{k,1} = \inf\{g(x) : x \in [k\delta, (k+1)\delta[\}$ en $a_{k,2} = \sup\{g(x) : x \in [k\delta, (k+1)\delta[\}, k \geq 0$. Wegens (2.11) volgt dan onmiddellijk dat

$$I_\delta(g)/\mu = \lim_{t\to\infty} \int_{[0,t]} g_1(t-x)U(dx) \leq \liminf_{t\to\infty} \int_{[0,t]} g(t-x)U(dx),$$

en analoog

$$I^\delta(g)/\mu = \lim_{t\to\infty} \int_{[0,t]} g_2(t-x)U(dx) \geq \limsup_{t\to\infty} \int_{[0,t]} g(t-x)U(dx).$$

Aangezien $I^\delta(g) - I_\delta(g) \to 0$ als $\delta \to 0$, impliceert dit de bewering. $\square$

2.4 Toepassingen

We bekijken nu enkele toepassingen van stelling 2.6.

1. Veronderstel dat X_1 geen tralieverdeling heeft en dat $\mathbb{E}X_1^2 = \int_0^\infty x^2 dF(x) < \infty$. Zij $m(t)$ de door deze verdeling bepaalde vernieuwingsfunctie en stel $U(t) = 1 + m(t), t \geq 0$. Dan geldt er:

$$\lim_{t\to\infty}[U(t) - t/\mu] = \frac{\mathbb{E}[X_1^2]}{2\mathbb{E}[X_1]^2}.$$

Bewijs We hebben natuurlijk $U(t) = \int_{[0,t]} 1U(ds)$ wat in het licht van stelling 2.5 betekent dat

$$U(t) = 1 + \int_{[0,t]} U(t-s)dF(s).$$

Stel $H(t) = U(t) - t/\mu, t \geq 0$. Dan hebben we,

$$\begin{aligned}
H(t) &= 1 + \int_{[0,t]} U(t-s)dF(s) - \frac{t}{\mu} \\
&= 1 + \int_{[0,t]} H(t-s)dF(s) + \int_{[0,t]} \frac{t-s}{\mu} dF(s) - \frac{t}{\mu} \\
&= 1 + \int_{[0,t]} H(t-s)dF(s) + \frac{1}{\mu}\int_0^t F(s)ds - \frac{t}{\mu} \qquad \text{(partiële integratie)} \\
&= 1 - \int_0^t \frac{1-F(s)}{\mu} ds + \int_{[0,t]} H(t-s)dF(s) = h(t) + \int_{[0,t]} H(t-s)dF(s),
\end{aligned}$$

waar $h(t) = \int_t^\infty \frac{1-F(s)}{\mu} ds, t \geq 0$ monotoon niet stijgend is. (Hier hebben we het feit gebruikt dat $\int_0^\infty (1-F(s))ds = \mu$.)
Bovendien geldt er:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty h(t)dt &= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty \int_t^\infty (1-F(s))dsdt = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty \int_0^s 1ds(1-F(s))ds \\
&= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty s\int_{]s,\infty[} 1dF(u)ds = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty \int_0^u sdsdF(u) = \frac{1}{2\mu}\mathbb{E}X_1^2
\end{aligned}$$

We kunnen nu concluderen dat h direct Riemann-integreerbaar is en dat

$$\lim_{t\to\infty} H(t) = \frac{1}{2\mu^2}\mathbb{E}X_1^2.$$

2. Stel $A(t) = t - S_{N(t)}, t \geq 0$ en $B(t) = S_{N(t)+1} - t, t \geq 0$. Als we het vernieuwingsproces weer interpreteren via een machine waar we regelmatig een bepaald onderdeel moeten vervangen, dan is $A(t)$ de leeftijd van het recente onderdeel op moment t en $B(t)$ geeft aan hoe lang we dit onderdeel nog kunnen gebruiken.
We tonen dat als X_1 geen tralieverdeling heeft en $\mu = \mathbb{E}X_1 < \infty$, dat dan voor elke $x > 0$ geldt als $t \to \infty$

$$\mathbb{P}\{B(t) > x\} \to \frac{1}{\mu}\int_x^\infty (1-F(t))dt \tag{2.12}$$

en analoog

$$\mathbb{P}\{A(t) > x\} \to \frac{1}{\mu}\int_x^\infty (1-F(t))dt \tag{2.13}$$

Bewijs. (i) Voor een vaste $x > 0$ stellen we $G(t) := \mathbb{P}\{B(t) > x\}, t \geq 0$ en we gaan tonen dat G de oplossing van een bepaalde vernieuwingsvergelijking is. Daarvoor moeten we eerst de kans $G(t)$ herschrijven.

$$G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{S_{N(t)+1} > t + x, N(t) = n\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{S_{n+1} > t + x, S_n \leq t\},$$

waar we in de laatste stap het feit gebruiken dat $\{N(t) = n\} = \{S_n \leq t, S_{n+1} > t\}$ (zie lemma 2.1). We conditioneren nu op $X_1 = s$ en we verkrijgen dan

$$\begin{aligned}
G(t) &= \mathbb{P}\{X_1 > t + x\} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{S_{n+1} > t + x, S_n \leq t\} \\
&= (1 - F(t + x)) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,t]} \mathbb{P}\{S_{n+1} > t + x, S_n \leq t | X_1 = s\} dF(s) \\
&= (1 - F(t + x)) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,t]} \mathbb{P}\{S_n > t - s + x, S_{n-1} \leq t - s\} dF(s) \\
&= (1 - F(t + x)) + \int_{[0,t]} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}\{S_{m+1} > x + (t - s), S_m \leq t - s\} \right) dF(s) \\
&= (1 - F(t + x)) + \int_{[0,t]} G(t - s) dF(s).
\end{aligned}$$

De functie $t \to 1 - F(t + x)$ is direct Riemann-integreerbaar en dus geldt er:

$$\lim_{t\to\infty} G(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} (1 - F(t + x))dt = \frac{1}{\mu} \int_x^{\infty} (1 - F(t))dt.$$

Daarmee is (2.12) bewezen.

(ii) Om (2.13) te bewijzen, tonen we eerst dat $A(t) \geq x \Leftrightarrow B(t - x) > x$.
Uit de definitie van $A(t)$ volgt onmiddellijk dat

$$A(t) \geq x \Leftrightarrow t - S_{N(t)} \geq x \Leftrightarrow S_{N(t)} \leq t - x \Leftrightarrow N(t) = N(t - x).$$

Anderzijds hebben we ook

$$N(t) = N(t - x) \Rightarrow S_{N(t-x)+1} > t \Rightarrow B(t - x) > x \Rightarrow N(t - x) = N(t).$$

Dus, $B(t - x) > x \Leftrightarrow N(t) = N(t - x)$ en we zien dat bovenstaande equivalentie klopt. We concluderen dat

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\{A(t) \geq x\} &= \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\{B(t - x) > x\} \\
&= \lim_{s\to\infty} \mathbb{P}\{B(s) > x\} \quad (x \text{ is vast!}) \\
&= \frac{1}{\mu} \int_x^{\infty} (1 - F(t))dt \quad (\text{wegens } (2.12))
\end{aligned}$$

Stel $\ell(x) = \frac{1}{\mu} \int_x^{\infty} (1-F(t))dt, x \geq 0$. Deze functie is dan natuurlijk continu en we hebben dan voor $h > 0$, $\liminf_{t\to\infty} \mathbb{P}\{A(t) > x\} \geq \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\{A(t) \geq x + h\} = \ell(x + h)$. Dus ook (laat h naar nul convergeren),

$$\liminf_{t\to\infty} \mathbb{P}\{A(t) > x\} \geq \ell(x).$$

Wegens monotonie geldt bovendien,

$$\limsup_{t\to\infty} \mathbb{P}\{A(t) > x\} \le \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\{A(t) \ge x\} = \ell(x),$$

waarmee ook (2.13) bewezen is.

3. Veronderstel dat we onafhankelijke, positieve toevalsvariabelen $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ en $\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots$ hebben, waar $\mathbb{P}\{\xi_j \le x\} = F_1(x)$ en $\mathbb{P}\{\eta_j \le x\} = F_2(x), x > 0$. Stel

$$T_0 = 0, S_k := T_{k-1} + \xi_k, T_k = S_k + \eta_k, k \ge 1.$$

Zij

$$H(t) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{T_{k-1} < t \le S_k\}\right).$$

Als $\xi_1 + \eta_1$ geen tralieverdeling heeft, dan geldt er:

$$H(t) \to \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \text{ als } t \to \infty,$$

waar $\mu_1 = \mathbb{E}\xi$ en $\mu_2 = \mathbb{E}\eta$.

Interpretatie *Een machine valt regelmatig in panne. De momenten waar dit gebeurt zijn $S_1, S_2, \ldots$. De herstelling van de machine duurt $\eta_1, \eta_2, \ldots$ tijdeenheden. Dus kunnen we de machine alleen maar gebruiken in de disjuncte tijdsintervallen $]T_0, S_1],]T_1, S_2], \ldots$ $H(t)$ is dus de kans dat de machine op moment t werkt.*

Bewijs. Stel $Y_k = \xi_k + \eta_k, k \ge 1$ en zij $F(x) = \mathbb{P}\{Y_1 \le x\}, x > 0$ de verdelingsfunctie van deze toevalsvariabelen. Dan geldt natuurlijk $T_n = \sum_{i=1}^n Y_i, n \ge 1$. Aangezien $T_0 = 0$ kunnen we $H(t)$ herschrijven als

$$\begin{aligned}
H(t) &= \mathbb{P}\{\xi_1 \ge t\} + \sum_{k=2}^{\infty} \mathbb{P}\{T_{k-1} < t \le S_k\} \\
&= \mathbb{P}\{\xi_1 \ge t\} + \sum_{k=2}^{\infty} \int_{[0,t]} \mathbb{P}\{T_{k-1} < t \le S_k | Y_1 = s\} dF(s) \\
&= \mathbb{P}\{\xi_1 \ge t\} + \sum_{k=2}^{\infty} \int_{[0,t]} \mathbb{P}\{T_{k-2} < t - s \le S_{k-1}\} dF(s) \quad \text{(wegens onafhankelijkheid)} \\
&= \mathbb{P}\{\xi_1 \ge t\} + \int_{[0,t]} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}\{T_{m-1} < t - s \le S_m\}\right) dF(s) \\
&= \mathbb{P}\{\xi_1 \ge t\} + \int_{[0,t]} H(t-s) dF(s)
\end{aligned}$$

De functie $t \to \mathbb{P}\{\xi_1 \ge t\}$ is direct Riemann-integreerbaar en we hebben

$$\int_0^{\infty} \mathbb{P}\{\xi_1 \ge x\} dx = \mathbb{E}\xi_1 = \mu_1.$$

Gezien dat $\mu = \mathbb{E}Y_1 = \mathbb{E}\xi_1 + \mathbb{E}\eta_1 = \mu_1 + \mu_2$ volgt nu: $\lim_{t\to\infty} H(t) = \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}$.

Referenties

Durrett, R. (2010) *Probability: Theory and Examples*, 4th edition (→ Hoofdstuk 4.4)
Ross, S. (1996) *Stochastic processes*, Wiley. (→ Hoofdstuk 3)

Hoofdstuk 3

Brownse beweging en martingalen

3.1 De Brownse beweging

Definitie 3.1 *Een Brownse beweging is een stochastisch proces* $\{W_t : t \geq 0\}$ *op een kansruimte* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *dat aan de volgende voorwaarden voldoet:*

(i) $\mathbb{P}\{W_0 = 0\} = 1$.

