

## Oplossingen Toelatingsexamen Module B

1

$$f(x) = (ax + b)e^x + c \cos x + d \sin x$$

$$f'''(x) = (ax + b)e^x + 3ae^x + c \sin x - d \cos x$$

$$\begin{aligned} f'''(x) - f(x) &= 3ae^x + (c - d) \sin x - (c + d) \cos x \\ &= e^x - \sin x \end{aligned}$$

zodat

$$\begin{cases} 3a = 1 \\ c - d = -1 \\ c + d = 0 \end{cases} \quad \text{of} \quad \begin{cases} a = 1/3 \\ c = -1/2 \\ d = 1/2 \end{cases}$$

en dus is

$$f(x) = \left(\frac{x}{3} + b\right)e^x - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x$$

Uit  $y(0) = 0$  volgt dat  $b = 1/2$ , en dus

$$f(x) = \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{2}\right)e^x - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x$$

2 Uit  $f(0) = 0$  volgt

$$1 + l + m = 0 \tag{1}$$

We berekenen dat

$$f'(x) = \frac{ke^{kx} + le^x}{ne^{2x} + p} - \frac{2ne^{2x}(e^{kx} + le^x + m)}{(ne^{2x} + p)^2}$$

Als we rekening houden met (1), dan zien we

$$f'(0) = \frac{k+l}{n+p}$$

Omdat  $f'(0) = -1$  krijgen we

$$k + l + n + p = 0 \tag{2}$$

Als  $k > 2$  (resp.  $k < 2$ ), dan is

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty \text{ (resp. } 0),$$

en we concluderen dat  $k = 2$ . Dan is

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{n} = 2$$

en dus is  $n = 1/2$ . Als we  $k = 2$  invullen, dan vinden we

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{m}{p} = 2$$

en dus is  $m = 2p$ . Als we dit invullen in (1) en (2), dan vinden we

$$\begin{cases} 5/2 + l + p = 0 \\ 1 + l + 2p = 0 \end{cases}$$

waaruit nu gemakkelijk volgt dat

$$k = 2, l = -4, m = 3, n = 1/2, p = 3/2$$

en

$$f(x) = 2 \frac{e^{2x} - 4e^x + 3}{e^{2x} + 3}$$

Het tweede nulpunt wordt bereikt voor  $x = \ln 3$ .

**3**

$$\begin{aligned} I &= \pi \int_0^3 2x \left(1 - \frac{2x}{3} + \frac{x^2}{9}\right) dx \\ &= \pi \int_0^3 \left(2x - \frac{4x^2}{3} + \frac{2x^3}{9}\right) dx \\ &= \pi \left[ x^2 - \frac{4x^3}{9} + \frac{x^4}{18} \right]_0^3 \\ &= \pi \left(9 - 12 + \frac{9}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

We berekenen eerst dat

$$1 + f'(x)^2 = \frac{x^2 + 1}{2x}$$

zodat

$$\begin{aligned} O &= 2\pi \int_0^3 \sqrt{2x} \left(1 - \frac{x}{3}\right) \sqrt{\frac{x^2 + 1}{2x}} dx \\ &= 2\pi \left[ \frac{x}{2} \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{9} (x^2 + 1)^{3/2} \right]_0^3 \\ &= \pi \left( 3\sqrt{10} + \ln(3 + \sqrt{10}) - \frac{20}{9} \sqrt{10} + \frac{2}{9} \right) \\ &= \pi \left( \frac{7}{9} \sqrt{10} + \ln(3 + \sqrt{10}) + \frac{2}{9} \right) \end{aligned}$$

en dus

$$a = \frac{7}{9}, \quad b = 1, \quad c = \frac{2}{9}$$

4 De omtrek van het raam wordt gegeven door

$$l = \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)a + 2b, \text{ en dus is } b = \frac{1}{2}\left(l - \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)a\right)$$

Dan is de oppervlakte

$$S = ab + \frac{\pi a^2}{8}$$

en dus

$$\begin{aligned} 8S &= \pi a^2 + 8 \frac{a}{2} \left(l - \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)a\right) \\ &= (\pi - 4 - 2\pi)a^2 + 4al \\ &= 4al - (4 + \pi)a^2 \end{aligned}$$

Nodige voorwaarde voor een extremum is

$$8S' = 4l - 2(4 + \pi)a = 0, \text{ of } a = \frac{2l}{\pi + 4}$$

Omdat  $8S'' = -2(4 + \pi) < 0$  hebben we een maximum. De bijhorende waarde van  $b$  is

$$b = \frac{l}{\pi + 4}$$

en de maximale oppervlakte is

$$S_{\max} = \frac{l^2(2 + \pi/2)}{(\pi + 4)^2} = \frac{l^2}{2(4 + \pi)}$$

5 • De vergelijking van de raaklijn in  $(a, f(a))$  is

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

De raaklijn gaat dus door de oorsprong als en slechts als

$$f(a) = af'(a)$$

• De vergelijking van de normaal in  $(a, f(a))$  is

$$-f'(a)(y - f(a)) = x - a.$$

De raaklijn gaat dus door de oorsprong als en slechts als

$$f(a)f'(a) = -a. \tag{3}$$

•

$$\begin{aligned} a^4 + 6a^2 + 6 &= a(4a^3 + 12a) \\ \iff 3a^4 + 6a^2 - 6 &= 0 \\ \iff a^2 &= -1 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

De oplossing met het minteken is irrelevant. We vinden dus dat de raaklijn door de oorsprong gaat in de punten

$$\begin{cases} a = \pm \sqrt{\sqrt{3} - 1} \\ b = 4(1 + \sqrt{3}) \end{cases}$$

• Voorwaarde (3) wordt

$$(a^2 - \frac{3}{2})2a = -a, \text{ of } a^3 = a$$

Er zijn drie oplossingen:

$$a = 0, b = -3/2, \text{ normaal } x = 0$$

$$a = 1, b = -1/2, \text{ normaal } y = -x/2$$

$$a = -1, b = -1/2, \text{ normaal } y = x/2$$