1. De functie $f(x) = e^{kx} + ax + b$ met a, b en $k \in \mathbf{R}$ en $k < 0$ heeft een schuine asymptoot $y = x$ voor $x \to +\infty$ en voldoet aan de vergelijking

$$(D(f(x)))^2 + D\left((f(x))^2\right) + (f(x))^2 = (x+1)^2 .$$

Bepaal a, b en k.

Opmerking: Het symbool D staat voor de afgeleide, m.a.w. $D(g(x)) = g'(x)$.

Antwoord:

$a = 1$	$b = 0$	$k = -1$

Redenering/Berekeningen:

Vermits $k < 0$ geldt er dat $\lim_{x\to+\infty} e^{kx} = 0$. Uit de gegevens over de schuine asymptoot halen we dan dat

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{ax+b}{x} = a = 1 \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) - x &= \lim_{x\to+\infty} ax + b - x = b = 0\end{aligned}$$

Er geldt dus

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{kx} + x \\ f(x)^2 &= e^{2kx} + 2xe^{kx} + x^2 \\ D(f(x)) &= ke^{kx} + 1 \\ (D(f(x)))^2 &= k^2e^{2kx} + 2ke^{kx} + 1 \\ D\left((f(x))^2\right) &= 2ke^{2kx} + 2e^{kx} + 2xke^{kx} + 2x \end{aligned}$$

Dit alles ingevuld in de gegeven vergelijking resulteert dan na wat vereenvoudigingen tot de voorwaarde

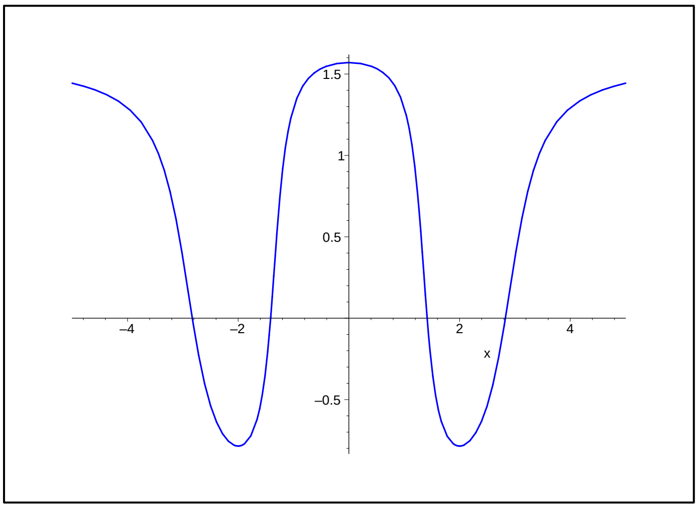
$$e^{2kx}(k+1)^2 + 2\, e^{kx}(k+1)(x+1) = 0$$

Vermits dit moet gelden voor elke waarde van x besluiten we dat $k = -1$.

2. De afgebeelde even functie is van de vorm

$$f(x) = \text{Bgtg}\left(\frac{x^4 + 2ax^2 + b}{cx^4 + dx^2 + e}\right).$$

Zij heeft een horizontale asymptoot $y = \frac{\pi}{2}$ voor $x \to \pm\infty$ en er geldt ook dat $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{\pi}{2}$. Gegeven is verder dat $\sqrt{2}$ een nulpunt is en dat $f(x)$ haar minimale waarde $-\frac{\pi}{4}$ bereikt voor $x = 2$. Bereken de parameters a, b, c, d en e en bepaal ook de drie andere nulpunten van $f(x)$. Hoeveel buigpunten heeft $f(x)$? (kijk op de figuur)



Antwoord:

$a = -5$	$b = 16$	$c = 0$	$d = 2$	$e = 0$

Redenering/Berekeningen:

Vermits $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$ en $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{\pi}{2}$ moet er gelden dat

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4 + 2ax^2 + b}{cx^4 + dx^2 + e} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4 + 2ax^2 + b}{cx^4 + dx^2 + e} = +\infty$$

en dit kan enkel als $c = 0$, respectievelijk $e = 0$. We vereenvoudigen

$$f(x) = \text{Bgtg}\left(\frac{x^4 + 2ax^2 + b}{dx^2}\right).$$

De overige onbekenden a, b en $d \neq 0$ berekenen we uit de voorwaarden

$$f(\sqrt{2}) = 0$$
$$f(2) = -\frac{\pi}{4}$$
$$f'(2) = 0$$

We werken dit verder uit.