(ii) *Voor elke keuze* $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k < \infty$ *geldt:* $W_{t_1}, W_{t_j} - W_{t_{j-1}}, 2 \leq j \leq k$ *zijn onafhankelijke toevalsvariabelen.*

(iii) *Voor* $0 \leq s < t < \infty$ *geldt er dat* $W_t - W_s$ *normaal*$(0, t-s)$*-verdeeld is.*

(iv) *De "paden"* $t \to W_t(\omega)$ *zijn continu, bijna overal.*

Dus het gaat om een stochastisch proces met continue tijdparameter en toestandsruimte gelijk aan $\mathbb{R}$. Het is een niet-triviaal wiskundig resultaat dat zo'n proces bestaat en we verwijzen daarvoor naar de literatuur. Dit stochastische proces wordt ook vaak *Wienerproces* genoemd.

Het volgende lemma geeft een equivalente beschrijving van de voorwaarden (ii) en (iii).

Lemma 3.1 *Een stochastisch proces voldoet aan (ii) en (iii) als en slechts als er geldt:*
(v) Voor elke keuze van k verschillende parameters $t_1, \ldots, t_k \in]0, \infty[$ *geldt:*

$$(W_{t_1}, \ldots, W_{t_k})^t \sim \textit{normaal}(\vec{0}, \Sigma_k),$$

waar Σ_k *de symmetrische, positief definiete (k,k)-matrix is met* $(\Sigma_k)_{i,j} = t_i \wedge t_j, 1 \leq i, j \leq k$.

Bewijs. $\boxed{\text{(ii) + (iii)} \Longrightarrow \text{(v)}}$ We veronderstellen eerst dat $t_1 < \ldots < t_k$. Dan hebben we:

$$\begin{bmatrix} W_{t_1} \\ \vdots \\ W_{t_k} \end{bmatrix} = A_k \begin{bmatrix} W_{t_1} \\ \vdots \\ W_{t_k} - W_{t_{k-1}} \end{bmatrix},$$

waar $A_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$ de matrix met $(A_k)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{als } i \geq j, \\ 0 & \text{als } i < j. \end{cases}$

Uit (ii) en (iii) volgt dat $\begin{bmatrix} W_{t_1} \\ \vdots \\ W_{t_k} - W_{t_{k-1}} \end{bmatrix} \sim \text{normaal}(\vec{0}, D_k)$, waar D_k de diagonaalmatrix met

$(D_k)_{i,i} = t_i - t_{i-1}, 1 \le i \le k$. $(t_0 = 0)$ is.
We zien nu dat $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_k})^t \sim \text{normaal}(\vec{0}, A_k D_k A_k^t)$. Narekenen toont dat $A_k D_k A_k^t = \Sigma_k$, waarmee (v) bewezen is als $t_1 < \ldots < t_k$.
In het algemene geval kunnen we $s_1 < \ldots < s_k$ en een permutatie π van $1, \ldots, k$ vinden zodanig dat $t_i = s_{\pi(i)}, 1 \le i \le k$. Stel A_π de permutatiematrix met $(A_\pi)_{i,j} = \delta_{j,\pi(i)}, 1 \le i, k \le k$. Hier is $\delta_{r,s}$ het Kroneckersymbool, dus $\delta_{r,s} = 1$ als $r = s$ en $\delta_{r,s} = 0$ als $r \neq s$. Dan geldt:

$$\begin{bmatrix} W_{t_1} \\ \vdots \\ W_{t_k} \end{bmatrix} = A_\pi \begin{bmatrix} W_{s_1} \\ \vdots \\ W_{s_k} \end{bmatrix},$$

hetgeen met het vorige impliceert dat $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_k})^t \sim \text{normaal}(\vec{0}, A_\pi \Sigma'_k A_\pi^t)$, waar $(\Sigma'_k)_{i,j} = s_i \wedge s_j, 1 \le i, j \le k$. Door narekenen volgt weer dat

$$(A_\pi \Sigma'_k A_\pi^t)_{i,j} = s_{\pi(i)} \wedge s_{\pi(j)} = t_i \wedge t_j, 1 \le i, j \le k.$$

Dus geldt (v).
$\boxed{\text{(v)} \Longrightarrow \text{(ii)} + \text{(iii)}}$ Zij $0 < t_1 < \ldots < t_k$. Dan hebben we natuurlijk dat

$$\begin{bmatrix} W_{t_1} \\ \vdots \\ W_{t_k} - W_{t_{k-1}} \end{bmatrix} = A_k^{-1} \begin{bmatrix} W_{t_1} \\ \vdots \\ W_{t_k} \end{bmatrix}.$$

Het volgt dat $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^t \sim \text{normaal}(\vec{0}, A_k^{-1} \Sigma_k (A_k^{-1})^t)$. Aangezien $\Sigma_k = A_k D_k A_k^t$ zien we dat deze toevalsvector een k-dimensional normaalverdeling met verwachting $\vec{0}$ en diagonale covariantiematrix D_k heeft. Dit impliceert natuurlijk dat de toevalsvariabelen $W_{t_1}, \ldots, W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$ onafhankelijk zijn en bijgevolg (ii).
Betrekking (iii) volgt onmiddellijk als we $k = 2$ zetten en $t_1 = s$, $t_2 = t$ stellen. We weten dan dat de twee-dimensionale toevalsvector $(W_s, W_t - W_s)^t$ normaalverdeeld met verwachting nul en covariantie matrix $\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & t-s \end{bmatrix}$ is, hetgeen impliceert dat $W_t - W_s$ normaal$(0, t-s)$-verdeeld is. □

We vermelden dat de paden van een Brownse beweging nergens differentieerbaar zijn, bijna overal.

Stelling 3.1 *Zij $\{W_t : t \ge 0\}$ een Brownse beweging op een kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Er bestaat een verzameling $N \in \mathcal{F}$ met $\mathbb{P}(N) = 0$ zodanig dat de (continue) functies $t \to W_t(\omega)$* **nergens** *differentieerbaar zijn als $\omega \notin N$.*

We hebben nog een ongelijkheid nodig voor kansen dat $\max_{0 \le t \le T} |W(t)|$ groter dan een bepaalde waarde x is. Gezien de paden van de Brownse beweging continu zijn en discrete benaderingen van de Brownse beweging de structuur van sommen onafhankelijke toevalsvariabelen hebben, volgt deze ongelijkheid uit het volgende lemma.

Lemma 3.2 *Stel $X_1, \ldots, X_n$ onafhankelijke toevalsvariabelen met symmetrische verdelingen. Dan hebben we voor de sommen $S_k = \sum_{j=1}^k X_j$ en $x > 0$,*

$$\mathbb{P}\left\{\max_{1 \le k \le n} |S_k| \ge x\right\} \le 2\mathbb{P}\{|S_n| \ge x\}.$$

Bewijs. We noteren eerst dat als $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ een symmetrische verdeling heeft, geldt:

$$1 = \mathbb{P}(\{Z \geq 0\} \cup \{Z \leq 0\}) \leq \mathbb{P}\{Z \geq 0\} + \mathbb{P}\{Z \leq 0\} = 2\mathbb{P}\{Z \geq 0\},$$

en dus $\mathbb{P}\{Z \geq 0\} \geq 1/2$.
Uit de onafhankelijkheid en de symmetrie van de verdeling van de toevalsvariabelen volgt onmiddellijk dat de toevalsvariabelen $S_n - S_m$ symmetrische verdelingen hebben en bijgevolg hebben we

$$\mathbb{P}\{S_n - S_m \geq 0\} \geq 1/2, 1 \leq m \leq n-1 \tag{3.1}$$

Stel $\tau = \inf\{m \geq 1 : S_m \geq x\}$. Dan geldt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{\max_{1\leq k\leq n} S_k \geq x\right\} &= \mathbb{P}\{\tau \leq n\} = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}\{\tau = m\} \\ &= \mathbb{P}\{\tau = n\} + \sum_{m=1}^{n-1} \mathbb{P}\{\tau = m, S_n - S_m \geq 0\}/\mathbb{P}\{S_n - S_m \geq 0\} \end{aligned}$$

Hier hebben we gebruikt dat de gebeurtenis $\{\tau = m\}$ alleen afhankelijk is van de toevalsvariabelen $X_1, \ldots, X_m$ en dus onafhankelijk van $S_n - S_m = \sum_{j=m+1}^{n} X_j$ is.
Gebruiken we het feit dat $\tau = m$ impliceert $S_m \geq x$ en betrekking (3.1) kunnen we concluderen dat

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{\max_{1\leq k\leq n} S_k \geq x\right\} &\leq \mathbb{P}\{\tau = n, S_n \geq x\} + 2\sum_{m=1}^{n-1} \mathbb{P}\{\tau = m, S_n \geq x\} \\ &\leq 2\mathbb{P}\left(\bigcup_{m=1}^{n} \{\tau = m\} \cap \{S_n \geq x\}\right) \\ &= 2\mathbb{P}\{\tau \leq n, S_n \geq x\} = 2\mathbb{P}\{S_n \geq x\}, \end{aligned}$$

omdat $\{S_n \geq x\} \subset \{\tau \leq n\}$. Vervangen we X_k door $-X_k$ volgt ook dat

$$\mathbb{P}\left\{\max_{1\leq k\leq n}(-S_k) \geq x\right\} \leq 2\mathbb{P}\{-S_n \geq x\}.$$

Dus hebben we,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{\max_{1\leq k\leq n} |S_k| \geq x\right\} &\leq \mathbb{P}\left\{\max_{1\leq k\leq n} S_k \geq x\right\} + \mathbb{P}\left\{\max_{1\leq k\leq n}(-S_k) \geq x\right\} \\ &\leq 2\mathbb{P}\{S_n \geq x\} + 2\mathbb{P}\{-S_n \geq x\} = 2\mathbb{P}\{|S_n| \geq x\}, \end{aligned}$$

waarmee het lemma bewezen is. □

Lemma 3.3 *Zij $\{W(t) : t \geq 0\}$ een Brownse beweging. Dan geldt er voor elke $T > 0$ en $x > 0$,*

$$\mathbb{P}\left\{\max_{0\leq t\leq T} |W(t)| \geq x\right\} \leq 2\mathbb{P}\{|W(T)| \geq x\} \leq 4\exp\left(-\frac{x^2}{2T}\right).$$

Bewijs. Uit de continuïteit van de paden $t \to W(t, \omega)$ volgt er dat bijna overal,

$$\max_{0\leq t\leq T} |W(t,\omega)| = \lim_{N\to\infty} \max_{1\leq j\leq 2^N} |W(jT2^{-N}, \omega)|.$$

Dus hebben we,

$$\mathbb{P}\left\{\max_{0\le t\le T}|W(t)|\ge x\right\} = \lim_{N\to\infty}\mathbb{P}\left\{\max_{1\le j\le 2^N}|W(jT2^{-N})|\ge x\right\}.$$

