Vrije Universiteit Brussel

Wiskunde: Voortgezette Analyse

Oefeningen

S. Caenepeel

Oefeningen 116 bij IR-WISK 11453 “Wiskunde: Voortgezette Analyse”
Tweede Bachelor Ingenieurswetenschappen: Architectuur 2011

Reeks 1 Vectorruimten

Oefening 1.1 Stel $V = \mathcal{C}([a,b]) = \{f\colon [a,b] \to \mathbb{R} | f \text{ continu}\}$. Welk van de volgende verzamelingen zijn deelruimten van V?

1a $\{f \in \mathcal{C}([a,b]) | f(x) \geq 0, \forall x\}$;

1b $\{f \in \mathcal{C}([a,b]) | f \text{ is een constante functie}\}$;

1c $\{f \in \mathcal{C}([a,b]) | f(a) = 0\}$;

2a $\{f \in \mathcal{C}([a,b]) | f(a) = 5\}$;

2b $\{f \in \mathcal{C}([a,b]) | f \text{ heeft overal een eindige afgeleide}\}$;

2c $\{\alpha + \beta \sin(x) | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$;

3a $\{f \in \mathcal{C}([a,b]) | f \text{ is afleidbaar in 1 en } f'(1) = 0\}$ (onderstel $1 \in (a,b)$);

3b $\{f \in \mathcal{C}([a,b]) | f \text{ is afleidbaar in 1 en } f'(0) = 1\}$ (onderstel $0 \in (a,b)$);

3c $\{f \in \mathcal{C}([a,b]) | f(\frac{a+b}{2} + x) = f(\frac{a+b}{2} - x)\}$;

4a $\{f \in \mathcal{C}([a,b]) | f(a) = f(b)\}$;

4b $\{f \in \mathcal{C}([a,b]) | f \text{ heeft een rechterafgeleide in } a \text{ en } f'_+(a) = f(b)\}$;

4c $\{f \in \mathcal{C}([b,c]) | f \text{ is tweemaal afleidbaar in } a \text{ en } f(a) + f'(a) + f''(a) = 0\}$ (onderstel $a \in (b,c)$).

Oefening 1.2 Welk van de volgende verzamelingen zijn deelruimten van de vectorruimte $\mathbb{R}[X]$?

1a $\{P \in \mathbb{R}[X] | \mathrm{gr}(P) \text{ even}\}$;

1b $\{P \in \mathbb{R}[X] | P'(X) = 0\}$;

1c $\{a + bX^3 | a, b \in \mathbb{R}\}$;

2a $\{a + bX + cX^2 + dX^3 | a + b + c + d = 0\}$;

2b $\{P \in \mathbb{R}[X] | 1 \text{ is een nulpunt van } P\}$;

2c $\{P \in \mathbb{R}[X] | \mathrm{gr}(P) > 2\}$;

3a $\{P \in \mathbb{R}[X] | \mathrm{gr}(P) < 2\}$;

3b $\{P \in \mathbb{R}[X] | \mathrm{gr}(P) = 2\}$;

3c $\{P \in \mathbb{R}[X] | \text{de rest bij deling door } X^2 + X + 1 \text{ is } 0\}$;

4a $\{P \in \mathbb{R}[X] | \text{de rest bij deling door } X^2 + X + 1 \text{ is } 1\}$;

4b $\{P \in \mathbb{R}[X] | \mathrm{gr}(P) \text{ is oneven}\}$;

4c $\{P \in \mathbb{R}[X] | P(X) = P(-X)\}$.

Oefening 1.3a Een goniometrische veelterm is een functie van de vorm

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{i} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Toon aan dat de verzameling der goniometrische veeltermen een vectorruimte is.

Oefening 1.3b We noteren met $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de verzameling van alle rijtjes met waarden in $\mathbb{R}$. Op $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definiëren we de volgende bewerkingen:

$$\begin{aligned} (a_0, a_1, \cdots) + (b_0, b_1, \cdots) &= (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \cdots) \\ \alpha(a_0, a_1, \cdots) &= (\alpha a_0, \alpha a_1, \cdots) \end{aligned}$$

voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$ en $(a_0, a_1, \cdots), (b_0, b_1, \cdots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Toon aan dat $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ een vectorruimte is.

Oefening 1.3c Een functie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ wordt een trapfunctie genoemd indien er een partitie $P = (a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = b)$ zodat f constant is op elk van de intervallen (x_{i-1}, x_i), voor $i = 1, 2, \cdots, m$. Toon aan dat de verzameling van de trapfuncties op $[a,b]$ een vectorruimte vormen.

Oefening 1.4 Welk van de volgende verzamelingen zijn deelruimten van $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

1a De verzameling der begrensde rijtjes;

1b de verzameling der rijtjes waarvan de limiet 1 is;

1c de verzameling der rijtjes waarvan de limiet 0 is;

2a de verzameling der rijtjes waarvan slechts een eindig aantal termen verschillend van nul zijn;

2b de verzameling der rijtjes waarvan de eerste tien termen allemaal nul zijn;

2c de verzameling der rijtjes waarvan de tweehonderdste term 0 is;

3a de verzameling der rijtjes waarvan de tweehonderdste term 1 is;

3b de verzameling van alle convergente rijtjes;

3c de verzameling van alle divergente rijtjes.

Oefening 1.5 Welke van de volgende deelverzamelingen van $\mathbb{R}^3$ zijn lineair onafhankelijk?

1a $\{(0,0,0)\}$;

1b $\{(1,1,1), (2,2,2)\}$;

1c $\emptyset$;

2a $\{(1,1,0),(0,2,3),(1,2,3),(3,6,6)\}$;

2b $\{(1,1,0),(3,4,2)\}$;

2c $\{(1,1,0),(0,2,3),(1,2,3),(0,0,0)\}$

Oefening 1.6 Welke van de volgende deelverzamelingen van $\mathbb{R}[X]$ zijn lineair onafhankelijk?

1a $\{1,X,X^2\}$;

1b $\{0,X\}$;

1c $\{X^6,X^6+1,X^6+2\}$;

2a $\{X^2+1,X^2-1,X\}$;

2b $\{1,X+1,X-1,X^2-1,X^2+1\}$;

2c $\{X^2+X+1,X^2-X-1,X+1\}$

Oefening 1.7 Welke van de volgende deelverzamelingen van $\mathcal{C}([a,b])$ zijn lineair onafhankelijk?

1a $\{\cos(x),\sin(x),e^x\}$; $[a,b]=[0,2\pi]$

1b $\{x^2,e^x\}$;

1c $\{\cos^2(x),\sin^2(x),\cos(2x)\}$;

2a $\{\sin(x),\cos(x),\operatorname{tg}(x)\}$ $([a,b]=[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}])$;

2b $\{\operatorname{tg}^2(x),\sec^2(x),3\}$ $([a,b]\subset(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}))$;

2c $\{1,x,xe^x\}$

Oefening 1.8 Welke van de volgende verzamelingen veeltermen brengen $\mathbb{R}_2[X]$ voort?

1a $\{1,X,X^2\}$;

1b $\{1,X-1,(X-1)^2\}$;

1c $\{X^2+1,X^2+X,X+1\}$;

2a $\{X^2+1,X-1,X^2+X\}$;

2b $\{X^2+2,2X^2-X+1,X+2,X^2+X+4\}$;

2c $\{X^2+2X-1,X^2-1\}$.

Oefening 1.9a Onderstel dat $S = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ lineair onafhankelijk is in een vectorruimte V. Neem nu

$$\begin{aligned}
\vec{b}_1 &= \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 \\
\vec{b}_2 &= \vec{a}_2 + \vec{a}_3 \\
\vec{b}_3 &= \vec{a}_3
\end{aligned}$$

Bewijs dat $T = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ ook lineair onafhankelijk is.

Oefening 1.9b Onderstel dat $S = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ lineair onafhankelijk is in een vectorruimte V. Neem nu

$$\begin{aligned}
\vec{b}_1 &= \vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + 3\vec{a}_3 \\
\vec{b}_2 &= \vec{a}_2 + 2\vec{a}_3 \\
\vec{b}_3 &= \vec{a}_3
\end{aligned}$$

Bewijs dat $T = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ ook lineair onafhankelijk is.

Oefening 1.9c Onderstel dat $S = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ lineair onafhankelijk is in een vectorruimte V. Onderstel nu dat

$$\begin{aligned}
\vec{a}_1 &= \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3 \\
\vec{a}_2 &= \vec{b}_2 + \vec{b}_3 \\
\vec{a}_3 &= \vec{b}_3
\end{aligned}$$

Bewijs dat $T = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ ook lineair onafhankelijk is.

Oefening 1.10 Vind een basis voor de volgende deelruimten van $\mathbb{R}^4$:

1a $\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 | a = 0\}$;

1b $\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 | a = b = 0\}$;

1c $\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 | a + b + c + d = 0\}$;

2a $\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 | a = c \text{ en } b = d\}$;

2b $\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 | d = a + b\}$;

2c $\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 | d = a + b \text{ en } c = a - b\}$.

Oefening 1.11 We werken in $V = \mathcal{C}[-a,a]$. Stel

$$\begin{aligned}
W_1 &= \{f \in \mathcal{C}[-a,a] | f(x) = f(-x), \forall x \in [-a,a]\} \\
W_2 &= \{f \in \mathcal{C}[-a,a] | f(x) = -f(-x), \forall x \in [-a,a]\}
\end{aligned}$$

Bewijs achtereenvolgens dat

1. W_1, W_2 zijn deelruimten van V;
2. $W_1 \cap W_2 = \{0\}$;
3. $W_1 \oplus W_2 = V$.

Reeks 2 Lineaire afbeeldingen en matrices 1

Oefening 2.1 Welk van de volgende afbeeldingen zijn lineaire afbeeldingen?

1a $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gedefinieerd door

$$f(a,b) = (a,b,a+b)$$

1b $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gedefinieerd door

$$f(a,b) = (a+b,b,a-b)$$

1c $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gedefinieerd door

$$f(a,b,c) = (b,c,a)$$

2a $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gedefinieerd door

$$f(a,b,c) = (a,b^2+c^3,a+b)$$

2b $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gedefinieerd door

$$f(a,b,c) = (0,c,a)$$

2c $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gedefinieerd door

$$f(a) = (1,a,a^2)$$

3a $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gedefinieerd door

$$f(a) = (1,a,a)$$

3b $f:\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door

$$f(a,b,c,d) = (a+b+c+d,a+b-1)$$

3c $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(a,b,c) = a^2+b^2+c^2$$

Oefening 2.2a $f: \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ is een lineaire afbeelding. Er is gegeven dat

$$f(1) = 1,\ f(X) = X^2+1,\ f(X^2+1) = X^3$$

Bepaal $f(aX^2+bX+c)$.

Oefening 2.2b $f: \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}[X]$ is een lineaire afbeelding. Er is gegeven dat

$$f(1) = 1,\ f(X-1) = X^2+1,\ f(X^2) = X^{10},\ f(X^3) = 0$$

Bepaal $f(aX^3+bX^2+cX+d)$.

Oefening 2.2c $f: \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ is een lineaire afbeelding. Er is gegeven dat

$$f(X^i) = i$$

Bepaal $f(X^n+X^{n-1}+\cdots+1)$.

Oefening 2.3 Welk van de volgende afbeeldingen $f_i: \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ zijn lineaire afbeeldingen?