Redenering/Berekeningen:

$$\begin{aligned} f(\sqrt{2}) &= \text{Bgtg}\left(\frac{4+4a+b}{2d}\right) = 0 \\ 4a+b &= -4 \qquad (1) \\ f(2) &= \text{Bgtg}\left(\frac{16+8a+b}{4d}\right) = -\frac{\pi}{4} \\ \frac{16+8a+b}{4d} &= -1 \\ 8a+b+4d &= -16 \qquad (2) \end{aligned}$$

De afgeleide

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x^4+2ax^2+b}{dx^2}\right)^2}\,\frac{dx^2(4x^3+4ax)-2xd(x^4+2ax^2+b)}{d^2x^4}$$

moet 0 zijn voor $x=2$ of

$$\begin{aligned} 4d(32+8a)-4d(16+8a+b) &= 0 \ \text{ of} \\ b &= 16 \end{aligned}$$

Uit (1) en (2) halen we dan verder

$$a = \frac{-4-b}{4} = -5 \quad \text{en} \quad d = \frac{-16-8a-b}{4} = 2$$

De 3 andere nulpunten zijn: $-\sqrt{2}$ | $\sqrt{8}$ | $-\sqrt{8}$

Redenering/Berekeningen:

$$\begin{aligned} x^4+2ax^2+b &= 0 \\ x^4-10x^2+16 &= 0 \\ x^2 &= 5 \pm \sqrt{25-16} \end{aligned}$$

of $x^2 = 8$ en $x^2 = 2$.

Het aantal buigpunten is 4

3. Zij $f(t)$ een periodiek tijdssignaal met periode T, dus $f(t+T) = f(t)$, dan noemt men

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, dt$$

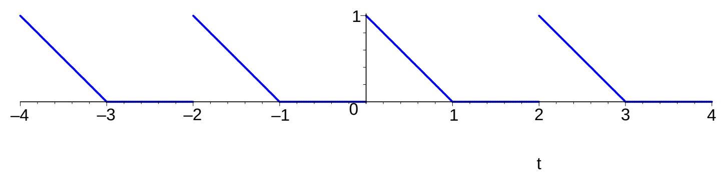
de gemiddelde waarde van f. We zeggen dat $g(t)$ met

$$g(t) = A\ \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \phi \right)$$

de fundamentele trilling van f is als $A \geq 0$ en $\phi \in]-\pi, \pi]$ de oplossing zijn van het stelsel

$$\begin{aligned} A\ \cos\phi &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t)\ \cos\frac{2\pi t}{T}\, dt \\ A\ \sin\phi &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t)\ \sin\frac{2\pi t}{T}\, dt\ . \end{aligned}$$

Beschouw dan het afgebeelde periodiek signaal met $T = 2$ zoals op de onderstaande figuur.



Bereken de gemiddelde waarde en de fundamentele trilling voor deze $f(t)$.

Antwoord:

gemiddelde waarde $\bar{f} = \frac{1}{4}$

Redenering/Berekeningen:

We bepalen eerst het functievoorschrift voor $f(t)$ op $[0, T] = [0, 2]$, nl.