Verder geldt,

$$\mathbb{P}\left\{\max_{1\le j\le 2^N}|W(jT2^{-N})|\ge x\right\} = \mathbb{P}\left\{\max_{1\le j\le 2^N}\left|\sum_{i=1}^{j}X_i^{(N)}\right|\ge x\right\},$$

waar de toevalsvariabelen $X_i^{(N)} = W(iT2^{-N}) - W((i-1)T2^{-N}), 1\le i\le 2^N$ onafhankelijk en symmetrisch verdeeld zijn. Gebruiken we het vorige lemma, zien we dat de laatste kans niet groter dan

$$2\mathbb{P}\left\{\left|\sum_{i=1}^{2^N}X_i^{(N)}\right|\ge x\right\} = 2\mathbb{P}\{|W(T)|\ge x\}$$

kan zijn. Aangezien dit uniform in N geldt, volgt er dat

$$\mathbb{P}\left\{\max_{0\le t\le T}|W(t)|\ge x\right\}\le 2\mathbb{P}\{|W(T)|\ge x\}.$$

Verder kunnen we de kans $\mathbb{P}\{|W(T)|\ge x\}$ zoals volgt herschrijven,

$$\mathbb{P}\{|W(T)|\ge x\} = \mathbb{P}\{|Z|\ge x/\sqrt{T}\} = 2\mathbb{P}\{Z\ge x/\sqrt{T}\},$$

waar $Z\sim$ normaal$(0,1)$.
Voor elke $u>0$ en $s>0$ kunnen we verder conluderen wegens Markovs ongelijkheid dat

$$\mathbb{P}\{Z\ge u\}\le\mathbb{P}\{\exp(sZ)\ge\exp(su)\}\le\mathbb{E}[\exp(sZ)]\exp(-us) = \exp(s^2/2-us).$$

Kiezen we $s=u$, volgt er dat $\mathbb{P}\{Z\ge u\}\le\exp(-u^2/2), u>0$ en dus hebben we

$$\mathbb{P}\{|W(T)|\ge x\}\le 2\exp\left(-\frac{x^2}{2T}\right),$$

waarmee het lemma bewezen is. □

3.2 Conditionele verwachtingen

In dit hoofdstuk is $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ altijd een vaste kansruimte. Zij $\mathcal{G}$ een deel-σ-algebra van $\mathcal{F}$. Het volgende resultaat toont dat voor elke integreerbare toevalsvariabele een zogenoemde conditionele verwachting gegeven $\mathcal{G}$ bestaat. Daarvoor hebben we enkele resultaten over L_p-ruimten nodig. De klasse van alle $\mathcal{G}$-meetbare afbeeldingen $X:\Omega\to\mathbb{R}$ is een vectorruimte en we bekijken de deelklassen

$$\mathcal{L}_p(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P}) = \{X:\Omega\to\mathbb{R}: X \text{ is } \mathcal{G}-\text{meetbaar en } \mathbb{E}|X|^p<\infty\}, p\ge 1.$$

Het is gemakkelijk te zien dat deze weer vectorruimten zijn en ook dat

$$\mathcal{L}_{p_1}(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})\subset\mathcal{L}_{p_2}(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P}), p_1\ge p_2.$$

Verder is $\|X\|_p = \mathbb{E}[|X|^p]^{1/p}$ een semi-norm op $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ (dwz, we hebben alle eigenschappen van een norm behalve dat $\|X\|_p = 0$ impliceert dat X de nul-functie is. We hebben in dit geval alleen dat $X = 0$ bijna overal.)
Belangrijk voor wat volgt is dat de $\mathcal{L}_p$-ruimten **compleet** zijn:
Stel X_n een rij in $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ zodanig dat $\|X_n - X_m\|_p \to 0$ als $n, m \to \infty$. Dan bestaat er een $X \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ zodat $\|X_n - X\|_p \to 0$. We zeggen dan dat X_n naar X in L_p convergeert. Deze convergentie impliceert onder meer dat $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ en dat $\mathbb{E}|X_n|^q \to \mathbb{E}|X|^q, 1 \le q \le p$.

Stelling 3.2 *Zij $X : \Omega \to \mathbb{R}$ een toevalsvariabele met $\mathbb{E}[|X|] < \infty$.*
Dan bestaat er een "conditionele verwachting van X, gegeven $\mathcal{G}$", dwz een $\mathcal{G}$-meetbare toevalsvariabele $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ met $\mathbb{E}[|Z|] \le \mathbb{E}[|X|]$ die voldoet aan

$$\mathbb{E}[XI_G] = \mathbb{E}[ZI_G] \ \forall G \in \mathcal{G}$$

Bewijs (STAP 1) We bewijzen dit eerst als $\mathbb{E}[X^2] < \infty$. Stel

$$\alpha := \inf\{\mathbb{E}[(X - Y)^2] : Y : \Omega \to \mathbb{R} \ \mathcal{G}\text{-meetbaar en } \mathbb{E}[Y^2] < \infty\}.$$

Merk op dat $\alpha \le \mathbb{E}[X^2] < \infty$ (omdat $Y = 0$ een mogelijke keuze is). Dus kunnen we een rij Y_n $\mathcal{G}$-meetbare toevalsvariabelen vinden zodanig dat

$$\mathbb{E}[(X - Y_n)^2] \le \alpha + n^{-1}, n \ge 1.$$

Een toepassing van de triviale feit dat

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2), a, b \in \mathbb{R}$$

levert dat

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(Y_m - Y_n)^2] &= \mathbb{E}[(\{Y_m - X\} - \{Y_n - X\})^2] \\
&= 2\mathbb{E}[(Y_m - X)^2] + 2\mathbb{E}[(Y_n - X)^2] - \mathbb{E}[(2X - Y_n - Y_m)^2] \\
&\le 4\alpha + 2m^{-1} + 2n^{-1} - 4\mathbb{E}[(X - \{Y_n + Y_m\}/2)^2] \le 2(m^{-1} + n^{-1}),
\end{aligned}$$

waaruit blijkt dat $Y_n, n \ge 1$ een Cauchy-rij in $\mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ is. Aangezien deze ruimte compleet is, bestaat er een $\mathcal{G}$-meetbare toevalsvariabele Z zodanig dat $\mathbb{E}[Z^2] < \infty$ en $\|Y_n - Z\|_2 \to 0$. Met behulp van de driehoeksongelijkheid voor de semi-norm $\|\cdot\|_2$ volgt er

$$\|Z - X\|_2 \le \|Z - Y_n\|_2 + \|Y_n - X\|_2 \le \delta_n + \alpha^{1/2},$$

waar $\delta_n \to 0$ als $n \to \infty$. Dus hebben we $\alpha \le \mathbb{E}[(Z - X)^2] \le \alpha$.
Zij $G \in \mathcal{G}$ en $c \in \mathbb{R}$. Dan geldt er,

$$\alpha \le \mathbb{E}[(X - Z - cI_G)^2] = \mathbb{E}[(X - Z)^2] + c^2\mathbb{P}(G) - 2c\mathbb{E}[(X - Z)I_G],$$

en bijgevolg $c^2\mathbb{P}(G) - 2c\mathbb{E}[(X - Z)I_G] \ge 0, \forall c \in \mathbb{R}$, hetgeen impliceert dat

$$\mathbb{E}[XI_G] - \mathbb{E}[ZI_G] = 0, G \in \mathcal{G}.$$

Dus is Z een conditionele verwachting van X, gegeven $\mathcal{G}$.
Stel $G = \{Z \ge 0\}$. Dan hebben we wegens $G \in \mathcal{G}$

$$\mathbb{E}[|Z|] = \mathbb{E}[ZI_G] - \mathbb{E}[ZI_{G^c}] = \mathbb{E}[XI_G] + \mathbb{E}[(-X)I_{G^c}] \le \mathbb{E}[|X|]. \tag{3.2}$$

(STAP 2) Als $X \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ bestaat er een rij $X_n, n \geq 1$ in $\mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ zodanig dat $\|X_n - X\|_1 \to 0$ (Stel $X_n = XI_{\{|X| \leq n\}}, n \geq 1$ en gebruik de stelling van de gedomineerde convergentie).
Zij Z_n de conditionele verwachting van $X_n, n \geq 1$. Dan is ook $Z_m - Z_n$ de conditionele verwachting van $X_m - X_n, m, n \geq 1$ en betrekking (3.2) impliceert dat

$$\|Z_m - Z_n\|_1 \leq \|X_m - X_n\|_1 \to 0 \text{ als } m, n \to \infty.$$

Dus is $Z_n, n \geq 1$ een Cauchy-rij in $\mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ die naar een $Z \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ convergeert (omdat ook deze ruimte compleet is).
We kunnen nu (wegens convergentie in $\mathcal{L}_1$) concluderen dat

$$\mathbb{E}[ZI_G] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Z_n I_G] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n I_G] = \mathbb{E}[XI_G], G \in \mathcal{G},$$

wat toont dat Z de conditionele verwachting van X is.
Het argument in (3.2) werkt ook in het algemene geval zodat we altijd hebben:

$$\mathbb{E}[|Z|] \leq \mathbb{E}[|X|]$$

en de stelling is bewezen. □

Men kan verder tonen dat de conditionele verwachting van X gegeven $\mathcal{G}$ **uniek** is, bijna overal. We gebruiken zowel voor de unieke klasse van de $\mathcal{G}$-meetbare toevalsvariabelen die de bovenstaande eigenschap hebben als voor een willekeurige functie uit deze klasse dezelfde notatie, namelijk $\mathbb{E}[X\|\mathcal{G}]$.

Conditionele kansen zijn speciale gevallen van conditionele verwachtingswaarden: we definiëren voor $A \in \mathcal{F}$ de conditonele kans $\mathbb{P}(A\|\mathcal{G})$ op A gegeven een deel-σ-algebra $\mathcal{G}$ als $\mathbb{E}[I_A\|\mathcal{G}]$. Merk op dat deze $\mathcal{G}$-meetbare toevalsvariabelen zijn met waarden in $[0,1]$ en dat er geldt:

$$\int_G \mathbb{P}(A\|\mathcal{G}) d\mathbb{P} = \int_G \mathbb{E}[I_A\|\mathcal{G}] d\mathbb{P} = \int_G I_A d\mathbb{P} = \mathbb{P}(A \cap G), G \in \mathcal{G}.$$

We keren terug naar algemene conditionele verwachtingswaarden.