1a $f_1(P(X)) = P(X)^2$;

1b $f_2(P(X)) = XP(X)$;

1c $f_3(P(X)) = P(X+1) - P(X)$;

2a $f_4(P(X)) = P(0)$;

2b $f_5(P(X)) = P(1)$;

2c $f_6(P(X)) = P''(X) - P'(X)$;

3a $f_7(P(X)) = P(X^2)$;

3b $f_8(a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n$ (met $a_n \neq 0$);

3c $f_9(a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0) = \frac{a_n}{n+1}X^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}X^n + \cdots + \frac{a_1}{2}X^2 + a_0X$.

Oefening 2.4 Bepaal de kern, het beeld, en, indien deze bestaat, de inverse van de volgende lineaire afbeeldingen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

1a $f_1(x,y) = 2(x,-y)$;

1b $f_2(x,y) = (y,0)$;

1c $f_3(x,y) = (x,x)$;

2a $f_4(x,y) = (3x+2y, 6x+4y)$;

2b $f_5(x,y) = (x+y, x-y)$;

2c $f_6(x,y) = (x+y, x+2y)$.

Oefening 2.5 Bepaal de kern, het beeld, en, indien deze bestaat, de inverse van de volgende lineaire afbeeldingen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

a $f_1(x,y,z) = (x+y, y+z, x)$;

b $f_2(x,y,z) = (2x, -z, x+z)$;

c $f_3(x,y,z) = (x+y, x-y, x+2y)$.

Oefening 2.6 Bepaal de kern en het beeld van de volgende lineaire afbeeldingen $\mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$:

a $f_1(P(X)) = P''(X) - 2P'(X)$;

b $f_2(P(X)) = XP(X)$;

c $f_3(a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0) = a_2X^2 + a_1X + a_0$.

Oefening 2.7a De lineaire afbeelding $f:\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ wordt gegeven door

$$f(x,y,z,t) = (x, y+z, z+t)$$

Bepaal de matrix van f

1) ten opzichte van de standaardbasissen van $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^3$;
2) ten opzichte van de basissen

$$E = \{(1,0,0,1),(0,0,0,1),(1,1,0,0),(0,1,1,0)\} \text{ van } \mathbb{R}^4$$
$$F = \{(1,1,0),(0,1,0),(1,0,1)\} \text{ van } \mathbb{R}^3$$

Oefening 2.7b De lineaire afbeelding $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ wordt gegeven door

$$f(x,y) = (x+2y, -x, y)$$

Bepaal de matrix van f

ten opzichte van de standaardbasissen van $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$;
2) ten opzichte van de basissen

$$E = \{(1,3),(-2,4)\} \text{ van } \mathbb{R}^2$$
$$F = \{(1,1,1),(2,2,0),(3,0,0)\} \text{ van } \mathbb{R}^3$$

Oefening 2.7c De lineaire afbeelding $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ wordt gegeven door

$$f(x,y,z) = (3x-2y+z, x+6y+2z, -3x+7z, 2x+y)$$

Bepaal de matrix van f

ten opzichte van de standaardbasissen van $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^4$;
ten opzichte van de basissen

$$E = \{(0,8,8),(-7,8,1),(-6,9,1)\} \text{ van } \mathbb{R}^3$$
$$F = \{(0,1,1,1),(1,-1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1)\} \text{ van } \mathbb{R}^4$$

Oefening 2.8a $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de lineaire afbeelding met matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ten opzichte van de standaardbasis van $\mathbb{R}^3$. Bepaal $f((1,2,3))$ en $f((4,5,6))$.

Oefening 2.8b $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ is de lineaire afbeelding met matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ten opzichte van de standaardbasissen van $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$. Bepaal $f((2,3,-1))$ en $f((4,2,-1))$.

Oefening 2.8c $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ is de lineaire afbeelding met matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -7 \\ -7 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ten opzichte van de standaardbasissen van $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^4$. Bepaal $f((1,3,-1))$ en $f((0,3,6))$.

Oefening 2.9 Bepaal de dimensies van de volgende vectorruimten:

1a $\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$;

1b $\operatorname{Hom}(\mathrm{M}_{23}(\mathbb{R}), \mathbb{R}^2)$;

1c $\operatorname{Hom}(\mathbb{R}, \mathrm{M}_{31}(\mathbb{R}))$;

2a $\operatorname{Hom}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}_3[X])$;

2b $\operatorname{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_3[X])$;

2c $\operatorname{Hom}(\mathrm{M}_{22}, \mathrm{M}_{33})$.

Reeks 3 Lineaire afbeeldingen en matrices 2

Oefening 3.1 Herinner dat we de matrix E_{ij} definieren als de matrix met een 1 in de (i,j)-positie, en overal elders 0:

$$\left(E_{ij}\right)_{k\ell} = \delta_{ik}\delta_{j\ell}$$

voor $i,j,k,\ell = 1,\cdots,n$. Bepaal nu voor elke $n\times n$-matrix A de producten AE_{ij} en $E_{ij}A$. Toon aan dat

$$\begin{aligned}\left(AE_{ij}\right)_{pq} &= \delta_{jq}a_{pi}\\ \left(E_{ij}A\right)_{pq} &= \delta_{ip}a_{jq}\end{aligned}$$

Oefening 3.2 Onderstel dat $A\in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{R})$ commuteert met elke matrix $B\in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{R})$:

$$\forall B\in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{R}):\quad AB=BA$$

Bewijs dan dat A een veelvoud is van de eenheidsmatrix: $A=\alpha I_n$. Gebruik hiervoor de voorgaande oefening.

Oefening 3.3a De matrix A van de lineaire afbeelding $f:\ \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ten opzichte van de standaardbasis wordt gegeven door:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\3&2&1\end{pmatrix}$$

Wat is de matrix van f ten opzichte van de basis

$$\{(1,0,1),(1,0,-1),(1,1,1)\}$$

Oefening 3.3b De matrix A van de lineaire afbeelding $f:\ \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ten opzichte van de standaardbasis wordt gegeven door:

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&4\\5&0&1\end{pmatrix}$$

Wat is de matrix van f ten opzichte van de basis

$$\{(1,-1,1),(1,2,2),(1,1,1)\}$$

Oefening 3.3c De matrix A van de lineaire afbeelding $f:\ \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ten opzichte van de basis

$$\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$$

wordt gegeven door:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{pmatrix}$$

Wat is de matrix van f ten opzichte van de basis

$$\{(1,0,1),(1,0,-1),(1,1,1)\}$$

Oefening 3.4a Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Gebruik elementaire rijoperaties om A in rij echelon vorm te brengen, en om A in gereduceerde rij echelon vorm te brengen. Wat is de rang van A? Geef een basis van de deelruimte van $\mathbb{R}^5$ voortgebracht door de rijen van A.
Gebruik elementaire kolomoperaties om A in kolom echelon vorm te brengen. Verifieer dat het aantal lineair onafhankelijke kolommen van A gelijk is aan het aantal lineair onafhankelijke rijen. Geef een basis voor de vectorruimte voortgebracht door de kolommen van A.

Oefening 3.4b Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Gebruik elementaire rijoperaties om A in rij echelon vorm te brengen, en om A in gereduceerde rij echelon vorm te brengen. Wat is de rang van A? Geef een basis van de deelruimte van $\mathbb{R}^5$ voortgebracht door de rijen van A.
Gebruik elementaire kolomoperaties om A in kolom echelon vorm te brengen. Verifieer dat het aantal lineair onafhankelijke kolommen van A gelijk is aan het aantal lineair onafhankelijke rijen. Geef een basis voor de vectorruimte voortgebracht door de kolommen van A.

Oefening 3.4c Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Gebruik elementaire kolomoperaties om A in kolom echelon vorm te brengen, en om A in gereduceerde kolom echelon vorm te brengen. Wat is de rang van A? Geef een basis van de deelruimte van $\mathbb{R}^4$ voortgebracht door de kolommen van A.
Gebruik elementaire rijoperaties om A in rij echelon vorm te brengen. Verifieer dat het aantal lineair onafhankelijke kolommen van A gelijk is aan het aantal lineair onafhankelijke rijen. Geef een basis voor de vectorruimte voortgebracht door de rijen van A.

Oefening 3.5 Los de volgende lineaire stelsels op via Gauss eliminatie:

a

$$\begin{cases} x+3y+z=4 \\ 2x+2y+z=-1 \\ 2x+3y+z=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y+3z=a \\ 2x+5y+5z=b \\ 3x+5y+8z=c \end{cases}$$

b

$$\begin{cases} -x-2y-3z=0 \\ w+x+4y+4z=7 \\ w+3x+7y+9z=4 \\ -w-2x-4y-6z=6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y-z-t=0 \\ x+2y+3z-4t=0 \\ 3x+4y-z-t=8 \\ 2x-3y+z+3t=3 \end{cases}$$

c

$$\begin{cases} x-y+3z-t=0 \\ y-3z+5t=2 \\ x-z+t=0 \\ x+2y-t=-5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=-7 \\ 2x+4y+z=-16 \\ x+2y+z=9 \end{cases}$$

Oefening 3.6 Waaraan moeten de parameters $b_1, b_2, \cdots$ voldoen opdat de volgende stelsels consistent zouden zijn?

a

$$\begin{cases} 6x-4y=b_1 \\ 3x-2y=b_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2y+5z=b_1 \\ 4x-5y+8z=b_2 \\ -3x+3y-3z=b_3 \end{cases}$$

b

$$\begin{cases} x-2y-z=b_1 \\ -4x+5y+2z=b_2 \\ -4x+7y+4z=b_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y+3z+2t=b_1 \\ -2x+y+5z+t=b_2 \\ -3x+2y+2z-t=b_3 \\ 4x-3y+z+3t=b_4 \end{cases}$$

c

$$\begin{cases} x+2y-3z=b_1 \\ 2x+6y-11z=b_2 \\ x-2y+7z=b_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y+3z-t=b_1 \\ y-3z+5t=b_2 \\ x-3y+3z-t=b_3 \\ x+2y-5t=b_4 \end{cases}$$

Oefening 3.7 Zoek de inverse van de volgende matrices met behulp van de Gauss-Jordan eliminatie methode:

a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

b

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

c

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Oefening 3.8a Voor welke waarden (a,b,c) heeft het lineaire stelsel

$$\begin{cases} x+y+2z & = & a \\ x+z & = & b \\ 2x+y+3z & = & c \end{cases}$$

een oplossing? Bepaal het beeld van de lineaire afbeelding

$$f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3:\ X \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} X$$

Oefening 3.8b Voor welke waarden (a,b,c) heeft het lineaire stelsel

$$\begin{cases} x+2y+8z & = & a \\ 2x-6y-14z & = & b \\ 2x-y+z & = & c \end{cases}$$

een oplossing? Bepaal het beeld van de lineaire afbeelding

$$f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3:\ X \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & -6 & -14 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} X$$

Oefening 3.8c Voor welke waarden (a,b,c) heeft het lineaire stelsel

$$\begin{cases} 3x-z & = & a \\ -5y+z & = & b \\ 6x+10y-4z & = & c \end{cases}$$

een oplossing? Bepaal het beeld van de lineaire afbeelding

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : X \mapsto \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 6 & 10 & -4 \end{pmatrix} X$$

Oefening 3.9 A is de $n \times n$-matrix met een 1 op elke plaats. Toon aan dat

$$(I_n - A)^{-1} = I_n - \frac{1}{n-1} A$$

Oefening 3.10 Onderstel dat $A, B \in \mathrm{M}_{nn}$ en dat A regulier is. Bewijs dat

$$A + B \text{ regulier} \iff I + BA^{-1} \text{ regulier}$$

Reeks 4 Determinanten; eigenwaarden en eigenvectoren

Oefening 4.1 Bereken de volgende determinanten

a

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

b

$$\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 9 & 1 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 0 & 9 & 9 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 9 & 0 & 3 & 9 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

c

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} b-1 & 0 & 1 \\ -2 & b & -1 \\ 0 & 0 & b+1 \end{vmatrix}$$

Oefening 4.2 Toon aan dat

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & ab & ac \\ ab & (c+a)^2 & bc \\ ac & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3$$

Oefening 4.3 Bereken de determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

Oefening 4.4 Noteer voor D_n de determinant

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Toon aan dat

$$D_n = (a_n - a_1)(a_n - a_2)\cdots(a_n - a_{n-1})D_{n-1}$$

en leid hieruit af dat

$$D_n = \prod_{j>i}(a_j - a_i)$$

We noemen de determinant D_n ook wel de *determinant van Vandermonde*.

