



Wiskundige Technieken

1. Integreer de volgende differentiaalvergelijkingen:

(a) $y' + 3x^2y = 3x^2$

(b) $y'' + 3y' + 2y = xe^x$

2. Bestaat er een vectorveld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zodat $\text{rot}(\vec{v}) = (x + y, x - z, y^3)$? Verklaar je antwoord.

3. Voor $p, q \in \mathbb{C}$ bekijken we de vierkantsvergelijking $z^2 + pz + q = 0$. Toon aan dat de volgende beweringen equivalent zijn:

(a) $p, q \in \mathbb{R}$, $D = p^2 - 4q \leq 0$ en minstens een van de twee wortels ligt op de eenheidscirkel;

(b) de twee wortels zijn mekaar complex toegevoegd en liggen op de eenheidscirkel;

(c) $p \in [-2, 2]$ en $q = 1$.

4. (a) Ontbind de veelterm $P(z) = z^5 - 1$ tot een product van 1 lineaire en 2 kwadratische reële factoren.

Aanwijzing: gebruik vraag 3 en het feit dat de nulpunten van P op de eenheidscirkel liggen.

(b) Ontbind dan P tot een product van vijf complexe lineaire factoren.

(c) Gebruik deze ontbinding om $\cos \frac{2\pi}{5}$ en $\sin \frac{2\pi}{5}$ te bepalen.

5. A en B zijn twee verschillende punten in het vlak, en R is een getal groter dan de helft van de afstand tussen A en B . S is een van de twee snijpunten van de cirkels C_1 en C_2 , met middelpunten A en B en straal R . Gebruik vectorrekening om aan te tonen dat S op de middelloodlijn van het lijnstuk $[A, B]$ ligt.

Oplossingen

1a. We integreren eerst de geassocieerde homogene vergelijking:

$$y' + 3x^2y = 0$$

$$\frac{dy}{y} = -3x^2 dx$$

$$\ln y = -x^3 + \ln c$$

$$y_h = ce^{-x^3}$$

We zoeken dan een particuliere oplossing met de methode van de variatie van de constante:

$$y_p = c(x)e^{-x^3}$$

Substitutie in de vergelijking levert

$$c'(x)e^{-x^3} = 3x^2$$

$$c'(x) = 3x^2 e^{x^3}$$

$$c(x) = e^{x^3}$$

$$y_p = e^{x^3} e^{-x^3} = 1$$

De algemene integraal van de differentiaalvergelijking is dus:

$$y = 1 + ce^{-x^3}$$

1b. We integreren eerst de geassocieerde homogene vergelijking:

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

De karakteristieke vergelijking

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

heeft als wortels $\lambda = -1$ en $\lambda = -2$ zodat

$$y_h = Ae^{-2x} + Be^{-x}$$

Omdat 1 geen wortel is van de karakteristieke vergelijking zoeken we een particuliere integraal van de vorm

$$y_p = (Ax + B)e^x$$

We berekenen

$$y_p' = (Ax + A + B)e^x$$

$$y_p'' = (Ax + 2A + B)e^x$$

Substitutie in de vergelijking geeft:

$$y_p'' + 3y_p' + 2y_p = (6Ax + 6B + 5A)e^x = xe^x$$

Hieraan is voldaan als $6A = 1$ en $6B + 5A = 0$, of $A = 1/6$, $B = -5/36$, zodat

$$y_p = \left(\frac{x}{6} - \frac{5}{36}\right)e^x$$

$$y = Ae^{-2x} + Be^{-x} + \left(\frac{x}{6} - \frac{5}{36}\right)e^x$$

2. Nee. Anders zou

$$0 = \operatorname{div} \operatorname{rot} (\vec{v}) = 1.$$

3. (a) \Rightarrow (b). Omdat de coëfficiënten $p, q \in \mathbb{R}$, en $D \leq 0$ zijn de twee nulpunten complex toegevoegd. Aangezien het eerste nulpunt op de eenheidscircel ligt, ligt het tweede, complex toegevoegde van het eerste, ook op de eenheidscircel.

(b) \Rightarrow (c). Stel $z_1 = e^{i\alpha}$, $z_2 = e^{-i\alpha}$. De vierkantsvergelijking is dan

$$z^2 + pz + q = (z - z_1)(z - z_2) = (z - e^{i\alpha})(z - e^{-i\alpha}) = z^2 - 2\cos\alpha + 1 = 0$$

Dan is $p = -2\cos\alpha \in [-2, 2]$ en $q = 1$.