Gevolg 3.1 *Zij $X : \Omega \to \mathbb{R}$ een toevalsvariabele met $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ en $Y : \Omega \to \mathbb{R}^d$ een toevalsvector. Dan bestaat er een Borel-meetbare functie $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ zodanig dat*

$$\mathbb{E}[XI_{\{Y \in B\}}] = \int_B g(y) \mathbb{P}_Y(dy) \ \forall B \in \mathcal{R}^d.$$

Bewijs Uit de vorige stelling met $\mathcal{G} = \sigma\{Y\}$(= kleinste deel-$\sigma$-algebra van $\mathcal{F}$ waarvoor Y meetbaar is) blijkt dat er een $\sigma\{Y\}$-meetbare toevalsvariabele Z bestaat zodat geldt:

$$\mathbb{E}[XI_{\{Y \in B\}}] = \mathbb{E}[ZI_{\{Y \in B\}}] \ \forall B \in \mathcal{R}^d.$$

Men kan tonen dat elke $\sigma\{Y\}$-meetbare toevalsvariabele Z van de gedaante $g \circ Y$ moet zijn, waar $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ Borel-meetbaar is.
Een toepassing van de formule van de beeldmaat levert ten slotte dat

$$\mathbb{E}[ZI_{\{Y \in B\}}] = \mathbb{E}[(g \circ Y) I_{\{Y \in B\}}] = \int_B g(y) \mathbb{P}_Y(dy),$$

en het gevolg is bewezen. □

Opmerkingen

1. Deze functie g is uniek $\mathbb{P}_Y$-b.o. en we schrijven vaak $\mathbb{E}[X\|Y=y]$ voor $g(y)$.

2. De twee bovenstaande resultaten tonen aan dat conditionele verwachtingen bestaan, maar **niet** hoe men expliciete versies daarvan kan vinden. In bepaalde gevallen is dit wel mogelijk, bv. als Y discreet is, kunnen we $\mathbb{E}[X\|Y=y]$ op de volgende manier definiëren:
$$\mathbb{E}[X\|Y=y]=\begin{cases}\frac{1}{\mathbb{P}\{Y=y\}}\int_{\{Y=y\}}Xd\mathbb{P} & \text{als } \mathbb{P}\{Y=y\}>0\\ 0 & \text{elders}\end{cases}$$

3. Als $X:\Omega\to\mathbb{R}^k$ en $Y:\Omega\to\mathbb{R}^m$ gezamenlijk continu zijn met gezamenlijke dichtheidsfunctie $f:\mathbb{R}^{k+m}\to[0,\infty[$ en $h:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ en Borel-meetbare afbeelding is, kunnen we $\mathbb{E}[h(X)\|Y=y]$ via de conditionele dichtheidsfunctie definiëren.
Algemeen geldt er dan als $\mathbb{E}[|h(X)|]<\infty$,
$$\mathbb{E}[h(X)\|Y=y]=\begin{cases}\int_{\mathbb{R}^k}h(x)f_{X|Y}(x|y)dx & \text{als } f_Y(y)>0\\ 0 & \text{elders}\end{cases}$$
Hier is f_Y de marginale dichtheidsfunctie van Y en $f_{X|Y}(\cdot|y)=f(\cdot,y)/f_Y(y)$ de conditionele dichtheidsfunctie van X, gegeven $Y=y$.

Een speciaal geval daarvan zijn weer conditionele kansen die we met $\mathbb{P}(A\|Y=y)$ noteren. Dan geldt weer voor toevalsvectoren $Y:\Omega\to\mathbb{R}^d$ dat
$$\mathbb{P}(A\cap\{Y\in C\})=\int_C\mathbb{P}(A\|Y=y)\mathbb{P}_Y(dy), C\in\mathcal{R}^d.$$
We vermelden nu enkele algemene eigenschappen van conditionele verwachtingen.

Stelling 3.3
Gegeven X,Y integreerbare toevalsvariabelen en $\mathcal{G}$ een deel-σ-algebra van $\mathcal{F}$, geldt:
(i) $X=a$ *b.o.* $\Rightarrow\mathbb{E}[X\|\mathcal{G}]=a$ *b.o.*
(ii) $\mathbb{E}[aX+bY\|\mathcal{G}]=a\mathbb{E}[X\|\mathcal{G}]+b\mathbb{E}[Y\|\mathcal{G}]$ *b.o.*
(iii) $X\le Y$ *b.o.* $\Rightarrow\mathbb{E}[X\|\mathcal{G}]\le\mathbb{E}[Y\|\mathcal{G}]$ *b.o.*
(iv) $|\mathbb{E}[X\|\mathcal{G}]|\le\mathbb{E}[|X|\,\|\mathcal{G}]$ *b.o.*
(v) $X_n\to X$ *b.o.*, $|X_n|\le|Y|, n\ge1\Rightarrow\mathbb{E}[X_n\|\mathcal{G}]\to\mathbb{E}[X\|\mathcal{G}]$ *b.o.*
(vi) *Als X $\mathcal{G}$-meetbaar is en ook XY integreerbaar zijn, dan geldt er:*
$$\mathbb{E}[XY\|\mathcal{G}]=X\mathbb{E}[Y\|\mathcal{G}] \text{ b.o.}$$

Notatie Als $\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2$ deel-σ-algebra's van $\mathcal{F}$ zijn, noteren we de de σ-algebra voortgebracht door $\mathcal{G}_1\cup\mathcal{G}_2$ (i.e.,$\sigma(\mathcal{G}_1\cup\mathcal{G}_2)$) met $\mathcal{G}_1\vee\mathcal{G}_2$.

Stelling 3.4 (Rol van onafhankelijkheid)
(i) *Beschouw een integreerbare toevalsvariabele X en twee deel-σ-algebra's $\mathcal{G},\tilde{\mathcal{G}}$ van $\mathcal{F}$ zodanig dat $\tilde{\mathcal{G}}$ en $\sigma\{X\}\vee\mathcal{G}$ onafhankelijk zijn. Dan geldt bijna overal:*
$$\mathbb{E}[X\|\mathcal{G}\vee\tilde{\mathcal{G}}]=\mathbb{E}[X\|\mathcal{G}] \text{ en } \mathbb{E}[X\|\tilde{\mathcal{G}}]=\mathbb{E}[X].$$

(ii) *Als* $X : \Omega \to \mathbb{R}^{d_1}$ *en* $Y : \Omega \to \mathbb{R}^{d_2}$ *onafhankelijke toevalsvectoren zijn en verder* $h : \mathbb{R}^{d_1+d_2} \to \mathbb{R}$ *een Borel-meetbare afbeelding is zodanig dat* $\mathbb{E}[|h(X,Y)|] < \infty$, *geldt:*

$$\mathbb{E}[h(X,Y)\|Y = y] = \mathbb{E}[h(X,y)]\,\mathbb{P}_Y\text{- } b.o.$$

Deel (ii) van bovenstaande stelling impliceert dan ook dat als $h : \mathbb{R}^{d_1+d_2} \to \mathbb{R}$ een Borel-meetbare afbeelding, $A \in \mathcal{R}$ en $X : \Omega \to \mathbb{R}^{d_1}$ en $Y : \Omega \to \mathbb{R}^{d_2}$ onafhankelijke toevalsvectoren zijn, er geldt:

$$\mathbb{P}(h(X,Y) \in A\|Y = y) = \mathbb{P}(h(X,y) \in A)\ \ \mathbb{P}_Y - \text{bijna overal},$$

hetgeen verder impliceert dat

$$\mathbb{P}(h(X,Y) \in A, Y \in C) = \int_C \mathbb{P}(h(X,y) \in A)\mathbb{P}_Y(dy), C \in \mathcal{R}^d.$$

Kies $h(x,y) = x + y, x, y \in \mathbb{R}$ en $A =]-\infty, z]$. Dan zien we dat als $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ onafhankelijke toevalsvariabelen zijn, we voor $z \in \mathbb{R}$ hebben:

$$\mathbb{P}\{X + Y \le z, Y \in C\} = \int_C \mathbb{P}\{X \le z - y\}\mathbb{P}_Y(dy), C \in \mathcal{R},$$

hetgeen we reeds meerdere keren gebruikt hebben in hoofdstuk 2.

De volgende stelling heeft veel belangrijke toepassingen (onder meer in de martingaaltheorie).

Stelling 3.5 *Zij* $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$ *deel-*σ*-algebra's van* $\mathcal{F}$ *en* X *een integreerbare toevalsvariabele. Dan geldt:*

$$\mathbb{E}[X\|\mathcal{G}_1] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X\|\mathcal{G}_2]\|\mathcal{G}_1]\ \ b.o.$$

Als laatste stelling vermelden we nog Jensens ongelijkheid voor conditionele verwachtingen.

Stelling 3.6 (Ongelijkheid van Jensen voor conditionele verwachtingen)
Zij $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *convex en zij* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *een toevalsvariabele zodanig dat* X *en* $\phi(X)$ *integreerbaar zijn. Dan geldt:*

$$\phi(\mathbb{E}[X\|\mathcal{G}]) \le \mathbb{E}[\phi(X)\|\mathcal{G}]\ \ b.o.$$

Gevolg 3.2 *Zij* X *een toevalsvariabele met* $\mathbb{E}[|X|^\alpha] < \infty$, *waar* $\alpha \ge 1$. *Dan geldt:*

$$|\mathbb{E}[X\|\mathcal{G}]|^\alpha \le \mathbb{E}[|X|^\alpha\|\mathcal{G}]\ \ b.o.$$

3.3 Martingalen: discrete tijd

We noemen een niet-dalende rij $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots$ deel-σ-algebra's van $\mathcal{F}$ een **filtratie**.

Definitie 3.2 *Zij* $X_n, n \ge 0$ *een rij toevalsvariabelen. Deze heet een martingaal als er een filtratie* $\mathcal{F}_n, n \ge 0$ *bestaat zodanig dat voor* $n \ge 0$ *geldt:*

(i) X_n *is* $\mathcal{F}_n$*-meetbaar*
(ii) $\mathbb{E}[|X_n|] < \infty$
(iii) $\mathbb{E}[X_{n+1}\|\mathcal{F}_n] = X_n\ \ b.o.$

Opmerking Als $\{X_n\}$ een martingaal is, geldt er $\mathbb{E}[X_{n+k}\|\mathcal{F}_n] = X_n, \forall k \geq 1$. (Dit volgt via inductie uit (iii).) Dit impliceert natuurlijk ook dat $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_0], n \geq 1$. Men gebruikt martingalen als modellen voor de evolutie van het kapitaal van een speler op de discrete tijdstippen $1, 2, \ldots$ waar de martingaaleigenschap betekent dat het spel redelijk is en er ook geen strategie bestaat waarmee de speler met zekerheid winst kan maken. De deel-σ-algebra's $\mathcal{F}_n$ staan voor de informatie die we op de tijdstippen n hebben. X_0 is het startkapitaal van de speler (wat afhankelijk van het toeval kan zijn, bv het kan het resultaat zijn van een bezoek van een casino).

We bekijken nu enkele

Voorbeelden

1. Zij $\Delta_n, n \geq 0$ een rij onafhankelijke integreerbare toevalsvariabelen met $\mathbb{E}[\Delta_n] = 0, n \geq 1$. Dan is $X_n = \sum_{j=0}^n \Delta_j, n \geq 0$ een martingaal.

2. Algemener geldt: Als $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, n \geq 1$ een rij begrensde meetbare functies is en de toevalsvariabelen $\Delta_n, n \geq 0$ zoals boven zijn , dan is

$$X_0 := \Delta_0, X_n := X_{n-1} + f_n(\Delta_0, \ldots, \Delta_{n-1})\Delta_n, n \geq 1$$

een martingaal. Om dit aan te tonen, stellen we $\mathcal{F}_n = \sigma\{\Delta_0, \ldots, \Delta_n\}$ en we noteren we dat

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_{n+1}\|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[X_n + f_{n+1}(\Delta_0, \ldots, \Delta_n)\Delta_{n+1}\|\mathcal{F}_n] \\
&= X_n + f_{n+1}(\Delta_0, \ldots, \Delta_n)\mathbb{E}[\Delta_{n+1}\|\mathcal{F}_n] \\
&= X_n + f_{n+1}(\Delta_0, \ldots, \Delta_n)\mathbb{E}[\Delta_{n+1}] = X_n
\end{aligned}$$

3. Zij $Z_j, j \geq 0$ een rij onafhankelijke niet-negatieve, integreerbare toevalsvariabelen. Veronderstel dat $\mathbb{E}[Z_j] = 1, j \geq 1$. Dan is $X_n := \prod_{j=0}^n Z_j, n \geq 0$ een martingaal.