Oefening 4.5 Onderstel dat elke $a_i \neq 0$. Bewijs per inductie op n:

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n \left(1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)$$

Oefening 4.6 Beschouw drie niet-collineaire punten (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), $(x_3, y_3, z_3) \in K^3$. Toon aan dat de vergelijking van het vlak dat door deze drie punten gaat als volgt kan geschreven worden:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Veralgemeen deze eigenschap voor een hypervlak in K^n.

Oefening 4.7 Bepaal de karakteristieke veelterm, de eigenwaarden en de eigenvectoren van de matrix A. Is de matrix A diagonalizeerbaar?

a

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

b

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

c

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 11 & -4 & -7 \\ -7 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Reeks 5 Reeksen van functies

Uniforme convergentie

Oefening 5.1 **a1.** Gegeven is de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

Toon aan dat de reeks puntsgewijs convergeert over $\mathbb{R}$. Toon aan dat ze uniform convergeert over elk interval (a,b) met $0 < a < b$.

a2. Onderstel dat de numerieke reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absoluut convergent is. Toon aan dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$ uniform convergeert over $\mathbb{R}$.

b1. Gegeven is de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^4}{(1+x^2)^n}$$

Toon aan dat de reeks puntsgewijs convergeert in elke $x \in \mathbb{R}$. Toon aan dat ze uniform convergeert over elk interval (a,b) met $0 < a < b$.

b2. Onderstel dat de positieve reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergent is. Toon aan dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} \ln(1 + a_n x)$ uniform convergeert over elk interval $(0,b)$ met $b > 0$.

c1. Onderstel dat de numerieke reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absoluut convergent is. Toon aan dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ uniform convergeert over $[-1,1]$.

c2. Onderstel dat de numerieke reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absoluut convergent is. Toon aan dat de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{1+x^n}$$

uniform convergeert over $(-1,+\infty)$ als $p>-1$.

Oefening 5.2 Toon aan dat de volgende reeksen uniform convergeren over elk interval (a,b).

a1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$

a2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

b1. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos^n x}{n(\ln n)^2}$

b2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{bgtg} x}{n\sqrt{n}}$

c1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$

c2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n+1)!}$

Oefening 5.3 Bespreek de convergentie van de volgende reeks

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+n)(x^2+n+1)}$

b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x(n+1)^{2x}(n+2)^{3x}}$

c. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sqrt{n^4+3n+1}-\sqrt{n^4+xn}\right)$

Oefening 5.4 **a1.** De functie s wordt gegegeven door de reeks

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$$

Toon aan dat

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

a2. Onderstel dat de reeks $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ uniform convergeert over (a,b), en dat de functies u_n begrensd zijn over (a,b). Bewijs dat $s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ begrensd is over (a,b).

b1. Bereken

$$\int_0^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin nx}{e^n}\right) \mathrm{d}x$$

b2. De functie s wordt gegeven door

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}$$

Bereken $s'(\pi/2)$.

c1. Bereken

$$\int_0^{1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{(1+nx^2)(n+1)\ln(n+1)}\right) \mathrm{d}x$$

c2. Toon aan dat

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n(n+1)}$$

continu is over $\mathbb{R}$.

Machtreeksen

Oefening 5.5 Bepaal het convergentiegebied van de volgende machtreeksen. Bespreek ook het gedrag in de grenspunten.

a1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n3^n}$

a2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$

a3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}}$

a4. $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x-1)^n$

b1. $\sum_{n=1}^{\infty} n^3(x+1)^3$

b2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$

b3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}x^n}{(\ln n)2^n}$

b4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n x^n}$

c1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

c2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

c3. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

c4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n \sqrt[n]{2}}{n}$

Oefening 5.6 We hebben gezien dat

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

voor elke $x \in \mathbb{R}$. Bijgevolg is

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Neem de de n-de partiële som

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

- Toon aan dat $0 < n!(e - s_n) < \frac{1}{n}$, voor elke $n \in \mathbb{N}_0$.
- Toon aan dat $n!s_n$ een natuurlijk getal is.
- Onderstel dat $e = m/n$ een rationaal getal is. Toon aan dat $n!(e - s_n)$ een natuurlijk getal is gelegen in $(0,1)$.

Dit laatste is een contradictie, en hiermee is aangetoond dat e een irrationaal getal is.

Oefening 5.7 Een primitieve van de functie $f(x) = e^{-x^2/2}\mathrm{d}x$ kan niet geschreven worden als een combinatie (optelling, samenstelling, vermenigvuldiging, quotiënt) van elementaire functies (veeltermen, goniometrische, logaritme en hun inversen). Wel hebben we gezien dat

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$$

We laten nu zien hoe de bepaalde integraal

$$\int_a^b e^{-x^2/2}\mathrm{d}x$$

numeriek kan uitgerekend worden. Schrijf de Taylorreeks van f op in het punt $x = 0$. Integreer deze term per term, en leid hieruit af dat

$$\int_0^1 e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2^2\cdot 5\cdot 2!} - \frac{1}{2^3\cdot 7\cdot 3!} + \cdots$$

Bereken deze integraal nauwkeurig tot op 3 cijfers na de komma.

Goniometrische reeksen

Oefening 5.8 Ontwikkel de volgende functies $f(x)$, met de gegeven periode T, in een Fourierreeks.

a $f(x) = \begin{cases} x/\pi & \text{als } 0 \leq x \leq \pi \\ 1 & \text{als } \pi \leq x < 2\pi \end{cases} \qquad T = 2\pi$

b $f(x) = \begin{cases} 5x & \text{als } 0 < x \leq 0,4 \\ 2 & \text{als } 0,4 \leq x \leq 1,6 \\ -5(x-2) & \text{als } 1,6 \leq x \leq 2 \end{cases} \qquad T = 2$

c $f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{als } 0 \leq x \leq 4 \\ x-6 & \text{als } 4 \leq x \leq 8 \end{cases} \qquad \text{T=8}$

Oefening 5.9 We beschouwen de functie $f:\ [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}:\ x \mapsto x$.

a Schrijf f als een Fourierreeks van de vorm

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

Laat zien dat men deze reeks niet term per term mag afleiden.

b Schrijf f als een Fourierreeks van de vorm

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

c Schrijf $\cos x$, met $0 \leq x \leq \pi$ als een Fourierreeks van de vorm

$$\cos x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

De Fouriertransformatie

Oefening 5.10 Bereken de Fouriergetransformeerde van de volgende functies.

a $f(t) = \begin{cases} \cos(3t) & \text{als } -\pi \leq t \leq \pi \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$

b $f(t) = \begin{cases} \sin(3t) & \text{als } -\pi \leq t \leq \pi \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$

c $f(t) = (\phi * \phi)(t)$ als ϕ de functie is die de waarde 1 aanneemt op het interval $[0,1]$, en 0 erbuiten.

Bereken ook $\phi * \phi$.

Reeks 6 Differentiaalvergelijkingen van 1ste orde

Juiste differentiaalvergelijkingen

Oefening 6.1 Onderzoek of de volgende differentiaalvergelijkingen juiste differentiaalvergelijkingen zijn. Bepaal de algemene integraal.

a1. $(x+y\cos x)dx+\sin x dy=0$

a2. $(2xye^{x^2y}+y^2e^{xy^2}+1)dx+(x^2e^{xy^2}+2xye^{xy^2}-2y)dy=0$

a3. $(11x^2+3y^2)\sqrt[3]{x^2+y^2}dx+8xy\sqrt[3]{x^2+y^2}dy=0$

b1. $(1+e^{2x})dy+2ye^{2x}dx=0$

b2. $(y^2-\frac{y}{x(x+y)}+2)dx+(\frac{1}{x+y}+2y(x+1))dy=0$

b3. $\ln(1+y^2)+\frac{2yy'(x-1)}{y^2+1}=0$

c1. $(2x+3y+4)dx+(3x+4y+5)dy=0$

c2. $(x\sqrt{x^2+y^2}-y)dx+(y\sqrt{x^2+y^2}-x)dy=0$

c3. $\frac{1-y^2}{(1+xy)^2}=\frac{x^2-1}{(1+xy)^2)}y'$

Scheiding van veranderlijken

Oefening 6.2 Bepaal de algemene integraal van de volgende differentiaalvergelijkingen (scheiden van veranderlijken)

a1. $xydy=(y+1)(1-x)dx$

a2. $(x^2-1)y'\operatorname{cotg} y=1$

b1. $(1+y^2)dx=(x+x^2)dy$

b2. $(1+e^{-x})y'\sin y+\cos y=0$

c1. $(2y^2+1)dy=3x^2ydx$

c2. $xy'(2y-1)+y(x-1)=0$

Homogene differentiaalvergelijkingen

Oefening 6.3 Bepaal de algemene integraal van de volgende differentiaalvergelijkingen

a1. $(y^2 - x^2)dx + xydy = 0$

a2. $x^2 + y^2 + xyy' = 0$

b1. $x(x+y)dy - y^2dx = 0$

b2. $x\sin\frac{y}{x} - y\cos\frac{y}{x} + xy'\cos\frac{y}{x} = 0$

c1. $(x+y)^2dy = (x^2 - 2xy + 5y^2)dx$

c2. $y^2 + xy - x^2y' = 0$

Oefening 6.4 Bepaal de algemene integraal van de volgende differentiaalvergelijkingen (herleiden tot een homogene vergelijking)

a1. $(x+y+1)dx + (2x+2y+1)dy = 0$

a2. $(3y - 7x + 7)dx + (7y - 3x + 3)dy = 0$

b1. $(3x+2y+1)dx - (3x+2y-1)dy = 0$

b2. $(2x+y-1)dy = (4x-y+7)dx$

c1. $(2x+4y+3)dy = (x+2y+1)dx$

c2. $(3x+5y+6)dy - (x+7y+2)dx = 0$

Lineaire differentiaalvergelijkingen

Oefening 6.5 Bepaal de algemene integraal van de volgende differentiaalvergelijkingen

a1. $xdy - 2ydx = (x-2)e^x dx$

a2. $xy' - (x+1)y = x^2 - x^3$

a3. $y' + 1 = 4e^{-y}\sin x$

b1. $y' - 6y = 10\sin 2x$

b2. $dy + (2y\mathrm{cotg}\,x + \sin 2x)dx = 0$

b3. $y\ln y dx + (x - \ln y)dy = 0$

c1. $xdy = y(1 - x\mathrm{tg}\,x)dx + x^2\cos x dx$

c2. $y' - y = x + \sin x$

c3. $(\sin y)y' = \cos x(2\cos y - \sin^2 x)$

Oefening 6.6 Bepaal de algemene integraal van de volgende differentiaalvergelijkingen (Bernoulli vergelijking)

a. $(2xy^5 - y)dx + 2xdy = 0$

b. $y' + y = y^2(\cos x - \sin x)$

c. $y' + 2xy + xy^4 = 0$

We beschouwen nu differentiaalvergelijkingen van eerste orde van het algemene type $F(x,y,y') = 0$. Enkel in speciale gevallen kunnen deze geïntegreerd worden.