(c) \Rightarrow (a). De discriminant van de vergelijking $z^2 + pz + 1 = 0$ is $D = p^2 - 4 \leq 0$, en dus zijn de twee wortels toegevoegd complex. Onderstel dat de eerste wortel $z_1 = re^{i\alpha}$ is. Dan is de tweede $z_2 = \bar{z}_1 = re^{-i\alpha}$, en uit de productregel voor de wortels volgt dat $z_1 z_2 = r^2 = 1$. Maar dan is $r = 1$, en z_1 ligt op de eenheidscircel.

4a. Het is duidelijk dat

$$P(z) = z^5 - 1 = (z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$$

We moeten de veelterm $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ schrijven als een product van twee kwadratische factoren. De complexe nulpunten van deze veelterm zijn de vier complexe vijfde machtswortels van 1 die verschillend zijn van 1. Deze zijn twee aan twee complex toegevoegd. Als z_1 een van deze vijfde machtswortels is, dan is dus, vanwege oefening 3,

$$(z - z_1)(z - \bar{z}_1) = z^2 + pz + 1,$$

waarbij $p \in [-2, 2]$. De gezochte ontbinding is dus van de vorm

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = (z^2 + pz + 1)(z^2 + p'z + 1)$$

We vermenigvuldigen het rechterlid uit, en identificeren de coëfficiënten:

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = z^4 + (p + p')z^3 + (2 + pp')z^2 + (p + p')z + 1$$

Hieraan is voldaan als

$$p + p' = 1 \quad \text{en} \quad pp' = -1$$

p en p' zijn dan de oplossingen van de vierkantsvergelijking

$$x^2 - x - 1 = 0$$

We vinden

$$p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} ; p' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

De gevraagde ontbinding is

$$z^5 - 1 = (z - 1)\left(z^2 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}z + 1\right)\left(z^2 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}z + 1\right)$$

4b. We zoeken eerst de wortels van de vergelijking

$$z^2 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}z + 1 = 0$$

De discriminant is

$$D = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} - 4 = \frac{-10 + 2\sqrt{5}}{4}$$
$$z_{12} = -\frac{1 + \sqrt{5}}{4} \pm i \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} = e^{\pm 4\pi i/5}$$

Vervolgens bepalen we de wortels van

$$z^2 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}z + 1 = 0$$

De discriminant is

$$D = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} - 4 = \frac{-10 - 2\sqrt{5}}{4}$$
$$z_{34} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \pm i \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} = e^{\pm 2\pi i/5}$$

De gevraagde ontbinding is nu

$$z^5 - 1 = (z - 1)(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$$

waarbij de z_i als hierboven.

4c. Uit bovenstaande formule volgt onmiddellijk dat

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \quad \text{en} \quad \sin \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

5. Eerste manier Neem het midden M van het lijnstuk $[A, B]$. We moeten aantonen dat $\vec{AM} \perp \vec{SM}$.
Neem de oorsprong in A .

$$\begin{aligned} \|\vec{AS}\| = \|\vec{BS}\| &\implies \vec{S}^2 = (\vec{S} - \vec{B})^2 = \vec{S}^2 + \vec{B}^2 - 2\vec{S} \cdot \vec{B} \\ &\implies \vec{B}^2 = 2\vec{S} \cdot \vec{B} \\ \|\vec{AM}\| = \|\vec{MB}\| &\implies \vec{M}^2 = (\vec{M} - \vec{B})^2 = \vec{M}^2 + \vec{B}^2 - 2\vec{M} \cdot \vec{B} \\ &\implies \vec{B}^2 = 2\vec{M} \cdot \vec{B} \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat

$$\vec{M} \cdot \vec{B} = \vec{S} \cdot \vec{B}$$

en

$$0 = (\vec{M} - \vec{S}) \cdot \vec{B} = \vec{SM} \cdot \vec{AB}$$

Tweede manier In S nemen we de loodlijn op de rechte AB , en we onderstellen dat die AB snijdt in het punt M . We moeten dan bewijzen dat M het midden van het lijnstuk $[A, B]$ is. We hebben dat $\vec{AS}^2 = \vec{BS}^2$. Omdat $AB \perp SM$ geldt bovendien

$$\vec{SA} \cdot \vec{SM} = \vec{SM}^2 = \vec{SB} \cdot \vec{SM}$$

Tenslotte

$$\begin{aligned} A\vec{M}^2 &= (\vec{AS} + \vec{SM})^2 \\ &= \vec{AS}^2 + 2\vec{AS} \cdot \vec{SM} + \vec{SM}^2 \\ &= \vec{BS}^2 + 2\vec{BS} \cdot \vec{SM} + \vec{SM}^2 \\ &= (\vec{BS} + \vec{SM})^2 \\ &= B\vec{M}^2 \end{aligned}$$