Definitie 3.3 *Zij $X_n, n \geq 0$ een rij integreerbare toevalsvariabelen.*
(i) *$\{X_n\}$ heet een benedenmartingaal (=submartingale, Eng.) indien er een filtratie $\mathcal{F}_n, n \geq 0$ bestaat zodanig dat X_n $\mathcal{F}_n$-meetbaar is en $\mathbb{E}[X_{n+1}\|\mathcal{F}_n] \geq X_n, n \geq 0$.*
(ii) *$\{X_n\}$ heet een $\mathcal{F}_n$-bovenmartingaal (=supermartingale, Eng.) indien er een filtratie $\mathcal{F}_n : n \geq 0$ bestaat zodanig dat X_n $\mathcal{F}_n$-meetbaar is en $\mathbb{E}[X_{n+1}\|\mathcal{F}_n] \leq X_n, n \geq 0$.*

Opmerkingen

1. Benedenmartingalen gebruikt men als modellen voor de evolutie van het kapitaal van een speler als het spel voordelig is voor hem of haar. Bij bovenmartingalen is het spel nadelig voor de speler.

2. $\{X_n\}$ is een bovenmartingaal $\Leftrightarrow$ $\{-X_n\}$ is een benedenmartingaal.

3. $\{X_n\}$ is een martingaal $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{X_n\} \text{ is zowel een bovenmartingaal} \\ \text{als een benedenmartingaal.} \end{array} \right.$

Voorbeeld

Zij $X_n = \sum_{j=0}^n \Delta_j, n \geq 0$, waar de toevalsvariabelen $\Delta_j, j \geq 0$ onafhankelijk en integreerbaar zijn. Dan geldt: $\{X_n\}$ is een boven-(beneden-)martingaal $\Longleftrightarrow \mathbb{E}[\Delta_j] \leq (\geq)\, 0, \forall\, j \geq 1$.

Stelling 3.7 *Zij $\{X_n\}$ een rij toevalsvariabelen zodanig dat $\phi(X_n)$ integreerbaar is, $\forall n \geq 0$, waar $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convex.*

(i) *Als $\{X_n\}$ een martingaal is, dan is $\{\phi(X_n)\}$ een benedenmartingaal.*

(ii) *Als $\{X_n\}$ een benedenmartingaal en ϕ ook* **monotoon niet-dalend** *is, dan is $\{\phi(X_n)\}$ weer een benedenmartingaal.*

Bewijs Dit volgt onmiddellijk uit Jensens ongelijkheid voor conditionele verwachtingen. □

Gevolg 3.3

(i) *Zij $\{X_n\}$ een martingaal zodanig dat $\mathbb{E}[|X_n|^p] < \infty, n \geq 0,$ waar $p \geq 1$. Dan is $\{|X_n|^p\}$ een benedenmartingaal.*

(ii) *$\{X_n\}$ is een benedenmartingaal $\Rightarrow$ $\{(X_n - a)^+\}$ is een benedenmartingaal ($\forall a \in \mathbb{R}$)*

We vermelden nog een belangrijke ongelijkheid.

Stelling 3.8 (Doob) *Zij $\{X_n : n \geq 0\}$ een niet-negatieve benedenmartingaal. Dan geldt er voor $\alpha > 0$,*

$$\mathbb{P}\left\{\max_{0 \leq j \leq n} X_j \geq \alpha\right\} \leq \alpha^{-1}\mathbb{E}[X_n I_{\{\max_{0\leq j \leq n} X_j \geq \alpha\}}] \leq \alpha^{-1}\mathbb{E}[X_n].$$

Via deze ongelijkheid kan men de volgende ongelijkheid voor verwachtingswaarden bewijzen.

Stelling 3.9 ($\mathbf{L_p}$-maximumongelijkheid)
Zij $\{X_n : n \geq 0\}$ een niet-negatieve benedenmartingaal. Dan geldt voor $p > 1$:

$$\mathbb{E}[\max_{0 \leq j \leq n} X_j^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[X_n^p].$$

Gevolg 3.4 *Zij $\{Y_n : n \geq 0\}$ een martingaal. Dan hebben we voor $p > 1$:*

$$\mathbb{E}[\max_{0 \leq j \leq n} |Y_j|^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[|Y_n|^p].$$

Om het gevolg te bewijzen, stellen we $X_n = |Y_n|$ in de L_p-maximumongelijkheid. ($\{X_n\}$ is dan een niet-negatieve benedenmartingaal. Zie gevolg 3.3.)
We noteren nog de volgende ongelijkheid voor martingalen $\{Y_n\}$ die we verkrijgen als we de ongelijkheid van Doob toepassen voor de benedenmartingaal $\{|Y_n|^p\}$,

Gevolg 3.5 *Zij $\{Y_n : n \geq 0\}$ een martingaal zodanig dat $\mathbb{E}[|Y_n|^p] < \infty$, waar $p \geq 1$. Dan geldt er voor $x > 0$:*

$$\mathbb{P}\left\{\max_{0 \leq j \leq n} |Y_j| \geq x\right\} \leq \mathbb{E}[|Y_n|^p]/x^p.$$

3.4 Martingalen: continue tijd

We noemen een klasse $\mathcal{F}_t, t \geq 0$ van deel-σ-algebra's van $\mathcal{F}$ een **filtratie** indien

$$s \leq t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t.$$

We kunnen dan (beneden; boven)martingalen met continue tijd analoog als in het discrete geval definiëren.

Definitie 3.4 *Een stochastisch proces $\{X_t : t \geq 0\}$ heet een martingaal indien er een filtratie $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ bestaat zodanig dat*

(i) X_t *is* $\mathcal{F}_t$*-meetbaar,* $t \geq 0$

(ii) $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty, t \geq 0.$

(iii) $\mathbb{E}[X_t \| \mathcal{F}_s] = X_s$, *b.o.* $(s \leq t)$

Als de paden $t \to X_t(\omega)$ *bijna overal continu zijn, spreekt men van een continue martingaal.*

Analoog zijn dan (continue) beneden- en bovenmartingalen gedefinieerd. Bv als (i) en (ii) geldig zijn en in plaats van voorwaarde (iiii) geldt:

$$\mathbb{E}[X_t \| \mathcal{F}_s] \leq X_s, s \leq t$$

spreekt men van een bovenmartingaal.

In het vervolg gaan we meestal de volgende filtratie gebruiken:

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{W_s : s \leq t\}, t \geq 0,$$

waar $\{W_t : t \geq 0\}$ een Brownse beweging is.

Algemeen is door elke stochastische proces $\{Y_t : t \geq 0\}$ een filtratie bepaald, namelijk: $\sigma\{Y_s : s \leq t\}, t \geq 0$. Zoals in het discrete geval gaan we $\sigma\{Y_s : s \leq t\}$ interpreteren als de informatie die op het moment t beschikbaar is over dit stochastisch proces.

Men gebruikt ook in deze context (dwz, continue tijd) martingalen (benedenmartingalen; bovenmartingalen) om de evolutie van het kapitaal van een speler te modelleren als het spel redelijk (voordelig; nadelig) is.

Stelling 3.10 *Zij $\{W_t : t \geq 0\}$ een Brownse beweging. Dan zijn de volgende stochastische processen continue martingalen:*

(a) $\{W_t, t \geq 0\}$

(b) $\{W_t^2 - t, t \geq 0\}$

(c) $\{\exp(\lambda W_t - \lambda^2 t/2) : t \geq 0\}$ *voor elke vaste* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Bewijs. We bewijzen enkel delen (a) en (b), waarbij we zoals boven aangeduid de door de Brownse beweging bepaalde filtratie gebruiken. Dan is eigenschap (i) evident. Eigenschap (ii) volgt ook onmiddellijk uit het feit dat W_t normaal$(0, t)$-verdeeld is en dus alle momenten van W_t eindig zijn. Verder hebben deze processen continue paden wegens de continuïteit van de paden van de Brownse beweging. Dus moeten we alleen nog de conditionele verwachtingen bepalen.

Voor (a) geldt wegens de lineariteit van de conditionele verwachting,

$$\mathbb{E}[W_t \| \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[W_s \| \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[W_t - W_s \| \mathcal{F}_s] = W_s + \mathbb{E}[W_t - W_s] = W_s,$$

waar we het triviale feit gebruikt hebben dat de conditionele verwachting gegeven $\mathcal{F}_s$ van een $\mathcal{F}_s$-meetbare toevalsvariabele gelijk aan deze toevalsvariabele is. Verder geldt

$$\mathbb{E}[W_t - W_s \| \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[W_t - W_s] = 0$$

omdat $W_t - W_s$ onafhankelijk van $\mathcal{F}_s$ is (een gevolg van conditie (ii) in de definitie van de Brownse beweging). Daarmee is het duidelijk dat $\{W_t : t \geq 0\}$ een martingaal is.
Analoog volgt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[W_t^2 - t \| \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[(W_s + \{W_t - W_s\})^2 \| \mathcal{F}_s] - t \\ &= \mathbb{E}[W_s^2 + 2W_s(W_t - W_s) + (W_t - W_s)^2 \| \mathcal{F}_s] - t \\ &= W_s^2 + 2\mathbb{E}[W_s(W_t - W_s) \| \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[(W_t - W_s)^2] - t = W_s^2 - s\end{aligned}$$

omdat wegens Stelling **??** en de onafhankelijkheid van $W_t - W_s$ en $\mathcal{F}_s$ geldt:

$$\mathbb{E}[W_s(W_t - W_s) \| \mathcal{F}_s] = W_s \mathbb{E}[W_t - W_s) \| \mathcal{F}_s] = W_s \mathbb{E}[W_t - W_s] = 0.$$

Daarmee is ook (b) bewezen. □

Zoals we Lemma 3.3 via Lemma 3.2 bewezen hebben, kunnen we versies van de ongelijkheden voor martingalen met discrete tijd voor continue martingalen verkrijgen.

Stelling 3.11 *Stel* $\{M_t : t \geq 0\}$ *een continue martingaal zodanig dat* $\mathbb{E}[|M_t|^p] < \infty$ *voor een* $p \geq 1$. *Dan geldt voor elke* $T > 0$, $\mathbb{P}\{\max_{0 \leq t \leq T} |M_t| \geq \lambda\} \leq \mathbb{E}[|M_T|^p]/\lambda^p$.
Verder geldt er als $p > 1$,

$$\mathbb{E}\left[\max_{0 \leq t \leq T} |M_t|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[|M_T|^p]$$

Referenties

Billingsley, P. (1995). *Probability and Measure* 3rd edition, Wiley. (→ Hoofdstukken 34/35)
Steele, M. (2001). *Stochastic Calculus and Financial Applications*, Springer.
(→ Hoofdstukken 2–4)

Hoofdstuk 4

Stochastische integralen (Inleiding)

4.1 Constructie

Zij $\{W_t : t \geq 0\}$ een Brownse beweging met filtratie $\mathcal{F}_t = \sigma\{W_s : s \leq t\}, t \geq 0$. Ons doel is voor bepaalde stochastische processen $f(t,\omega), t \geq 0$ een stochastisch integraal

$$\int_0^T f(t,\omega)dW_t(\omega)$$

te definiëren.
Hoewel de paden van de Brownse beweging continu zijn, kunnen we dit niet puntsgewijs (dus voor elke vast ω) via de gewone integratie theorie doen. Om deze theorie te kunnen toepassen, moet men een rechtscontinue functie F hebben die het verschil van de twee monotone rechts continue functies F_1, F_2 is. (Dan kan men $\int_0^T f(t)dF(t)$ als het verschil van de Lebesgue-Stieltjes integralen $\int_0^T f(t)dF_1(t)$ en $\int_0^T f(t)dF_2(t)$ definiëren.)
Aangezien de paden $t \to W_t(\omega)$ van de Brownse beweging zo'n representatie **niet** hebben, moeten we de stochastische integralen op een andere manier definiëren.
We bekijken eerst een klasse $\mathcal{H}^2([0,T])$ van stochastische processen $f(t,\omega) : 0 \leq t \leq T, \omega \in \Omega$, waar aan de volgende voorwaarden voldaan is:

1. $f : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ is $\mathcal{B}_T \otimes \mathcal{F}$-meetbaar, waarbij $\mathcal{B}_T$ de Borel delen van $[0,T]$ zijn.
2. $f_t := f(t,\cdot) : \Omega \to \mathbb{R}$ is $\mathcal{F}_t$-meetbaar voor $0 \leq t \leq T$.
3. $\mathbb{E}[\int_0^T f^2(t,\cdot)dt] < \infty$.