De vergelijking kan ontbonden worden

Onderstel dat de functie F kan ontbonden worden:

$$F(x,y,y') = (y' - f_1(x,y))(y' - f_2(x,y)) \cdots (y' - f_n(x,y)) = 0$$

$F(x,y,y') = 0$ als voor tenminste een i geldt dat

$$y' = f_i(x,y)$$

Vergelijkingen van dit type hebben we reeds besproken in de vorige reeks. De oplossing is van de vorm

$$G_i(x,y,c_i) = 0$$

De algemene integraal van de differentiaalvergelijking is dan

$$G_1(x,y,c_1)G_2(x,y,c_2) \cdots G_n(x,y,c_n) = 0$$

Voorbeeld 1

$$yy'^2 - (xy+1)y' + x = 0$$

$$(y' - x)(yy' - 1) = 0$$

$y' = x$ geeft als oplossing: $y = x^2/2 + c_1$
$yy' = 1$ geeft als oplossing: $y^2/2 = x + c_2$
De algemene integraal van de differentiaalvergelijking is dus

$$(y - x^2/2 - c_1)(y^2/2 - x - c_2) = 0$$

Voorbeeld 2

$$F(y') = 0$$

Als α een wortel is van de vergelijking $F(\alpha) = 0$, dan kan men de vergelijking schrijven onder de vorm

$$(y' - \alpha)F_1(y') = 0$$

en $y = \alpha x + c$ is een oplossing van de vergelijking.

Overgang naar parametervorm

Onderstel dat y ontbreekt in de vergelijking: de vergelijking is van de vorm $F(x, y') = 0$. We herschrijven de vergelijking in parametervorm:

$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y' = \psi(t) \end{cases}$$

Uit de tweede vergelijking volgt:

$$\mathrm{d}y = \psi(t)\mathrm{d}x$$

en uit de eerste, na differentiatie

$$\mathrm{d}x = \phi'(t)\mathrm{d}t$$

en

$$\mathrm{d}y = \psi(t)\phi'(t)\mathrm{d}t$$

Integreren geeft

$$y = \int \psi(t)\phi'(t)\mathrm{d}t$$

en we hebben een stel parametervergelijkingen van de integraal van de differentiaalvergelijking:

$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \int \psi(t)\phi'(t)\mathrm{d}t \end{cases}$$

Voorbeeld 3

$$x^4 = y'^3 - x^2 y'$$

Stel $t = y'/x$. Dan is $x^4 = t^3x^3 - x^3t$, en we krijgen volgend stel parametervergelijkingen:

$$\begin{cases} x = t^3 - t \\ y' = xt = t^4 - t^2 \end{cases}$$

We vinden

$$\begin{aligned} \mathrm{d}y &= (t^4 - t^2)\mathrm{d}x \\ &= (t^4 - t^2)(3t^2 - 1)\mathrm{d}t \\ &= (3t^6 - 4t^4 + t^2)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

en de algemene integraal in parametervorm:

$$\begin{cases} x = t^3 - t \\ y = 3t^7/7 - 4t^5/5 + t^3/3 + c \end{cases}$$

Een analoge techniek kunnen we toepassen op vergelijkingen waarin x ontbreekt, van de vorm

$$F(y, y') = 0$$

We schrijven deze weer in parametervorm:

$$\begin{cases} y = \phi(t) \\ y' = \psi(t) \end{cases}$$

Uit de tweede vergelijking volgt:

$$\mathrm{d}y = \psi(t)\mathrm{d}x$$

en uit de eerste

$$\mathrm{d}y = \phi'(t)\mathrm{d}t$$

zodat

$$\mathrm{d}x = \frac{\phi'(t)}{\psi(t)}\mathrm{d}t$$

en de algemene integraal in parametervorm is

$$\begin{cases} x = \int \frac{\phi'(t)}{\psi(t)}\mathrm{d}t \\ y = \phi(t) \end{cases}$$

Voorbeeld 4

$$y = y'^2 + 2\ln y'$$

Stel $t = y'$. We krijgen volgend stel parametervergelijkingen:

$$\begin{cases} y = t^2 + 2\ln t \\ y' = t \end{cases}$$

We vinden

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{t} = \frac{1}{t}(2t + \frac{2}{t})\mathrm{d}t = (2 + \frac{2}{t^2})\ dt$$

en

$$\begin{cases} x = 2t - \frac{2}{t} + c \\ y = t^2 + 2\ln t \end{cases}$$

Tenslotte bekijken we het geval waarin x, y en y' in de vergelijking optreden, en waar de vergelijking homogeen is in x en y. Door te delen door een geschikte macht van x kunnen we de vergelijking schrijven onder de vorm

$$F\left(\frac{y}{x}, y'\right) = 0$$

In parametervorm krijgen we

$$\begin{cases} y/x = \phi(t) \\ y' = \psi(t) \end{cases}$$

De eerste vergelijking geeft

$$y = x\phi(t)$$

en

$$\mathrm{d}y = \phi(t)\mathrm{d}x + x\phi'(t)\mathrm{d}t$$

en de tweede vergelijking geeft

$$\mathrm{d}y = \psi(t)\mathrm{d}x$$

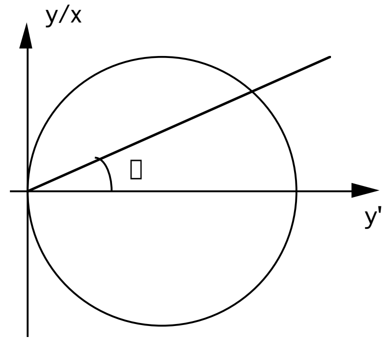

Figure 1: Voorbeeld 5

en dus

$$\psi(t)\mathrm{d}x = \phi(t)\mathrm{d}x + x\phi'(t)\mathrm{d}t$$

of

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\phi'(t)}{\psi(t) - \phi(t)}\mathrm{d}t$$

Na integratie

$$x = c\exp\int \frac{\phi'(t)}{\psi(t) - \phi(t)}\mathrm{d}t$$

samen met

$$y = x\phi(t)$$

een stel parametervergelijkingen van de algemene integraal.

Voorbeeld 5

$$x^2y'^2 - 2x^2y' + y^2 = 0$$

of

$$y'^2 - 2y' + (y/x)^2 = 0$$

Dit is de vergelijking van een cirkel in het $(y', y/x)$-vlak, met middelpunt $(1,0)$ en straal 1. We kiezen $t = \operatorname{tg}(\theta/2)$ als parameter. We vinden

$$\begin{cases} y' = \frac{2}{1+\operatorname{tg}^2\theta} = \frac{2}{1+t^2} \\ y/x = \frac{2\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}^2\theta} = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

en

$$\begin{aligned} x &= c\exp\int \frac{(t^2-1)\mathrm{d}t}{(1+t^2)(t-1)} \\ &= c\exp\int \frac{(t+1)\mathrm{d}t}{(1+t^2)} \\ &= c\exp\Big(\operatorname{bgtg} t + \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big) \\ &= c\sqrt{t^2+1}\exp\operatorname{bgtg} t \end{aligned}$$

Een stel parametervergelijkingen van de oplossing is dan

$$\begin{cases} x = c\sqrt{t^2+1}\exp\operatorname{bgtg} t \\ y = 2xt/(1+t^2) \end{cases}$$

Oefening 6.7 Bepaal van de volgende differentiaalvergelijkingen de algemene integraal:

a1. $x^2y'^2 + xyy' - 6y^2 = 0$

a2. $x = 1 + 3y'^3$

a3. $1 + y'^2 = 2ay'^2/y$

a4. $x^2y'^2 + 5xyy' + 6y^2 = 0$

b1. $xy'^2 + (y-1-x^2)y' - x(y-1) = 0$

b2. $(y'-x)^2 = y' + x$

b3. $(3y+2)^2y'^2 = 4y+1$

b4. $xyy'^2 + (x^2+xy+y^2)y' + x^2 + xy = 0$

c1. $y'^4 - (x+2y+1)y'^3 + (x+2y+2xy)y'^2 - 2xyy' = 0$

c2. $(1-y'^2)\cos x = 2y'\sin x$

c3. $(y+y')^2 = y - y'$

c4. $xy'^2 - 2yy' - x = 0$

De methode van afleiding en eliminatie

Onderstel dat de differentiaalvergelijking

$$F(x,y,y') = 0$$

kan opgelost worden naar y, dus geschreven kan worden onder de vorm

$$y = \phi(x,y')$$

We voeren een hulpveranderlijke $p = y'$ in en schrijven

$$y = \phi(x,p)$$

hierin is p een functie van x. Afleiden naar x geeft

$$y' = \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial p}p'$$

of

$$p = \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial p}p'$$

Dit is een vergelijking van eerste orde en eerste graad met onbekende functie p. Onderstel dat we deze kunnen integreren:

$$G(x,p,c) = 0$$

We hebben dan een stel parametervergelijkingen voor de oplossing:

$$\begin{cases} y = \phi(x,p) \\ G(x,p,c) = 0 \end{cases}$$

met p als parameter.
Opmerkingen 1) Gekomen bij de vergelijking $G(x,p,c) = 0$, zou men terug $p = y'$ kunnen stellen en opnieuw integreren. Dit is fout omdat $G(x,p,c) = 0$ niet equivalent is met de oorspronkelijke vergelijking. Het zou trouwens een oplossing afhankelijk van twee constanten opleveren.
2) Als de vergelijking niet oplosbaar is naar y, maar wel naar x, dan beschouwen we x als een functie van y, en nemen y als onafhankelijke veranderlijke.

Voorbeeld 6

$$y = y'^2 + y'^3$$

Stel $y' = p$. We krijgen $y = p^2 + p^3$, en, na afleiding

$$p = 2pp' + 3p^2p'$$

of

$$p((2+3p)p' - 1) = 0$$

a) $(2+3p)p' = 1$ geeft de oplossing

$$\begin{cases} x = 2p + 3p^2/2 + c \\ y = p^2 + p^3 \end{cases}$$

b) $p = 0$ geeft de singuliere oplossing $y = c$.

De vergelijking van Lagrange

Dit is een vergelijking van de vorm

$$y = x\phi(y') + \psi(y')$$

De methode van afleiding en eliminatie kan steeds worden toegepast:

$$y = x\phi(p) + \psi(p)$$

$$p = \phi(p) + (x\phi'(p) + \psi'(p))p'$$

$$(p - \phi(p))\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} - \phi'(p)x = \psi'(p)$$

Dit is een lineaire differentiaalvergelijking, met veranderlijke p en onbekende functie x.

