Vrije Universiteit Brussel

1ste Bachelor Ingenieurswetenschappen
Academiejaar 2008-2009
1ste semester
3 november 2008

Wiskundige Technieken

1. Bepaal de rechte in het vlak $-5x + 3y - z = 1$ die de rechte met vectorvergelijking
$$\vec{x}(t) = (0, 4, -3) + t(2, -1, 1)$$
$(t \in \mathbb{R})$ orthogonaal snijdt.

2. Zij $z = \sin(x^2 + y^2)$. Toon aan dat z voldoet aan de vergelijking
$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4xyz = 0.$$

3. (a) Los op over $\mathbb{C}$: $z^4 = i$.
   (b) Als we 3 verschillende oplossingen van de vergelijking $z^4 = i$ grafisch voorstellen in het complexe vlak, van welke meetkundig figuur vormen zij dan de hoekpunten?

4. Los de volgende differentiaalvergelijking op.
$$y'' - 2y' + 10y = 6e^x \cos(3x)$$

5. Bepaal de vergelijking van de kromme $y = y(x)$ die voldoet aan $y' = x^3 + x^3 y$ en door het punt $(0, -3)$ gaat.

Veel succes!

Oplossingen

1. De gevraagde rechte gaat door het snijpunt $\vec{a}$ van de gegeven rechte en het gegeven vlak. Om de coördinaten van dit snijpunt te bepalen, substitueren we de vergelijking van de rechte

$$x = 2t, \;\; y = 4t, \;\; z = -3 + t$$

in de vergelijking van het vlak. Dit geeft

$$-10t + 12 - 3t + 3 - t = 1,$$

of $-14t = -14$, of $t = 1$. We vinden dat $\vec{a} = (2, 3, -2)$.
Stel nu dat $\vec{d} = (a, b, c)$ een richtingsvector is van de gevraagde rechte. Omdat $\vec{d}$ loodrechte staat op de gegeven rechte, die richtingsvector $(2, -1, 1)$ heeft, hebben we

$$2a - b + c = 0$$

Omdat $\vec{d}$ evenwijdig is met het gegeven vlak, hebben we

$$-5a + 3b - c = 0$$

Oplossen van deze twee vergelijkingen geeft

$$\vec{d} = (2, 3, -1)$$

Een vectorvergelijking van de gezochte rechte is dus

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

of

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + 3t \\ z = -2 - t \end{cases}$$

$$2. \quad y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4xyz$$
$$= \quad 2xy\cos(x^2 + y^2) - 2xy\cos(x^2 + y^2) - 4xy\sin(x^2 + y^2) + 4xy\sin(x^2 + y^2) = 0.$$

3. Een eerste oplossing is

$$z_1 = e^{\frac{i\pi}{8}} = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}.$$

We bepalen nu $\cos(\pi/8)$ en $\sin(\pi/8)$, met behulp van de formules voor de dubbele hoek:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} = 2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{\pi}{8},$$

zodat

$$2\cos^2\frac{\pi}{8} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ en } 2\sin^2\frac{\pi}{8} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2},$$

waaruit volgt dat

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \text{ en } \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

We besluiten dat

$$z_1 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

De overige wortels vinden we door z_1 te vermenigvuldigen met de vierdemachtswortels uit 1, namelijk $1,\ i,\ -1$ en $-i$. Dit geeft

$$z_2 = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

en $z_3 = -z_1$, $z_4 = -z_2$. De vier wortels liggen op de hoekpunten van een vierkant. Drie van de vier wortels vormen dus een rechthoekige, gelijkbenige driehoek.

4. De karakteristieke vergelijking van de geassocieerde homogene vergelijking is

$$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$$

en heeft als oplossingen $\lambda = 1 \pm 3i$. De integraal van de homogene vergelijking is dus

$$y_h = e^x(A\cos 3x + B\sin 3x).$$

We zoeken dan een particuliere integraal van de vorm

$$y_p = xe^x(A\cos 3x + B\sin 3x).$$

We berekenen dan dat

$$y_p'' - 2y_p' + 10y_p = -6Ae^x\sin(3x) + 6Be^x\cos(3x),$$

en dit is gelijk aan het rechterlid van de vergelijking als $A = 0$, $B = 1$. We vinden dus

$$y_p = xe^x\sin(3x)$$

en de algemene integraal van de vergelijking is

$$y = e^x(A\cos 3x + (B+x)\sin 3x).$$

5. We lossen eerst de homogene vergelijking

$$y' - x^3y = 0,$$

met behulp van de methode van de gescheiden veranderlijken: achtereenvolgens hebben we

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^3y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = x^3\mathrm{d}x$$

$$\ln y = \frac{x^4}{4} + \ln c$$

$$y = ce^{\frac{x^4}{4}}.$$

Een particuliere oplossing van de volledige vergelijking

$$y' - x^3 y = x^3$$

bepalen we met de methode van de variatie van de constante:

$$y_p = c(x)e^{\frac{x^4}{4}}.$$

Substitutie in de vergelijking levert

$$c'(x)e^{\frac{x^4}{4}} = x^3$$

$$c'(x) = x^3 e^{-\frac{x^4}{4}}$$

$$c(x) = \int x^3 e^{-\frac{x^4}{4}} \mathrm{d}x = -e^{-\frac{x^4}{4}} + c$$

We vinden $y_p = -1$ en

$$y = -1 + ce^{\frac{x^4}{4}}.$$

Omdat de gevraagde kromme door $(0, -3)$ gaat, hebben we dat $y(0) = 3$, zodat $-1 + 2c = -3$, en $c = -1$. De vergelijking van de gevraagde kromme is dus

$$y = -1 - e^{\frac{x^4}{4}}.$$