Voorwaarde (2) is meestal evident. Bv voldoet $W_{t/2}$ aan (2), maar niet $W_{2t}^2, 0 \leq t \leq T$. Voorwaarde (1) zegt dat $\{f_t : 0 \leq t \leq T\}$ een"meetbaar" proces is en dit is bv het geval als de paden van $f_t : 0 \leq t \leq T$ rechts- of linkscontinu zijn.
Verder kunnen we wegens (1) ook f^2 over $[0,T] \times \Omega$ integreren t.o.v. de productmaat $\lambda_T \otimes \mathbb{P}$. Via de stelling van Fubini volgt dan

$$\int_{[0,T]\times\Omega} f^2(t,\omega)\lambda_T \otimes \mathbb{P}(dt, d\omega) = \int_0^T \mathbb{E}[f_t^2]dt = \mathbb{E}[\int_0^T f^2(t,\cdot)dt] \tag{4.1}$$

en we zien dat (3) het kwadraat van de L_2-norm op de maatruimte $([0,T]\times\Omega, \mathcal{B}_T \otimes \mathcal{F}, \lambda_T \otimes \mathbb{P})$ is. We zullen deze L_2-norm als $\|\cdot\|_{2,*}$ noteren en nog altijd de L_2-norm op de kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ door $\|\cdot\|_2$ aanduiden.

Voorbeeld $W_t^2, 0 \leq t \leq T$ is een stochastisch proces in de klasse $\mathcal{H}^2([0,T])$.
Om dit in te zien, noteren we eerst dat de paden $t \to W_t^2$ continu zijn omdat dit een continue functie (het kwadraat) van de paden van de Brownse beweging is. Dit impliceert dat aan conditie (1) voldaan is.
Verder is het evident dat W_t^2 $\mathcal{F}_t$-meetbaar is voor $0 \leq t \leq T$.
Om (3) na te gaan, is het voldoende $\int_0^T \mathbb{E}[W_t^4]dt$ te berekenen (zie (4.1)). We gebruiken het feit dat $\mathbb{E}[Z^4] = 3$ als Z standaard normaal is. Het volgt dat

$$\int_0^T \mathbb{E}[W_t^4]dt = \int_0^T \mathbb{E}[(\sqrt{t}Z)^4]dt = \int_0^T 3t^2 dt = T^3 < \infty.$$

We gaan nu stochastische integralen definiëren. In een eerste stap bekijken we een deelklasse $\mathcal{H}_0^2([0,T])$ van $\mathcal{H}^2([0,T])$. Deze deelklasse bevat functies $f : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ waar, voor elke vaste $\omega \in \Omega$, $t \to f(t,\omega)$ een trapfunctie is. In dit geval kan men stochastische integralen op een directe en natuurlijke manier definiëren.
We zullen dan in een tweede stap de verkregen integraal op $\mathcal{H}_0^2([0,T])$ uitbreiden naar een integral op $\mathcal{H}^2([0,T])$.

Definitie 4.1
(i) $\mathcal{H}_0^2([0,T])$ *is de klasse van alle stochastische processen* $f(t,\omega) : 0 \leq t \leq T, \omega \in \Omega$ *die een representatie van de vorm*

$$\sum_{i=1}^n a_i(\omega) I_{]t_{i-1},t_i]}(t), 0 \leq t \leq T,$$

hebben waar $0 = t_0 < t_1 \ldots < t_n = T$ *en* $a_i : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$*-meetbare toevalsvariabelen zijn met* $\mathbb{E}[a_i^2] < \infty, 1 \leq i \leq n$.
(ii) *De stochastische integraal van* $f \in \mathcal{H}_0^2([0,T])$ *is de volgende toevalsvariabele:*

$$I(f)(\omega) := \sum_{i=1}^n a_i(\omega)(W_{t_i}(\omega) - W_{t_{i-1}}(\omega)), \omega \in \Omega.$$

Het is niet moeilijk te zien dat $\mathcal{H}_0^2([0,T]) \subset \mathcal{H}^2([0,T])$ en dat de integraal in (ii) ondubbelzinnig gedefinieerd is, maar meest belangrijk is dat de L_2-norm van $I(f)$ gelijk is aan deze van f zoals uit volgend lemma blijkt.

Lemma 4.1 *Als* $f \in \mathcal{H}_0^2([0,T])$*, geldt er:* $\|I(f)\|_2 = \|f\|_{2,*}$ *en* $\mathbb{E}[I(f)] = 0$.

Bewijs. Uit de onafhankelijkheid van $W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$ en $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$, volgt onmiddellijk dat

$$\mathbb{E}[a_i^2(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2] = \mathbb{E}[a_i^2]\mathbb{E}[(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2] = \mathbb{E}[a_i^2](t_i - t_{i-1}) < \infty, 1 \leq i \leq n, \tag{4.2}$$

hetgeen via de driehoeksongelijkheid voor $\|\cdot\|_2$ impliceert dat $\mathbb{E}[I(f)^2] < \infty$.
Analoog volgt er dat $\mathbb{E}[I(f)] = 0$. We kunnen dan verder concluderen dat

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[I(f)^2] &= \mathrm{Var}(I(f)) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(a_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})) \\ &\quad +2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{cov}(a_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}), a_j(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[a_i^2(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2] + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E}[a_i a_j (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})].\end{aligned}$$

Hier hebben we in de laatste stap gebruikt dat $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY]$ als $\mathbb{E}[Y] = 0$.
We berekenen nu de verwachtingswaarden van de producten rechts via conditioneren.
Dus zij $1 \le i < j \le n$. Dan geldt er:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[a_i a_j (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})] \\
= \; & \mathbb{E}[\mathbb{E}[a_i a_j (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) \| \mathcal{F}_{t_{j-1}}]] \\
= \; & \mathbb{E}[a_i a_j (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \mathbb{E}[W_{t_j} - W_{t_{j-1}} \| \mathcal{F}_{t_{j-1}}]] \text{ (Stelling ??)} \\
= \; & \mathbb{E}[a_i a_j (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \mathbb{E}[W_{t_j} - W_{t_{j-1}}]] = 0 \text{ (wegens onafhankelijkheid)}
\end{aligned}$$

Met behulp van (4.2) volgt dan dat

$$\mathbb{E}[I(f)^2] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[a_i^2](t_i - t_{i-1}) = \|f\|_{2,*}^2$$

en het lemma is bewezen. □

We hebben nog twee verdere lemma's nodig, waarvan het eerste een direct gevolg van de definitie is, terwijl het tweede lemma misschien het moeilijkste gedeelte van de constructie van stochastische integralen is. Voor het bewijs van dit laatste lemma verwijzen we naar de literatuur of naar meer gevorderde cursussen over stochastische processen.

Lemma 4.2 *De integraal $I(f), f \in \mathcal{H}_0^2([0,T])$ is lineair.*

Bewijs Oefening.

Lemma 4.3 *Zij $f \in \mathcal{H}^2([0,T])$. Dan bestaat er een rij $f_n \in \mathcal{H}_0^2([0,T])$ zodanig dat*

$$\|f_n - f\|_{2,*} \to 0 \text{ als } n \to \infty.$$

We kunnen nu tonen dat stochastische integralen voor functies in $\mathcal{H}^2([0,T])$ bestaan.

Stelling 4.1 *Zij $f \in \mathcal{H}^2([0,T])$ en zij $f_n \in \mathcal{H}_0^2([0,T])$ een rij die naar f in L_2 convergeert. Dan convergeren de stochastische integralen $I(f_n)$ in L_2 naar een toevalsvariabele $Z \in \mathcal{L}_2([0,T])$. Deze limiet is (bijna overal) uniek en onafhankelijk van de gekozen rij f_n. We noteren hem als $I(f)$ en noemen hem de* **Itô-integraal** *van f.*

Bewijs Aangezien $\|f_n - f\|_{2,*} \to 0$ als $n \to \infty$, volgt er dat $\|f_n - f_m\|_{2,*} \to 0$ als $n, m \to \infty$ en we hebben een Cauchyrij in $\mathcal{L}_2([0,T] \times \Omega, \mathcal{B}_T \otimes \mathcal{F}, \lambda_T \otimes \mathbb{P})$. Dan geldt ook

$$\|I(f_n) - I(f_m)\|_2 = \|I(f_n - f_m)\|_2 = \|f_n - f_m\|_{2,*} \to 0 \text{ als } n, m \to \infty$$

en we zien dat $I(f_n), n \ge 1$ een Cauchy-rij in $\mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ is. Deze ruimte is compleet en dus bestaat er een variabele $Z \in \mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ zodanig dat $I(f_n)$ naar Z in L_2 convergeert.
Het rest te tonen dat de limiet uniek is, bijna overal. Dus neem een tweede rij $g_n \in \mathcal{H}_0^2([0,T])$ zodanig dat $\|g_n - f\|_{2,*} \to 0$ als $n \to \infty$. Dan heeft de rij $I(g_n)$ ook een limiet Z' in $\mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
Verder hebben we voor $n \ge 1$,

$$\begin{aligned}
\|Z - Z'\|_2 &\le \|Z - I(f_n)\|_2 + \|Z' - I(g_n)\|_2 + \|I(f_n - g_n)\|_2 \\
&= \|Z - I(f_n)\|_2 + \|Z' - I(g_n)\|_2 + \|f_n - g_n\|_{2,*} \\
&\le \|Z - I(f_n)\|_2 + \|Z' - I(g_n)\|_2 + \|f_n - f\|_{2,*} + \|g_n - f\|_{2,*},
\end{aligned}$$

waar de vier laatste termen naar nul convergeren als $n \to \infty$. Dus geldt er $\|Z - Z'\|_2 = 0$, hetgeen natuurlijk impliceert dat $Z = Z'$ bijna overal. □

We merken op dat dit (zoals als stelling 3.2 over conditionele verwachtingen) in de eerste plaats een existentie-resultaat is. Dus om stochastische integralen te berekenen hebben we vaak andere technieken nodig (zoals de formule van Itô). Soms lukt het wel door een "goede" rij $f_n \in \mathcal{H}_0^2([0,T])$ te kiezen.

De volgende stelling toont onder meer dat $f \to I(f)$ een isometrie op $H^2([0,T])$ blijft.

Stelling 4.2 *Zij* $f, g \in \mathcal{H}^2([0,T])$.

(i) **(Lineariteit)** $I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(ii) **(Itô-isometrie)** $\|I(f)\|_2 = \|f\|_{2,*}$.