Voorbeeld 7

$$y = y'^2x + y'^2$$

$$y = xp^2 + p^2$$

$$p = p^2 + 2xpp' + 2pp'$$

$$p = 0 \text{ of } 2(x+1)p' + p = 1$$

De vergelijking

$$2(x+1)p' + p = 1$$

heeft als oplossing (controleer zelf)

$$c(1-p)^2(1+x) = 1$$

en dus vinden we als algemene integraal van de differentiaalvergelijking

$$\begin{cases} c(1-p)^2(1+x) = 1 \\ y = p^2(1+x) \end{cases}$$

Eliminatie van p geeft

$$y = (\sqrt{1+x} - d)^2$$

$p = 0$ levert de singuliere oplossing $y = c$.

De vergelijking van Clairaut

Dit is een vergelijking van de vorm

$$y = xy' + \psi(y')$$

m.a.w. een vergelijking van Lagrange met $\phi(p) = p$. Door te werk te gaan als hierboven vinden we

$$(x + \psi'(p))\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0$$

a) Integreren van

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0$$

geeft $p = c$, en de algemene integraal is

$$y = cx + \psi(c)$$

Dit is een familie rechten.
b) De vergelijking $x + \psi'(p)$ geeft een singuliere oplossing in parametervorm:

$$\begin{cases} x = -\psi'(p) \\ y = px + \psi(p) \end{cases}$$

Oefening 6.8 Gebruik de methode van afleiding en eliminatie om van de volgende differentiaalvergelijkingen de algemene integraal, en eventueel de singuliere oplossingen, te bepalen:

a1. $xy'^2 - 2yy' + 4x = 0$

a2. $y^2y'^2 + 3y'x - y = 0$

a3. $y = (1+y')x + y'^2$

a4. $y = y'x + y' - y'^2$

b1. $3x^4y'^2 - xy' - y = 0$

b2. $16y^3y'^2 - 4xy' + y = 0$

b3. $2y = y'^2 + 4y'x$

b4. $y = xy' + \sqrt{1-y'^2}$

c1. $xy'^2 - yy' - y = 0$

c2. $8yy'^2 - 2xy' + y = 0$

c3. $y = xy'^2 + y'^3$

c4. $x^2y - x^3y' + yy'^2 = 0$ (stel $x^2 = u$ en $y^2 = v$)

Reeks 7 Differentiaalvergelijkingen van hogere orde

Willekeurige vergelijkingen

In sommige gevallen kan men de orde van de differentiaalvergelijking verlagen. Als we ze kunnen terugbrengen tot een vergelijking van orde 1, dan kunnen we de methodes uit de vorige reeksen gebruiken.

1) De vergelijking bevat slechts x en één afgeleide
De vergelijking is dan van de vorm

$$y^{(n)} = f(x)$$

We hebben

$$y^{(n-1)}(x) = \int f(x)\mathrm{d}x + c_1$$

Nogmaal integreren geeft $y^{(n-2)}$, $y^{(n-3)}$, enz.

2) Vergelijkingen waarin y ontbreekt
De vergelijking is van de vorm

$$F(x, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

Stel $z = y'$. De vergelijking wordt

$$F(x, z, z', \cdots, z^{(n-1)}) = 0$$

De orde is verlaagd. Als we z kunnen bepalen, dan vinden we y na integratie van z.

Voorbeeld 1

$$xy'' + y' = 0$$

Stel $y' = z$

$$xz' + z = 0$$

$$xz = c_1$$

$$y' = \frac{c_1}{x}$$

$$y = c_1 \ln|x| + c_2$$

3) Vergelijkingen waarin x ontbreekt
De vergelijking is van de vorm

$$F(y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

We nemen x als onbekende functie en y als argument. Dan is

$$y' = \frac{1}{x'}; \quad y'' = -\frac{x''}{x'^3}; \cdots$$

en de vergelijking wordt van de vorm

$$G(y, x', x'', \cdots, x^{(n)}) = 0$$

en we zijn herleid tot het vorige geval.

Voorbeeld 2

$$y'' = -\frac{y^3}{2}$$

$$-\frac{x''}{x'^3} = -\frac{1}{2y^3}$$

Stel $x' = z$

$$\frac{\mathrm{d}z}{z^3} = \frac{\mathrm{d}y}{2y^3}$$

$$-\frac{1}{2z^2} = -\frac{1}{4y^2} - \frac{c_1}{4}$$

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1+c_1y^2}{2y^2}$$

$$x' = z = \frac{\sqrt{2}y}{\sqrt{1+c_1y^2}}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{c_1}\sqrt{1+c_1y^2} + c_2$$

$$(c_1x - c_1c_2)^2 = 2 + 2c_1y^2$$

3) <u>Vergelijkingen die homogeen zijn in $y, y', \cdots, y^{(n)}$</u>
De orde wordt met een eenheid verlaagd door $z = y'/y$ als nieuwe onbekende functie te nemen. Immers

$$y' = yz$$

en dus

$$y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z')$$

en

$$y''' = y'(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = y(z^3 + 3zz' + z'')$$

enz.

Voorbeeld 3

$$xyy'' - xy'^2 + yy' = 0$$

$$xy^2(z^2 + z') - xy^2z^2 + zy^2 = 0$$

$y = 0$ is een singuliere oplossing.

$$x(z^2 + z') - xz^2 + z = 0$$

$$xz' + z = 0$$

$$\frac{y'}{y} = z = \frac{c_1}{x}$$

$$\ln y = c_1 \ln x + \ln c_2$$

$$y = c_2 x^{c_1}$$

Oefening 7.1 Bepaal de algemene integraal van de volgende differentiaalvergelijkingen.

a1. $y'' = xe^x + \cos x$

a2. $x^2y'' + xy' = a$

a3. $y(y-1)y'' + y'^2 = 0$

a4. $y'' + y'^2 = 1$

a5. $(1+x^2)y'' - 2y = 0$

b1. $y'' = 1/x$

b2. $xy'' + y' + x = 0$

b3. $yy'' + y'^2 + 2y^2 = 0$

b4. $y'' - y' + y'^2 = 0$

b5. $x(2x+1)y'' + 2(x+1)y' - 2y = 0$

c1. $y'' = xe^x + \sin x$

c2. $2x^2y'y'' - xy'' + y' = 0$

c3. $yy'' = y'^2 - y'^3$

c4. $y'' + y' = y'^2$

c5. $2y'y''' = 3y''^2$

Meetkundige toepassingen

Oefening 7.2 a1. Bepaal de vlakke krommen met de volgende eigenschap: de afstand van de oorsprong tot een punt van de kromme is gelijk aan het stuk van de raaklijn in dat punt gelegen tussen dat punt en de x-as.
a2. Bepaal de vlakke krommen met de volgende eigenschap: voor elk punt $P(x,y)$ van de kromme is B het snijpunt van de raaklijn met de y-as, en A het snijpunt van de normaal met de x-as; de oppervlakte van de rechthoek met zijden AP en BP is gelijk aan $|xy|$.
a3. Bepaal de vlakke krommen met de volgende eigenschap: voor elk punt P van de kromme is de projectie op de y-as van de kromtestraal een positieve constante a.
De kromtestraal R in het punt $P(x,y)$ wordt gegeven door de formule

$$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$$

b1. Bepaal de vlakke krommen met de volgende eigenschap: de raaklijn in elk punt $P(x,y)$ van de kromme snijdt de y-as in Q, zodanig dat $\mathrm{d}(O,Q)^2 = |xy|^2$.
b2. Bepaal de vlakke krommen met de volgende eigenschap: vanuit elk punt $P(x,y)$ van de kromme zijn de afstanden tot de x-as langs de normaal en langs de raaklijn gelijk.
b3. Bepaal de integraalkrommen van de differentiaalvergelijking

$$yy'' - y'^2 + y' = 0$$

die door $(0,0)$ gaan en die daar kromtestraal $\sqrt{2}$ hebben.
c1. Bepaal de vlakke krommen met de volgende eigenschap: voor elk punt P van de kromme is de afstand van de oorsprong tot P gelijk aan de afstand van de oorsprong tot de normaal in P.
c2. Bepaal de vlakke krommen met de volgende eigenschap: de som van de lengtes van de segementen die raaklijn afsnijdt op de x-as en de y-as is gelijk aan de constante $2a$.
b3. Bepaal de integraalkrommen van de differentiaalvergelijking

$$(1-x^2)y'' - xy' + y = 0$$

die door $(0,1)$ gaan en daar kromtestraal $2\sqrt{2}$ hebben.

Reeks 8 Differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten

De homogene vergelijking

Oefening 8.1 Bepaal de algemene integraal van de volgende homogene lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten:

a. $y^{(4)} + 4y = 0$

b. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

c. $y^{(6)} + m^2 y^{(4)} - m^4 y'' - m^6 y = 0 \quad (m \neq 0)$

De volledige vergelijking met bijzonder rechterlid

Oefening 8.2 Bepaal de algemene integraal van de volgende lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten:

a1. $y'' - 5y' + 6y = (x^2 + 3x + 2)e^{3x}$

a2. $y'' + y = 8\cos x \cos 2x$

b1. $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$

b2. $y'' - y' = 4xe^x$

c1. $y'' + y = 8\cos x \cos 2x$

c2. $y'' - 4y = e^{2x} \sin 2x$

De volledige vergelijking met algemeen rechterlid

Beschouw de differentiaalvergelijking

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$$

waarbij f een willekeurige functie is. De oplossing van de homogene vergelijking is van de vorm

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

Om een particuliere oplossing van de volledige vergelijking te zoeken, passen we de methode van de variatie van de constante toe: we proberen

$$y_p = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2$$

we substitueren in de differentiaalvergelijking:

$$\begin{aligned} a_2(c_1 y_1 + c_2 y_2) + a_1(c_1' y_1 + c_2' y_2) + a_1(c_1 y_1' + c_2 y_2') \\ + \quad (c_1' y_1 + c_2' y_2)' + (c_1' y_1' + c_2' y_2') + (c_1 y_1'' + c_2 y_2'') = f(x) \end{aligned}$$

of, omdat y_1 en y_2 oplossingen zijn van de homogene vergelijking:

$$a_1(c_1' y_1 + c_2' y_2) + (c_1' y_1 + c_2' y_2)' + (c_1' y_1' + c_2' y_2') = f(x)$$

Hieraan is voldaan als

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x) \end{cases}$$

Dit is een lineair stelsel in c_1' en c_2'. Oplossing hiervan levert c_1' en c_2', en, na integratie, c_1 en c_2.

Voorbeeld

$$y'' + y = \sec x$$

De oplossing van de homogene vergelijking is

$$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

en we zoeken een particuliere integraal van de vorm

$$y_p = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x$$

c_1' en c_2' zijn oplossingen van het stelsel

$$\begin{cases} c_1' \cos x + c_2' \sin x = 0 \\ -c_1' \sin x + c_2' \cos x = \sec x \end{cases}$$

De determinant van dit stelsel is 1, en met de regel van Cramer vinden we

$$c_1' = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \sec x & \cos x \end{vmatrix} = -\operatorname{tg} x \;\text{ en }\; c_2' = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \sec x \end{vmatrix} = 1$$

en, na integratie,

$$c_1 = -\int \operatorname{tg} x \mathrm{d}x = \ln|\cos x| + k_1$$

$$c_2 = x + k_2$$

en, tenslotte

$$y_p = \cos x \ln|\cos x| + x \sin x$$

$$y = \cos x \ln|\cos x| + x \sin x + c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

Oefening 8.3 Bepaal de algemene integraal van de volgende lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten:

a. $y'' - 3y' + 2y = \sin e^{-x}$

b. $y'' + y = \operatorname{tg} x$

c. $y'' - y = e^{2x}/(e^{2x}+1)$

De vergelijking van Euler

Dit is een differentiaalvergelijking van de vorm

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(ax+b)y' + a_0 y = f(x)$$

De substitutie $u = \ln|ax+b|$ herleidt deze tot een differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten.