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t & \text{als} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{als} \quad 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

Als gemiddelde waarde vinden we dan

$$\bar{f} = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t)\, dt\ =\ \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t)\, dt = \frac{1}{4}$$

fundamentele trilling $g(t)$: $\boxed{A = \dfrac{\sqrt{\pi^2+4}}{\pi^2} \simeq 0.377}$ $\boxed{\phi = \text{Bgtg}\dfrac{\pi}{2} \simeq 1.004}$

Redenering/Berekeningen:

Met behulp van partiële integratie berekenen we eerst

$$\begin{aligned}
\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\ \cos\frac{2\pi t}{T}\,dt &= \int_0^1 (1-t)\ \cos(\pi t)\,dt \\
&= (1-t)\ \frac{\sin(\pi t)}{\pi}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{\pi}\,dt \\
&= 0 - \frac{\cos(\pi t)}{\pi^2}\Big|_0^1 = \frac{2}{\pi^2}
\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\ \sin\frac{2\pi t}{T}\,dt &= \int_0^1 (1-t)\ \sin(\pi t)\,dt \\
&= -(1-t)\ \frac{\cos(\pi t)}{\pi}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\cos(\pi t)}{\pi}\,dt \\
&= \frac{1}{\pi} - \frac{\sin(\pi t)}{\pi^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{\pi}
\end{aligned}$$

A en ϕ moeten dus berekend worden als oplossing van het stelsel

$$\begin{aligned}
A\ \cos\phi &= \frac{2}{\pi^2} \\
A\ \sin\phi &= \frac{1}{\pi}
\end{aligned}$$

Door de som van de kwadraten te nemen vinden we

$$A^2\ \cos^2\phi + A^2\ \sin^2\phi = A^2 = \frac{4}{\pi^4} + \frac{1}{\pi^2}$$

en dus

$$A = \frac{\sqrt{\pi^2+4}}{\pi^2}$$

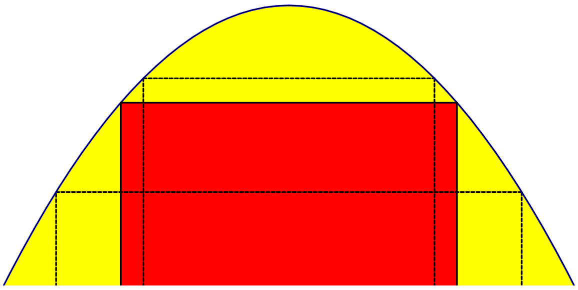
Anderzijds weten we dat

$$\text{tg}\phi = \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \frac{A\ \sin\phi}{A\ \cos\phi} = \frac{\frac{1}{\pi}}{\frac{2}{\pi^2}} = \frac{\pi}{2}$$

en dus

$$\phi = \text{Bgtg}\frac{\pi}{2}$$

4. Beschouw het gedeelte van de parabool met vergelijking $y = -ax^2 + b$, gelegen boven de x–as ($a > 0$ en $b > 0$). Een veranderlijke rechthoek kan ingeschreven worden binnen deze parabool zoals afgebeeld op de figuur.



a Bepaal de afmetingen van de rechthoek met maximale oppervlakte O_1.

b Bereken voor deze rechthoek ook de resterende oppervlakte O_2 onder de parabool (licht ingekleurd op de figuur) en toon aan dat de verhouding $p = \frac{O_2}{O_1}$ niet meer afhangt van a of b. Bereken de exacte waarde voor p en vereenvoudig het resultaat (zo weinig mogelijk vierkantswortels)!

Antwoord: a

hoogte = $\frac{2b}{3}$	$\times$	breedte = $2\sqrt{\frac{b}{3a}}$	=	$O_1 = \frac{4b}{3}\sqrt{\frac{b}{3a}}$

Redenering/Berekeningen:
We drukken de oppervlakte van de rechthoek uit in functie van de hoogte y. Noemen we de coordinaten van het hoekpunt rechtsboven x en y dan geldt het verband

$$y = -ax^2 + b \quad \text{of}$$
$$x = \sqrt{\frac{b-y}{a}}$$

en de oppervlakte van de rechthoek is

$$O(y) = 2xy = \frac{2}{\sqrt{a}} y \sqrt{b-y}$$

De hoogte y waarvoor de oppervlakte van de rechthoek maximaal is vinden we door te stellen dat $O'(y) = 0$ of uitgewerkt

$$\frac{2}{\sqrt{a}}\left(\sqrt{b-y} - \frac{y}{2\sqrt{b-y}}\right) = 0$$
$$y = \frac{2b}{3}$$