(iii) *Zij* f_n *een rij in* $\mathcal{H}^2([0,T])$ *zodanig dat* $\|f_n - f\|_{2,*} \to 0$ *als* $n \to \infty$. *Dan geldt er ook* $I(f_n) \to I(f)$ *in* L_2.

Bewijs (i) oefening

(ii) Kies een rij $f_n \in \mathcal{H}_0^2([0,T])$ die naar f in L_2 convergeert. Dan hebben we (wegens de driehoeksongelijkheid) dat $\|f_n\|_{2,*}$ naar $\|f\|_{2,*}$ convergeert. Aangezien ook $I(f_n)$ naar $I(f)$ in L_2 convergeert, kunnen we verder concluderen dat $\|I(f_n)\|_2$ naar $\|I(f)\|_2$ convergeert. We zien dat

$$\|I(f)\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|I(f_n)\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{2,*} = \|f\|_{2,*},$$

waarmee (ii) bewezen is.

(iii) Kies een rij $g_n \in \mathcal{H}_0^2([0,T])$ zodanig dat $\|f_n - g_n\|_{2,*} \le 1/n, n \ge 1$. Deze bestaat wegens lemma 4.3. Voor deze rij geldt dan uiteraard dat $\|g_n - f\|_{2,*} \to 0$ als $n \to \infty$ en we kunnen (zie definitie van de Itô-integraal) $I(f)$ als limiet van $I(g_n)$ in L_2 definieren. Wegens (i) en (ii) volgt dan verder dat

$$\begin{aligned}\|I(f) - I(f_n)\|_2 &\le \|I(f) - I(g_n)\|_2 + \|I(g_n) - I(f_n)\|_2 \\ &= \|I(f) - I(g_n)\|_2 + \|g_n - f_n\|_{2,*} \le \|I(f) - I(g_n)\|_2 + 1/n,\end{aligned}$$

en het is nu evident dat $I(f_n)$ naar $I(f)$ in L_2 convergeert. □

4.2 Het Itô-integraal proces

Gegeven een functie $f \in \mathcal{H}^2([0,T])$ kunnen we ook $fI_{[0,t]}, 0 \le t \le T$ bekijken en voor deze telkens de Itô-integraal $Z_t := I(fI_{[0,t]}), 0 \le t \le T$ bepalen. We verkrijgen dan een stochastisch proces. Dit is dan ook een $\mathcal{F}_t$-martingaal en als we Z_t goed definiëren (deze toevalsvariabelen zijn bijna overal uniek, dus niet overal bepaald) verkrijgen we een stochastisch proces met continue paden.

Het idee is dat we dit eerst voor $\mathcal{H}_0^2([0,T])$ doen - waar we een expliciete formule voor de Itô-integraal hebben - en dan de L_2-convergentie van een goed gekozen rij $f_n \in \mathcal{H}_0^2([0,T])$ naar $f \in \mathcal{H}^2([0,T])$ gebruiken.

Lemma 4.4 *Zij* $f \in \mathcal{H}_0^2([0,T]$. *Dan is* $Z_t = I(fI_{[0,t]}), 0 \le t \le T$ *een* $\mathcal{F}_t$*-martingaal met continue paden.*

Bewijs We hebben $f(u,\omega) = \sum_{i=1}^n a_i(\omega) I_{]t_{i-1},t_i]}(u)$, waar $0 = t_0 < \ldots < t_n = T$. Bovendien geldt ook $fI_{[0,t]} \in \mathcal{H}_0^2([0,T])$ en we zien dat er voor $t \in]t_{k-1}, t_k]$ en $1 \le k \le n$ geldt,

$$Z_t(\omega) = \sum_{i=1}^{k-1} a_i(\omega)(W_{t_i}(\omega) - W_{t_{i-1}}(\omega)) + a_k(\omega)(W_t(\omega) - W_{t_{k-1}}(\omega)), \omega \in \Omega,$$

waaruit blijkt dat dit proces continue paden heeft (omdat de paden van de Brownse beweging continu zijn.)
Aangezien de variabelen a_i $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$-meetbaar en dus ook $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$-meetbaar zijn als $1 \leq i \leq k$ zien we onmiddellijk dat Z_t $\mathcal{F}_t$-meetbaar is, $0 \leq t \leq T$.
Wegens de Itô-isometrie hebben we ook dat $\mathbb{E}[Z_t^2] = \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{E}[a_i^2](t_{i+1}-t_i)+\mathbb{E}[a_k^2](t-t_{k-1}) < \infty$, hetgeen natuurlijk impliceert dat $\mathbb{E}[|Z_t|] \leq \mathbb{E}[Z_t^2]^{1/2} < \infty, 0 \leq t \leq T$.
We moeten nog tonen: $\mathbb{E}[Z_t \| \mathcal{F}_s] = Z_s, 0 \leq s \leq t$.
Geval 1 $\boxed{s \in]t_{k-1}, t_k]}$
In dit geval is $\sum_{i=1}^{k-1} a_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$ $\mathcal{F}_s$-meetbaar en we kunnen concluderen dat

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_t \| \mathcal{F}_s] &= \sum_{i=1}^{k-1} a_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \mathbb{E}[a_k(W_t - W_{t_{k-1}}) \| \mathcal{F}_s] \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} a_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + a_k \mathbb{E}[(W_t - W_{t_{k-1}}) \| \mathcal{F}_s],
\end{aligned}$$

waar we gebruikt hebben dat a_k $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$-meetbaar en dus ook $\mathcal{F}_s$-meetbaar is.
Wegens $\mathbb{E}[(W_t - W_{t_{k-1}}) \| \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[W_t \| \mathcal{F}_s] - \mathbb{E}[W_{t_{k-1}} \| \mathcal{F}_s] = W_s - W_{t_{k-1}}$, hebben we $\mathbb{E}[Z_t \| \mathcal{F}_s] = Z_s$.

Geval 2 $\boxed{s \in]t_{j-1}, t_j], \text{ waar } 1 \leq j < k}$
In dit geval is $\sum_{i=1}^{j-1} a_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$ $\mathcal{F}_s$-meetbaar en bijgevolg,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_t \| \mathcal{F}_s] &= \sum_{i=1}^{j-1} a_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \\
&+ \sum_{i=j}^{k-1} \mathbb{E}[a_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \| \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[a_k(W_t - W_{t_{k-1}}) \| \mathcal{F}_s] \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} a_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + a_j \mathbb{E}[(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) \| \mathcal{F}_s] + \\
&+ \sum_{i=j+1}^{k-1} \mathbb{E}[a_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \| \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[a_k(W_t - W_{t_{k-1}}) \| \mathcal{F}_s] \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} a_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + a_j(W_s - W_{t_{j-1}}) + 0 = Z_s.
\end{aligned}$$

Hier hebben we gebruikt dat sommige conditionele verwachtingen gelijk aan nul zijn. Om dit in te zien, redeneren we zoals volgt als $k - j \geq 2$ en $j + 1 \leq i \leq k - 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[a_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \| \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[a_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \| \mathcal{F}_{t_{i-1}}] \| \mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}[a_i \mathbb{E}[W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \| \mathcal{F}_{t_{i-1}}] \| \mathcal{F}_s]] = \mathbb{E}[0 \| \mathcal{F}_s] = 0.
\end{aligned}$$

Analoog volgt dat $\mathbb{E}[a_k(W_t - W_{t_{k-1}}) \| \mathcal{F}_s] = 0$. □

Met behulp van het bovenstaande lemma kan men dan de volgende stelling bewijzen.

Stelling 4.3 *Zij* $f \in \mathcal{H}_2([0,T])$. *Dan kan men de Itô-integralen* $Z_t := I(f I_{[0,t]}), 0 \leq t \leq T$ *zo definiëren dat* $Z_t : 0 \leq t \leq T$ *een* $\mathcal{F}_t$*-martingaal is met continue paden. We noteren dit stochastisch proces als* $\int_0^t f(s,\cdot) dW_s(\cdot), 0 \leq t \leq T$ *en noemen het "Itô-integraal proces".*

Bewijs Kies een rij $f_n \in \mathcal{H}_0^2[0,T]$ zodanig dat $\|f_n - f\|_{2,*} \to 0$. Dan geldt natuurlijk uniform voor $t \in [0,T]$,

$$\|f_n\, I_{[0,t]} - f\, I_{[0,t]}\|_{2,*} \to 0. \tag{4.3}$$

Bijgevolg hebben we voor elke $t \in [0,T]$, $Z_t^{(n)} := I(f_n\, I_{[0,t]}) \to I(f\, I_{[0,t]})$ in L_2, hetgeen natuurlijk ook impliceert dat $Z_t^{(n)} \xrightarrow{\mathbb{P}} I(f\, I_{[0,t]})$.
Verder is $(Z_t^{(n)})_{0\le t\le T}$ een rij continue $\mathcal{F}_t$-martingalen en we kunnen via Doobs maximaal ongelijkheid concluderen dat voor $m,n \ge 1$,

$$\mathbb{P}\{\sup_{0\le t\le T} |Z_t^{(n)} - Z_t^{(m)}| \ge \epsilon\} \le \mathbb{E}[|Z_T^{(n)} - Z_T^{(m)}|^2]\epsilon^{-2} \le \|f_n - f_m\|_{2,*}^2 \epsilon^{-2}, \epsilon > 0 \tag{4.4}$$

Kies nu een deelrij $n_k \to \infty$ zodanig dat $\|f_n - f_{n_k}\|_{2,*} \le 2^{-3k}, n \ge n_k, k \ge 1$. Dan volgt onmiddellijk dat

$$\mathbb{P}\{\sup_{0\le t\le T} |Z_t^{(n_k)} - Z_t^{(n_{k+1})}| \ge 2^{-k}\} \le 2^{-k}, k \ge 1, \tag{4.5}$$

hetgeen via het Borel-Cantelli lemma impliceert dat bijna overal,

$$\sup_{0\le t\le T} |Z_t^{(n_k)}(\omega) - Z_t^{(n_{k+1})}(\omega)| \le 2^{-k}, k \ge k_0(\omega). \tag{4.6}$$

De conclusie is dat bijna overal, $t \to Z_t^{(n_k)}(\omega)$ een Cauchy-rij in $C[0,T]$ is. Deze ruimte is compleet (met de sup-norm). Dus bestaat er een stochastisch process $Z_t, 0 \le t \le T$ met continue paden zodanig dat bijna overal,

$$\sup_{0\le t\le T} |Z_t^{(n_k)}(\omega) - Z_t(\omega)| \to 0 \tag{4.7}$$

In het bijzonder hebben we voor elke $t \in [0,T]$ dat $Z_t^{(n_k)} \to Z_t$ bijna overal en dus ook in kans. Gezien $Z_t^{(n)} \xrightarrow{\mathbb{P}} I(f\, I_{[0,t]})$, volgt er dat $Z_t = I(f\, I_{[0,t]})$, bijna overal, $t \in [0,T]$.