Oefening 8.4 Bepaal de algemene integraal van de volgende differentiaalvergelijking:

a. $(2x+1)^2y'' + (4x+2)y' - 4y = x^2$

b. $x^2y'' - xy' + y = x\ln|x|$

c. $x^3y''' + 6x^2y'' + 7xy' + y = \frac{1}{x} + \ln x^2$

Stelsels differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten

Oefening 8.5 Bepaal de algemene integraal van volgende differentiaalstelsels met behulp van de methode van afleiding en eliminatie.

a1. $\begin{cases} y' = 4y + 2z \\ z' = 2y + z \end{cases}$

a2. $\begin{cases} x' - x + y' = 2t + 1 \\ 2x' + x + 2y' = t \end{cases}$

b1. $\begin{cases} y' = y + 2z \\ z' = -y + 4z \end{cases}$

b2. $\begin{cases} y' - y - 2z = e^x \\ z' + y - 4z = -2 \end{cases}$

c1. $\begin{cases} y' = 7y + 6z \\ z' = 2y + 6z \end{cases}$

c2. $\begin{cases} x' + y' + 2x + y = t \\ y' + 5x + 3y = t^2 \end{cases}$

Oefening 8.6 Bepaal de algemene integraal van volgende differentiaalstelsels met behulp van de methode der eigenwaarden en eigenvectoren.

a. $\begin{cases} x' = 3x - 6y - 2z \\ y' = x - 4y - 2z \\ z' = -2x + 6y + 3z \end{cases}$

b. $\begin{cases} x' = 2y + z \\ y' = x + y - z \\ z' = -4x + 4y + 5z \end{cases}$

c. $\begin{cases} x' = 2x - 2y - 2z \\ y' = -2x + 5y - z \\ z' = -2x - y + 5z \end{cases}$

Reeks 9 Oplossen van differentiaalvergelijkingen door reeksontwikkeling

Oplossing in een omgeving van een gewoon punt

Oefening 9.1 Bepaal, door middel van reeksontwikkeling, de algemene integraal in een omgeving van $x = 0$ van de volgende differentiaalvergelijkingen. Schrijf de recursiebetrekking, en de eerste drie van nul verschillende termen van twee lineair onafhankelijke oplossingen. Schrijf indien mogelijk de algemene term van de reeks, en bepaal tevens het convergentiegebied.

a. $4(1 - x^2)y'' - 8xy' + 3y = 0$

b. $(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0$

c. $y'' - (x - 15x^2)y' - (1 - 3x^3)y = 0$

Oplossing in een omgeving van een regelmatig singulier punt

Oefening 9.2
Bepaal, door middel van een reeksontwikkeling, twee lineair onafhankelijke oplossingen in een omgeving van $x = 0$ van de volgende differentiaalvergelijkingen. Schrijf, indien mogelijk, de algemene term van de reeks. Bepaal ook het convergentiegebied.

a. $2x^2y'' + (x^2 - x)y' + y = 0$

b. $4xy'' + 2(1 - x)y' - y = 0$

c. $(3x^2 + 3x^3)y'' - (x + 6x^2)y' + y = 0$

Oplossing in een omgeving van oneindig

Men zegt dat de differentiaalvergelijking

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

waarbij $a_0(x), a_1(x)$ en $a_2(x)$ veeltermen zijn, een **regelmatig singulier punt op oneindig** heeft, als de substitutie $t = 1/x$ leidt tot een differentiaalvergelijking met een regelmatig singulier punt in $t = 0$.

Oefening 9.3 Toon aan dat de volgende differentiaalvergelijking een regelmatig singulier punt op oneindig heeft en bepaal de algemene integraal (met reeksontwikkeling) voor grote waarden van $|\, x \,|$.

a. $2x^3y'' + (2x + x^2)y' + 2y = 0$

b. $x^4y'' - y = 0$

c. $x^3y'' + x(1 - x)y' + y = 0$

10 Inleiding tot MATLAB

In deze tekst wordt kort uitgelegd hoe je in MATLAB werkt. Eens vertrouwd met de basis, is het de bedoeling autonoom met het pakket aan de slag te kunnen, de helpfile is daartoe voldoende uitgebreid en verhelderend: Maak er gebruik van!
Voor wie meer informatie wil, bulkt het internet van de FAQ's, manuals en nieuwsgroepen terzake. Een goede start is bijvoorbeeld 'MATLAB Primer', te vinden op de website van de vakgroep wwwir.vub.ac.be/wisk.

10.1 De kracht van MATLAB

Je kan je afvragen waarom wordt gekozen voor het pakket MATLAB, en bijvoorbeeld niet voor MAPLE. Dit is omdat er een erg groot conceptueel verschil tussen beide pakketten is:
MAPLE is symbolisch erg sterk, het is ontworpen om exacte oplossingen te geven, $\sqrt{2}$ in plaats van $1,4142135623$. MATLAB daarentegen presteert symbolisch eerder slecht, maar het heeft alles in huis om numerieke berekeningen te maken.
Een tweede punt is dat MAT- in MATLAB *niet* staat voor mathematisch, maar voor matrix: MATLAB is MATRIX LABORATORY. De meest uiteenlopende matrixbewerkingen zijn uitermate efficiënt te programmeren binnen dit pakket. Hierbij kan je 'matrixbewerking' nauwelijks te ruim nemen: vectoren, lijsten van vectoren, punten van een grafiek, ... deze kunnen allemaal binnen MATLAB gemanipuleerd worden als waren het matrices.

10.2 De MATLAB windows

MATLAB kent een aantal verschillende vensters. De belangrijkste hiervan, die je reeds terug vindt bij het opstarten van MATLAB, zijn

- Command Window : In dit venster bevindt zich de *Commandline* (aangegeven door '>>') waar je MATLAB-commando's kan invoeren. Ook de output van een commando wordt hier onmiddellijk getoond.
- Command History : In dit venster worden alle ingevoerde commando's opgeslagen.
- Workspace : Hier kan je zien welke variabelen er in gebruik zijn, van welk type ze zijn (boolean, getal, vector, matrix) en wat hun waarde op dat moment is.
- Current Directory

Tijdens het werken met MATLAB zullen we nog enkele andere vensters tegenkomen

- Figure : Dit venster wordt geopend om geplotte grafieken te tonen.
- M-file Editor : Dit is een eenvoudige editor waarin we programma's en functies kunnen typen.

10.3 Het invoeren van commando's

Eén van de belangrijkste aspecten van MATLAB is dat het steeds in matrices rekent. Dit houdt ondermeer in dat alle variabelen als matrices worden beschouwd en je als gebruiker ook op die manier moet leren denken. Getallen worden beschouwd als 1×1-matrices, vectoren als $1 \times n$ (of $n \times 1$) matrices.

Ook veeltermen worden in MATLAB aan de hand van matrices gemanipuleerd. Een rijmatrix $[a_1\, a_2 \cdots a_{n-1}\, a_n]$ wordt dan gezien als de veelterm $p(x) = a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$.

Om een variabele te (her)definiëren, dient men *eerst* de naam van de variabele te typen, gevolgd door een gelijkheidsteken en de waarde die men aan deze variabele wil toekennen. De naam die aan een variabele gegeven wordt, mag een combinatie van letters en cijfers zijn, maar moet steeds beginnen met een letter.

Voorbeeld

```
>> x=2
x =

         2

>> v=[1 2 3]
v =

         1     2     3

>> A=[1,2;3,4]
A =

         1     2
         3     4
```

Normaal geeft MATLAB na elk commando het resultaat daarvan weer op het scherm. Indien men echter zo'n commando eindigt met een kommapunt ('`;`') wordt het commando wel uitgevoerd, maar krijgt men geen resultaat op het scherm. Dit is handig in (lange) berekening waarbij men niet geïnteresseerd is in tussentijdse uitkomsten. Door gebruik van de kommapunt zal het programma ook minder tijd in beslag nemen.

Een ander handig hulpmiddel is de dubbelepunt. Het wordt gebruikt indien men aan een variabele opeenvolgende waarden wil geven. '`:`' heeft dus de betekenis "van ... tot ...". Zoals gezegd zijn alle variabelen in MATLAB matrices, dit is in dit geval ook zo. Meer precies genereert een commando als

```
t=0:3
```

een rijmatrix `t=[0 1 2 3]`. Zoals uit het voorbeeld duidelijk is, is het verschil tussen opeenvolgende waarden standaard gelijk aan 1. Indien men dit wil wijzigen gebruikt men '`:s:`' in plaats van '`:`', waarbij `s` de grootte van de tussenliggende stap is.

Voorbeeld

```
>> t=0:0.2:1
t =

       0     0.2    0.4    0.6    0.8    1

>> t=4:-1:1
t =

       4     3      2      1
```

Dit soort commando's zijn heel handig voor het manipuleren van deelmatrices en bij het gebruik van lussen (zie sectie 10.6).

Te lange commando's kan men over meerdere lijnen spreiden door op het einde van een lijn drie punten (`...`) te plaatsen, waarna men op de volgende lijn verdergaat.

Het commando `clc` maakt het commandoscherm leeg en het commando `clear` verwijdert alle variabelen uit het werkgeheugen.

Indien men in het commandoscherm een fout commando opgaf of men wil een vroeger commando (eventueel in licht gewijzigde vorm) opnieuw uitvoeren, dan kan men dit commando opnieuw oproepen door een aantal keer op de pijltjestoets $\uparrow$ te drukken, waarna men de wijzigingen kan aanbrengen. Oude commando's kunnen ook uit de Command History worden opgeroepen door ze te dubbelklikken.

10.4 Het laden van `.m`-files in MATLAB

Een van de sterke punten van MATLAB is de mogelijkheid om programmaatjes op te slaan in een apart bestand (de zogenaamde `.m`-files). Deze kunnen dan op eender welke schijf worden geplaatst, en binnen MATLAB gebruikt.

- Nieuwe .m-files die je wil gebruiken, of .m-files die je zelf maakt, plaats je best in dezelfde map. Hiervoor maak je best een nieuwe map aan, b.v. `'C:\MATLAB'`
- Vervolgens voeg je MATLAB-directory toe aan het 'path', dit is de lijst van alle locaties op de computer waar MATLAB naar `.m`-files gaat zoeken. Typ hiertoe volgende opdracht: `path(path,'C:\MATLAB')`
- In de PC-klas zal je dit *elke keer* dat je MATLAB opstart moeten doen, op je eigen PC kan je de map permanent aan het path toevoegen:
  File > Set Path > Add Folder > `C:\MATLAB` > OK > Close > Yes.

Eenmaal het path juist is ingesteld, kan je een `.m`-file aan de commandline oproepen door gewoon de naam te typen, *zonder* de `.m`-extensie.