We kunnen dan ook de breedte berekenen van de rechthoek en de maximale oppervlakte

$$O_1 = O(\frac{2b}{3}) = \frac{4b}{3}\sqrt{\frac{b}{3a}}$$

Antwoord: b

resterende oppervlakte $O_2 = \frac{4b}{3}\sqrt{\frac{b}{a}}\ \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Redenering/Berekeningen:
De gevraagde oppervlakte is gelijk aan de oppervlakte onder de parabool verminderd met de oppervlakte van de rechthoek. De parabool snijdt de x–as in de punten $(\sqrt{\frac{b}{a}}, 0)$ en $(-\sqrt{\frac{b}{a}}, 0)$. De oppervlakte onder de parabool kan dan berekend worden als

$$O_3 = \int_{-\sqrt{\frac{b}{a}}}^{\sqrt{\frac{b}{a}}} (-ax^2 + b)\ dx \ = \ 2\ \int_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}} (-ax^2 + b)\ dx \ = \ \frac{4b}{3}\sqrt{\frac{b}{a}}$$

Het antwoord op de vraag is dus

$$O_2 = O_3 - O_1 = \frac{4b}{3}\sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{4b}{3}\sqrt{\frac{b}{3a}} = \frac{4b}{3}\sqrt{\frac{b}{a}}\ \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

de vereenvoudigde verhouding $p = \frac{O_2}{O_1} = \ \sqrt{3} - 1$

Redenering/Berekeningen:

$$p = \frac{O_2}{O_1} = \frac{\frac{4b}{3}\sqrt{\frac{b}{a}}\ \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\frac{4b}{3}\sqrt{\frac{b}{3a}}} = \frac{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3} - 1$$

5. Als gegeven is dat voor elke reële waarde van $q \neq 1$ en voor elk natuurlijk getal n geldt dat

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \ ,$$

bereken dan alle waarden van $x \in [0, \pi]$ waarvoor geldt dat

$$1 + \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \cdots + \cos^{11} x = \frac{3}{4} \ \left(1 + \cos^3 x + \cos^6 x + \cos^9 x\right) \ ,$$

en bereken voor die waarden dan ook telkens de overeenkomstige som van het linkerlid.
Hulp: Stel $y = \cos x$ en vereenvoudig linker– en rechterlid door gebruik te maken van de gegeven formule.

Antwoord:

waarden van x	overeenkomstige som
π	0
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{1365}{2048} \simeq 0.6665$

Redenering/Berekeningen:
Stellen we $y = \cos x$ dan wordt het linkerlid van de vergelijking

$$1 + y + y^2 + y^3 + \cdots + y^{11} = \frac{1 - y^{12}}{1 - y}$$

Het rechterlid kunnen we vereenvoudigen tot

$$\frac{3}{4} \ \left(1 + y^3 + y^6 + y^9\right) = \frac{3}{4} \ \left(1 + y^3 + (y^3)^2 + (y^3)^3\right) = \frac{3}{4} \ \frac{1 - (y^3)^4}{1 - y^3}$$

We zoeken dus de waarden van $y \neq 1$ waarvoor

$$\frac{1 - y^{12}}{1 - y} = \frac{3}{4} \ \frac{1 - y^{12}}{1 - y^3}$$

m.a.w. waarvoor

$$1 - y^{12} = 0 \quad \text{ofwel} \quad \frac{1 - y^3}{1 - y} = \frac{3}{4}$$

De eerste mogelijkheid leidt tot $\cos x = y = -1$ of $x = \pi$ en een overeenkomstige som 0. De tweede mogelijkheid leidt tot

$$\begin{aligned} 1 + y + y^2 &= \frac{3}{4} \\ (y + \frac{1}{2})^2 &= 0 \end{aligned}$$

en dus $\cos x = -\frac{1}{2}$ of $x = \frac{2\pi}{3}$ en een som

$$\frac{1 - (-1/2)^{12}}{3/2} = \frac{8190}{12288} = \frac{1365}{2048}$$