We moeten nog tonen dat $Z_t, 0 \le t \le T$ een $\mathcal{F}_t$-martingaal is. Merk op dat

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{E}[Z_t^{(n)} \| \mathcal{F}_s] - \mathbb{E}[Z_t \| \mathcal{F}_s]\|_2^2 &= \|\mathbb{E}[Z_t^{(n)} - Z_t \| \mathcal{F}_s]\|_2^2 \\
&= \int \mathbb{E}[Z_t^{(n)} - Z_t \| \mathcal{F}_s]^2 d\mathbb{P} \\
&\le \int \mathbb{E}[(Z_t^{(n)} - Z_t)^2 \| \mathcal{F}_s] d\mathbb{P} \\
&= \|Z_t^{(n)} - Z_t\|_2^2 \to 0 \text{ als } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Dus, hebben we, $Z_s^{(n)} = \mathbb{E}[Z_t^{(n)} \| \mathcal{F}_s] \to \mathbb{E}[Z_t \| \mathcal{F}_s]$ in L_2 en tegelijkertijd (zie boven) $Z_s^{(n)} \to Z_s$ in L_2. Dit betekent dat $\mathbb{E}[Z_t \| \mathcal{F}_s] = Z_s$ bijna overal en we zien dat $Z_t, 0 \le t \le T$ inderdaad een martingaal is.□

Opmerking Zoals het mogelijk was de conditionele verwachtingen van $\mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uit te breiden naar $\mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ kunnen we ook Itô-integralen algemener definiëren voor stochastische processen $f : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ die aan voorwaarden (1) en (2) voldoen, maar in plaats van (3) is het reeds voldoende dat

$$\int_0^T f^2(t,\cdot) < \infty, \text{ bijna overal.}$$

In dit geval verkrijgen we ook een stochastisch proces $\int_0^t f(s,\cdot) dW_s(\cdot), 0 \le t \le T$ met continue paden, maar dit proces is in het algemeen **geen** martingaal meer.

4.3 Het berekenen van Itô-integralen

Het eerste resultaat toont dat men bepaalde Itô-integralen via een soort Riemann-som kan benaderen. Maar in tegenstelling tot de Riemann-integralen waar we $\int_0^T f(s)ds$ door sommen $\sum_{i=1}^n f(s_i)(t_i - t_{i-1})$ kunnen benaderen met s_i een willekeurig element uit het interval $[t_{i-1}, t_i]$, waar $0 = t_0 < \ldots < t_n = T$, lukt dit voor de stochastische integralen alleen als $s_i = t_{i-1}$.

Stelling 4.4 *Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu en zij $\{W_t : t \geq 0\}$ de Brownse beweging. Stel $t_{i,n} = Ti/n, 0 \leq i \leq n$. Dan geldt:*

$$\sum_{i=1}^n f(W_{t_{i-1,n}})(W_{t_{i,n}} - W_{t_{i-1,n}}) \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_0^T f(W_s)dW_s.$$

Bewijs We bewijzen dit onder de extra-voorwaarde dat f een compacte drager heeft, dus $f(u) = 0, u \notin [-M', M']$ voor een $M' > 0$.
In dit geval is f ook begrensd op $\mathbb{R}$ en $f(W_t), 0 \leq t \leq T$ zit in $\mathcal{H}^2([0,T])$. Verder geldt dan

$$\phi_n(t,\omega) := \sum_{i=1}^n f(W_{t_{i-1,n}}(\omega)) I_{]t_{i-1,n}, t_{i,n}]}(t) \in \mathcal{H}_0^2([0,T]), n \geq 1.$$

Wegens de continuïteit van de paden van de Brownse beweging en van de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, convergeert de rij $\phi_n(t,\omega)$ puntsgewijs naar $f(W_t(\omega))$. Gezien deze rij en de limiet daarvan begrensd blijven, kunnen we uit de stelling van de begrensde convergentie concluderen dat deze convergentie ook in L_p is en dit voor elke $p \geq 1$. Uit de definitie van de Itô-integraal volgt dan dat $I(\phi_n) = \sum_{i=1}^n f(W_{t_{i-1,n}})(W_{t_{i,n}} - W_{t_{i-1,n}})$ naar $I(f)$ convergeert in L_2 en dus ook in kans. $\square$

We zijn nu in staat een van de hoofdresultaten over stochastische integralen te bewijzen, namelijk de formule van Itô die de basis is voor de zogenoemde Itô-calculus. We zullen zien dat er een extra term verschijnt die er niet is als we de analoge formule voor Riemann-integralen bekijken. De reden daarvoor is dat de paden van de Brownse beweging te veel variatie hebben op intervallen van de lengte $1/n$, hetgeen ermee te maken heeft dat de paden van de Brownse beweging nergens differentieerbaar zijn.

Stelling 4.5 (Formule van Itô)
Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie die twee keer continu differentieerbaar is en zij $\{W_t : t \geq 0\}$ een Brownse beweging. Dan geldt voor elke $T > 0$,

$$f(W_T) = f(0) + \int_0^T f'(W_s)dW_s + \frac{1}{2}\int_0^T f''(W_s)ds.$$

Merk op dat de eerste integraal een stochastisch integraal is, terwijl we de tweede integraal (puntsgewijs) als een Riemann-integraal kunnen definiëren omdat $s \to f''(W_s(\omega))$ continu is voor elke $\omega \in \Omega$.
Vaak gebruiken we de Itô-formule om de stochastische integraal $\int_0^T f'(W_s)dW_s$ te berekenen. Een voorbeeld is $\int_0^T W_s dW_s$. Kiezen we in stelling 4.5 $f(t) = t^2/2$, volgt er dat

$$\int_0^T W_s dW_s = W_T^2/2 - \int_0^T 1ds/2 = (W_T^2 - T)/2.$$

Bewijs van stelling 4.5 We veronderstellen weer dat f een compacte drager heeft, hetgeen impliceert dat f, f' en f'' uniform begrensd zijn op gans $\mathbb{R}$.

Ons startpunt is Taylors stelling die onder de extra-voorwaarde impliceert dat

$$f(y) - f(x) = (y-x)f'(x) + \frac{1}{2}(y-x)^2 f''(x) + r(x,y), x, y \in \mathbb{R},$$

waar $|r(x,y)| \leq (y-x)^2 h(x,y)$ met een functie $h : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty[$ die uniform continu is. Bovendien geldt er $\|h\|_\infty = \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} |h(x,y)| < \infty$ en $h(x,x) = 0, x \in \mathbb{R}$.

Stel weer $t_{i,n} = Ti/n, 0 \leq i \leq n$. Dan kunnen we $f(W_T) - f(0)$ als een telescopische som opschrijven en bovenstaande formule toepassen. Op deze manier verkrijgen we dat

$$\begin{aligned} f(W_T) - f(0) &= \sum_{i=1}^n \{f(W_{t_{i,n}}) - f(W_{t_{i-1,n}})\} \\ &= \sum_{i=1}^n f'(W_{t_{i-1,n}})(W_{t_{i,n}} - W_{t_{i-1,n}}) \\ &\qquad + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n f''(W_{t_{i-1,n}})(W_{t_{i,n}} - W_{t_{i-1,n}})^2 \\ &\qquad + \sum_{i=1}^n r(W_{t_{i-1,n}}, W_{t_{i,n}}) \\ &=: A_n + B_n + C_n, n \geq 1. \end{aligned}$$

Uit stelling 4.4 volgt er dat $A_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_0^T f'(W_s)dW_s$ als $n \to \infty$.
Verder geldt er

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n f''(W_{t_{i-1,n}})(t_{i,n} - t_{i-1,n}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n f''(W_{t_{i-1,n}})\{(W_{t_{i,n}} - W_{t_{i-1,n}})^2 - (t_{i,n} - t_{i-1,n})\} \\ &=: B_{n,1} + B_{n,2}. \end{aligned}$$

Aangezien $t \to f''(W_t)$ continu is, kunnen we concluderen dat $B_{n,1} \to \int_0^T f''(W_s)ds/2$ bijna overal en dus ook in kans.
Het is nu voldoende te tonen dat $B_{n,2}$ en C_n in kans naar 0 convergeren. Dan volgt er dat $A_n + B_n + C_n$ in kans naar $\int_0^T f'(W_s)dW_s + \frac{1}{2}\int_0^T f''(W_s)ds$ convergeert. Aangezien $A_n + B_n + C_n = f(W_T) - f(0)$ voor elke $n \geq 1$ zien we dat de formule van Itô bijna overal geldt.

Zoals in het bewijs van Lemma 4.1 volgt er dat $\mathbb{E}[B_{n,2}] = 0$ en dat

$$\mathbb{E}[B_{n,2}^2] = \mathrm{Var}(B_{n,2}) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[f''(W_{t_{i-1,n}})^2]\mathrm{Var}((W_{t_{i,n}} - W_{t_{i-1,n}})^2).$$

Gebruiken we het feit dat $\mathrm{Var}(Z^2) = \mathbb{E}[Z^4] - (\mathbb{E}[Z^2])^2 = 2$ als $Z \sim$ normaal(0,1), kunnen we concluderen dat

$$\mathbb{E}[B_{n,2}^2] \leq \frac{1}{2}\|f''\|_\infty^2 \sum_{i=1}^n (t_{i,n} - t_{i-1,n})^2 = \frac{T^2}{2}\|f''\|_\infty^2 n^{-1},$$

hetgeen natuurlijk impliceert dat $B_{n,2} \to 0$ in L_2 en bijgevolg $B_{n,2} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

Om te tonen dat $C_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, kiezen we voor $0 < \epsilon < 1$ een $\delta = \delta_\epsilon > 0$ zodanig dat geldt $|h(x,y)| \le \epsilon^2$ als $|x-y| < \delta$. Dan volgt,

$$\begin{aligned}
|C_n| &\le \sum_{i=1}^n |r(W_{t_{i-1,n}}, W_{t_{i,n}})| \\
&\le \sum_{i=1}^n \{\epsilon^2 (W_{t_{i-1,n}} - W_{t_{i,n}})^2 + \|h\|_\infty (W_{t_{i-1,n}} - W_{t_{i,n}})^2 I_{\{|W_{t_{i-1,n}} - W_{t_{i,n}}| \ge \delta\}}\} \\
&\le \epsilon^2 \sum_{i=1}^n (W_{t_{i-1,n}} - W_{t_{i,n}})^2 + \|h\|_\infty \delta^{-2} \sum_{i=1}^n (W_{t_{i-1,n}} - W_{t_{i,n}})^4 \\
&=: C_{n,1}(\epsilon) + C_{n,2}(\epsilon).
\end{aligned}$$

Via Markovs ongelijkheid volgt dan verder dat

$$\mathbb{P}\{C_{n,1}(\epsilon) \ge \epsilon/2\} \le 2\epsilon \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(W_{t_{i-1,n}} - W_{t_{i,n}})^2] = 2\epsilon T$$

en

$$\mathbb{P}\{C_{n,2}(\epsilon) \ge \epsilon/2\} \le \frac{2\|h\|_\infty}{\epsilon\delta^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(W_{t_{i-1,n}} - W_{t_{i,n}})^4] = \frac{6\|h\|_\infty T^2}{\epsilon\delta^2} n^{-1}.$$

We zien nu dat voor grote n geldt,

$$\mathbb{P}\{|C_n| \ge \epsilon\} \le \mathbb{P}\{C_{n,1}(\epsilon) \ge \epsilon/2\} + \mathbb{P}\{C_{n,2}(\epsilon) \ge \epsilon/2\} \le 3\epsilon T.$$

Aangezien we ϵ willekeurig klein kunnen kiezen, impliceert dit dat $C_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, waarmee de formule van Itô onder de extra-voorwaarde dat f een compacte drager heeft, bewezen is. □

Referentie

Steele, M. (2001). *Stochastic Calculus and Financial Applications*, Springer.
(→ Hoofdstukken 6 en 8.1)