10.5 Het creëren van `.m`-files

10.5.1 Maken en plaatsen van `.m`-files

Vergeet eerst en vooral niet de *Current Directory* in te stellen (zie sectie 10.4). Zoals reeds gezegd gaan we daar alle `.m`-files opslaan, zodat we ze rechtstreeks kunnen aanroepen vanuit het *Command Window*.
We kunnen `.m`-files op verschillende manieren maken. De meest courante is ze uit te typen in een gewone editor. De specifieke MATLAB-editor is hiervoor aangewezen:
Start > Programs > MATLAB 7.0 > M-file Editor
Een andere mogelijkheid is de commando's één na één in te voeren in het Command Window zelf, en wanneer een juist werkende reeks commando's is gevonden, de overeenkomstige regels in de *Command History* te selecteren (met `Shift` en `Ctrl`) en na rechtermuisklikken `Create M-File` te selecteren.

10.5.2 Syntaxis van .m-files

De meest eenvoudige programma's bestaan enkel uit een opeenvolging van commando's (eventueel met voorzien van voorwaardelijke commando's of lussen, zie sectie 10.6). Indien men zo'n `.m`-file oproept door de naam van deze `.m`-file aan de commandline in te typen, zal MATLAB de verschillende commando's uit het programma in dezelfde volgorde uitvoeren.
Let wel op, alle variabelen uit het programma zijn in dit geval 'locaal gedefinieerd'. D.w.z. dat indien bijvoorbeeld een programma `test.m` gebruik maakt van een variabele `x` (het bevat bijvoorbeeld de lijn `'x = 2'`) en in het command window werd reeds een waarde aan een variabele met de naam `x` gegeven (bijvoorbeeld `'x = 1'`), dan zal MATLAB beide variabelen toch als verschillend beschouwen. Dit impliceert dat het uitvoeren van het programma geen invloed zal hebben op de waarde van de variabele `x` in het Command Window (na het uitvoeren van het programma zal de waarde van `x` nog steeds 1 zijn.)

Indien met een programma wel wil ingrijpen in de waarde van de variabelen uit de command window, moet je gebruik maken van een iets geavanceerder soort programma's, namelijk *functies*.
Bij dit soort programma's kan je een aantal MATLAB-variabelen (booleans, getallen, vectoren, of algemeen matrices) inlezen, en een aantal andere als uitkomst teruggeven.
Elke functie start met

```
function [a,b,...] = naam(x,y,...)
```

waarbij

- `a`, `b`, ..., de te berekenen functiewaarden zijn, dit kunnen zowel booleans, getallen, vectoren en dus in het algemeen matrices zijn;
- `x`, `y`, ..., de op te geven variabelen zijn, dit mogen opnieuw booleans, getallen, vectoren of matrices zijn;

- `naam` de naam van de functie is. Het is aangewezen de functie steeds op te slaan onder dezelfde naam deze die gekozen is voor de functie zelf, dus in dit geval onder '`naam.m`'.

Nu kan de functie worden aangeroepen in MATLAB met de naam die meegegeven werd aan de `.m`-file. De op te geven variabelen worden tussen haakjes en gescheiden met komma's meegegeven.

`>>[a,b,c] = naam(x,y,z)` of kortweg
`>>naam(x,y,z)`

In het tweede geval wordt de output niet opgeslagen in een globale variabele.

MATLAB kent geen syntax voor het beëindigen van een programma of functie.

Het is vaak handig om een programma van wat extra commentaar te voorzien, zoals waarvoor het programma dient of wanneer het gemaakt is. Dit kan door een regel te beginnen met een procentteken '`%`'. Alles wat op een regel op een procentteken volgt, wordt bij het uitvoeren van het programma door MATLAB genegeerd.

Voorbeeld

```
function [y] = dubbel(x)    % Deze functie verdubbelt
y=2*x;                      % de waarde van een getal
```

In MATLAB geeft dit

```
>> dubbel(2)

ans =
         4
```

De kommapunt achter het commando onderdrukt de output van de toekenning `y=2*x`, je ziet enkel de output van `dubbel(2)`. Je kan van deze kommapunten gebruik maken indien je bepaalde delen van je programma wenst te debuggen.

10.6 Lussen

Bij het programmeren is het vaak van belang om voorwaardelijke commando's te kunnen opgeven. In MATLAB zijn hiervoor enkele mogelijkheden voorzien zoals men die vindt in de meeste computertalen.

10.6.1 FOR-LUS

Een opeenvolging van bevelen wordt een *vast aantal* keer uitgevoerd.

for <teller> = <rij>
    <bevelen> (;)
end

Voorbeeld

```
for i=1:n
x(i)=0;
end
```

Dit maakt de eerste n elementen van de vector `x` nul.

10.6.2 WHILE-LUS

Een opeenvolging van bevelen wordt steeds opnieuw uitgevoerd, *zolang* aan een bepaalde voorwaarde wordt voldaan.

while <voorwaarde>
    <bevelen> (;)
end

Voorbeeld

We bepalen het grootste getal n waarvoor $n!$ kleiner is dan 10^{100}.

```
n=1
while prod(1:n)<1 e 100
n=n+1;
end
n-1
```

10.6.3 IF-LUS

Een opeenvolging van bevelen wordt enkel (*eenmalig*) uitgevoerd als aan de voorwaarde wordt voldaan, zoniet worden eventueel andere bevelen uitgevoerd.

if <voorwaarde>
    <bevelen> (;)
elseif <voorwaarde>
    <andere bevelen> (;)

```
else
        <andere bevelen> (;)
end
```

Voorbeeld

We bepalen $n!$ voor een opgegeven getal n.

```
n=input('Van welk getal wil je de faculteit bepalen')
if n<0
error('Niet gedefinieerd voor negatieve getallen')
break
elseif n==0
fac=1
else
fac=prod(1:n)
end
```

Opmerking : ‘break’ in bovenstaand voorbeeld zorgt ervoor dat men onmiddellijk uit de lus stapt.

10.7 Grafieken

Om een grafiek te tekenen met MATLAB dien je de functie uit te rekenen in een groot aantal waarden en deze tegen elkaar uit te zetten. Het commando `plot(x,y)`, waarbij `x` en `y` vectoren zijn met dezelfde lengte, zorgt ervoor dat MATLAB de punten (x_i, y_i) uitzet en in volgorde met elkaar verbindt, waarbij x_i de i-de coördinaat is van de vector `x` en y_i de i-de coördinaat van de vector `y`. De grafiek verschijnt in een nieuw venster : *Figure*.

Voorbeeld

We tekenen de grafiek voor de functie $y = x^2$ op het interval $[-1, 1]$.

`>>x=linspace(-1,1,100)`	Dit maakt een fijne onderverdeling van een interval $[-1, 1]$.
`>>y=x.^2`	De functiewaarden in de respectievelijke punten worden berekend.
`>>plot(x,y)`	De functie wordt geplot, het resultaat verschijnt in het Figure-venster.

De puntbewerkingen zijn hier vaak heel nuttig.

Indien men het commando `plot` nogmaals uitvoert, wordt de nieuwe grafiek in hetzelfde venster geplot en wordt de vorige grafiek gewist. MATLAB voorziet echter twee manieren om vroegere tekeningen te behouden. De eerste methode bestaat erin het commando `figure` uit te voeren voor men een tweede grafiek plot. Dit zorgt ervoor dat de volgende tekening in een *ander venster* wordt getekend. Bij de tweede methode gebruikt men de commando's `hold on` en `hold off`. Alles wat na het commando `hold on` en voor `hold off` wordt geplot, wordt bovenop de op dat moment opstaande grafiek getekent.

10.8 overzicht van de belangrijkste MATLAB commando's

	BASISHANDELINGEN
>Help>MATLAB Help	gebruiksvriendelijke helpfiles met voorbeelden en tutorials
help	geeft een lijst met de topics
help <topic>	geeft de commando's per topic
help <commando>	legt het gebruik van het commando in detail uit
clc	wist alle info op het scherm
clear	verwijdert variabelen uit het geheugen
clear <variabele>	verwijdert een specifieke variabele uit het geheugen
who	geeft een lijst van de gebruikte variabelen
del, backspace, $\rightarrow$, $\leftarrow$	navigeren binnen het commando
$\uparrow$, $\downarrow$	selecteren van een eerder gebruikt commando
[ctrl + c]	berekening onderbreken
	INVOER
+ − * / ^	basisbewerkingen tussen getallen
<variabele> = <getal>	toekenning
pi	π
eps	machinenauwkeurigheid
realmin	kleinste positief reëel getal dat het programma kan gebruiken
realmax	grootste positief reëel getal dat het programma kan gebuiken
inf	∞
i, j	imaginaire eenheid, $i^2 = -1 = j^2$
	UITVOER
<commando>;	uitvoer onderdrukken
ans	laatste niet toegekende uitkomst
NaN	geen geldig getal als uitvoer
format	pas het formaat van de uitvoer aan (aantal b.c.)

MATRICES INVOEREN

$A = [a_{11}, \ldots, a_{1m}; a_{n1}, \ldots, a_{nm}]$	invoer van een $n \times m$ matrix (het is mogelijk spaties te gebruiken in plaats van komma's en nieuwe lijnen te beginnen in plaats van de kommapunten)
$v = [v_1\ v_2\ \ldots\ v_n]$	invoer van een n-dimensionale rijvector
$w = [v_1; v_2; \ldots; v_n]$	invoer van een n-dimensionale kolomvector

MATRIXBEWERKINGEN

$v = w'$	transponeren van een matrix
$+ \quad - \quad .^* \quad ./ \quad .\hat{}$	elementsgewijze bewerkingen tussen matrices
$A\ {}^*B$	matrixvermenigvuldiging
$A/B = A\ {}^*B^{-1}$	matrixvermenigvuldiging met de inverse

SELECTIES BINNEN MATRICES

$A(i, j)$	selecteert het element op positie i, j binnen de matrix
$A(i_1 : i_2, j)$	… de elementen op rijen i_1 t.e.m. i_2, in kolom j
$A(i_1 : s : i_2, j)$	… de elementen in kolom j van rijen i_1 t.e.m. i_2, om de s stappen
$A(:, j)$	… alle elementen binnen kolom j

MATRICES GENEREREN

`eye(`n`)`	genereert de eenheidsmatrix van dimensie n
`zeros(`n`)`	… de matrix van dimensie n met enkel nullen
`ones(`n`)`	… de matrix van dimensie n met enkel enen
`rand(`m,n`)`	… een $m \times n$ matrix met willekeurige elementen tussen 0 en 1
`diag(`v`)`	… een diagonaalmatrix met de componenten van v
`diag(`A`)`	… een vector met als componenten de diagonaalelementen van A
$v_1 : s : v_2$	… een vector met getallen van v_1 tot v_2 en stapgrootte s
`linspace(`v_1`,`v_2`,`n`)`	… een vector met n equidistante getallen tussen v_1 en v_2

FUNCTIES

`help elfun, help specfun`	overzicht van de meest courante functies op getallen

`help elmat, help matfun`	overzicht van de functies op vectoren en matrices
	VEELTERMEN
$p = [a_1\, a_2\, \ldots\, a_{n-1}\, a_n]$	de veelterm $p(x) = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$
`conv`(p,q)	veeltermvermenigvuldiging
$[q,r]$=`deconv`(p,q)	Euclidische deling van veeltermen, met q en r als quotiënt en rest
`polyder`(p)	afleiden van een veelterm
`polyval`(p,x)	berekenen van p voor het getal x
	BEWERKINGEN MET BOOLEANS
`<  <=  >  >=  ==  ~=`	relationele bewerkingen
`&  |  ~`	logische bewerkingen *en, of, niet*
	GRAFIEKEN
`plot(x,y)`	maakt een tekening bestaande uit alle punten (x_i, y_i)
`plot(x,y,'r*.')`	plot een grafiek in rode kleur (‘`r`’), waar de punten (x_i, y_i) aangeduid worden met een $\star$ en verbonden worden door een stippellijn (‘`.`’)
`plot3(x,y,z)`	maakt een tekening bestaande uit alle punten (x_i, y_i, z_i)
`title('tekst')`	zet een titel bij een grafiek
`xlabel('tekst')`	geeft een naam aan de x-as
`ylabel('tekst')`	geeft een naam aan de y-as
`grid`	maakt schaallijnen op de tekening
`figure`	opent nieuw figuurvenster voor grafieken
`hold on, hold off`	om verschillende figuren boven elkaar te plotten

11 Voorbeelden van MATLAB programma’s

Voorbeeldprogramma 01

```
% INLEIDING MATLAB
% Voorbeeldprogramma 01

% Definitie, oproep en wijziging van getal-variabelen.
% Onderdrukken van output.
% Commentaar in code

clear;
clc;

x = 7
```

```
x
x = 1
x
y = 4 - i;
y;
y
x = y
x
z
```

Voorbeeldprogramma 02

```
% INLEIDING MATLAB
% Voorbeeldprogramma 02

% Elementaire rekenoperaties op getal-variabelen.
% Volgorde van rekenoperaties en gebruik van haakjes.
% Wiskundige functies op getalvariabelen.
% Veranderen output-formaat getallen.

clear;
clc;

a = -8;
b = 4;
c = 3;

d = a/3+b-2*c^2
d = a/3+(b-2)*c^2

sqrt(16)
exp(1)
log10(100)
sin(pi)
conj(3 + 5i)
abs(4 - 5j)

format short; d
format long; d
format short e; d
format long e; d
```

Voorbeeldprogramma 03

```
% INLEIDING MATLAB
% Voorbeeldprogramma 03

% Definitie, oproep en wijziging van matrix-variabelen.
% Oproep en wijziging van matrix-elementen.


clear;
clc;

A = [1 2
3 4];

A

A = [11 12 13; 21 22 23];
A

C(1,1) = 11
C(1,2) = 12
C(2,1) = 21
C(2,2) = 22
C

A(1,3)

A(2,2) = 9;
A

C(2,4)
```

Voorbeeldprogramma 04

```
% INLEIDING MATLAB
% Voorbeeldprogramma 04

% Definitie van speciale matrix-variabelen.
% Selectie van deelmatrices.
% Transponeren van matrices.

clear; clc;
```

```
ones(2)
ones(2,3)

zeros(3)
zeros(3,2)

eye(2)
eye(2,4)

rand(3)
rand(1,3)

randn(2)
randn(3,1)

vect1 = 1:6
vect2 = 1:2:6
vect3 = 6:-3:-10
vect4 = 0:0.1:1

A = vect2'*vect3

A(:,4)
A(2,:)
A(1:3,2:4)

a = 1:3; b = 2:4;
A(a,b)
A([1 5],[1 3 4])
```

Voorbeeldprogramma 05

```
% INLEIDING MATLAB
% Voorbeeldprogramma 05

% Elementaire rekenoperaties op matrix-variabelen.
% Elementaire rekenoperaties op matrix- en getalvariabelen.

clear; clc;

A = [1 2 3; 4 5 6];
B = [-1 0 1; 3 3 2; 1 -4 0];
```

```
C = [-5 7 -1; 2 6 -2];
D = [1 2 3; -4 0 0; 0 3 -3];
a = 3;

A + C
C - A
A * B

A + 3
-2 * C
B / a

B/A
B*inv(A)

A\B
A^(-1)*B

flops(0);
B/A;
flops

flops(0);
B*inv(A);
flops

sqrt(A), cosh(B), abs(C)
```

Voorbeeldprogramma 06

```
% INLEIDING MATLAB
% Voorbeeldprogramma 06

% Puntsgewijze rekenoperaties op matrix-variabelen.
% Puntsgewijze rekenoperaties op matrix- en getalvariabelen.
% Matrix functies

clear;
clc;

A = [2 5; -7 3];
B = [1 2; 2 4];
c = [1 2 3];
```

```
d = [1 0 2];

A*B
A.*B

A/B
A./B

A.^B
B.^3
3.^B

size(A)
a = size(A)
[r,k] = size(B)

length(c)
length(c')

det(A)
rank(B)

dot(c,d)
cross(c,d)
```

Voorbeeldprogramma 07

```
% INLEIDING MATLAB
% Voorbeeldprogramma 07

% Booleans.
% Relationele en logische operatoren.

clear;
clc;

a = 1;
b = 2;

A = [1 2; 3 4];
B = [1 3; 2 4];

a < b
```

```
a > b
A == B
(A > 1) & (A <= 3)
(A ~= B) | ~(B <= 2)
```

Voorbeeldprogramma 08

```
% INLEIDING MATLAB
% Voorbeeldprogramma 08

% If conditional.

clear;
clc;

x = 0

if (x < 1)
  x = x + 1
end

if (x < 1)
  x = x + 1
else
  x = 4*x
end

if (x < 1)
  x = x + 1;
elseif (x > 2)
  x = 0;
end

if (x < 1)
  x = x + 1;
else
  if (x > 2)
    x = 0;
  end
end

x
```

Voorbeeldprogramma 09

```
% INLEIDING MATLAB
% Voorbeeldprogramma 09

% For loop.

clear;
clc;

for index = 1:3
  index^2
end

for index = 1:4:10
  index^2
end

x = 1:3:10;
A = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9];

x
for v = x
  v
end

A
for v = A
  v
end

a = 2;
x(1) = 0; x(2) = a;

for k = 2:25
  x(k+1) = (x(k)*(x(k-1)^2 - a) - x(k-1)*(x(k)^2 - a))...
           ((x(k-1)^2 - a) - (x(k)^2 - a));
end

x
```

Voorbeeldprogramma10

```
% INLEIDING MATLAB
% Voorbeeldprogramma 10

% Loops : while-loop

clear;
clc;

format long;

e = exp(1); approx = 0; counter = 0;

while (abs(approx - e) > 1e-8)
  approx = approx +...
           1/fac(counter);
  counter = counter + 1;
end

e, approx, counter

macheps = 1;

while (1 + macheps > 1), macheps = macheps/2; end
macheps = macheps*2

eps, realmax, realmin
```

Voorbeeldprogramma 11

```
% INLEIDING MATLAB
% Voorbeeldprogramma 11

% Definitie en oproep van functies.
% Meerdere variabelen als input en output.

clear;
clc;

A = [1 2; 3 4];

a = double(1)
```

```
a = double(a)
double(A)
B = double(double(A))

quadratic(1,0,-4)
a = quadratic(1,2,1)
a = quadratic(1,0,4)
[a,b] = quadratic(1,0,1)

***

% INLEIDING MATLAB
% Voorbeeldfunctie double

% Deze functie berekent het dubbele van het argument.

function res = double(par)

res = par + par;

***

% INLEIDING MATLAB
% Voorbeeldfunctie quadratic

% Deze functie berekent de (twee) wortels van een quadratische vgl.,
% als de coefficienten als argument worden meegegeven.

function [root1,root2] = quadratic(a,b,c)

d = b^2 - 4*a*c;

root1 = (-b + sqrt(d))/(2*a);
root2 = (-b - sqrt(d))/(2*a);
```

Voorbeeldprogramma 12

```
% INLEIDING MATLAB
% Voorbeeldprogramma 12

% Recursieve definitie van functies.
% De ene implementatie is de andere niet!
```

```
clear;
clc;

fac(0)
fac(6)
fac(10)

flops(0)
tic
fibrec(5)
toc
flops

flops(0)
tic
fibit(5)
toc
flops

flops(0)
tic
fibrec(25)
toc
flops

flops(0)
tic
fibit(25)
toc
flops

***

% INLEIDING MATLAB
% Voorbeeldfunctie fac

% Deze functie berekent de faculteit van het argument,
% op een recursieve manier.

function res = fac(n)

if (n == 0)
  res = 1;
else
```

```
  res = n*fac(n-1);
end
```

***

```
% INLEIDING MATLAB
% Voorbeeldfunctie fibrec

% Deze functie berekent het fibonacci-getal van het argument.

function res = fibrec(n)

if ((n ==0) | (n == 1))
  res = 1;
else
  res = fibrec(n-1) + fibrec(n-2);
end
```

***

```
% INLEIDING MATLAB
% Voorbeeldfunctie fibit

% Deze functie start de (iteratieve) berekening van het
% fibonacci-getal op.

function res = fibit(n)

res = fibitaux(n,1,0);
```

***

```
% INLEIDING MATLAB
% Voorbeeldfunctie fibitaux

% Deze functie is een hulpfunctie van fibit.
% Ze voert de feitelijke berekeningen uit.

function res = fibitaux(n, curr, prev)

if (n == 0)
  res = curr;
else
  res = fibitaux(n-1, curr + prev, curr);
```

```
end
```

Reeks 12 Oefeningen Matlab 1

Oefening 12.1 Wis alle variabelen die we tijdens de les gebruikt hebben.

Oefening 12.2

- Bereken de inverse matrix B van A; verifieer dat $A.A^{-1} = I$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Bereken het kwadraat van B en noem dit resultaat C.
- Bekom E door de getransponeerde van C elementsgewijs met D te vermenigvuldigen:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 7 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

- Creëer de vector f (gebruik een commando):

$$f = \begin{bmatrix} 8 & 14 & 20 \end{bmatrix}$$

- Creëer de matrix G met behulp van de matrix D, de vector f en commando's

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 14 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 & 20 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  Bereken de determinant h van G.

Oefening 12.3

- Schrijf de functie `myabs(x)` die de absolute waarde van x berekent.
- Schrijf de functie `mysign(x)` dat het teken van x weergeeft.
- Schrijf een functie `mypower(a,n)` die a^n berekent met n een natuurlijk getal.

Oefening 12.4 Schrijf de functie van Ackerman

$$Ack(x,y) = \begin{cases} 0 & y = 0 \\ 2y & x = 0 \\ 2 & y = 1 \\ Ack((x-1), Ack(x, y-1)) & \text{anders} \end{cases}$$

Oefening 12.5 Schrijf een functie `schrikkel(n)` die als resultaat een 1 geeft als n een schrikkeljaar is, en 0 indien niet. Schrikkeljaren zijn jaren waarvan de jaartallen deelbaar zijn door 4, maar niet deelbaar door 100, tenzij het jaartal deelbaar is door 400, in welk geval het toch een schrikkeljaar is.

Oefening 12.6 Schrijf een functie `sol(x,y,z)` die als resultaat de som van de twee grootste getallen geeft.

Oefening 12.7 Schrijf een functie `geslaagd(a,m,s)` die als resultaat een 1 geeft als de student, die als punten a, m en s heeft behaald, een gemiddelde hoger of gelijk aan 11.6 op 20 heeft, en een 0 anders. a, m en s zijn cijfers op 20. De berekening van het gemiddelde is als volgt: elk cijfer hoger of gelijk aan 10 heeft gewicht 1, elk cijfer onder de 10 heeft gewicht 2. Een cijfer onder de 10 weegt dus dubbel zo zwaar als een cijfer hoger of gelijk aan 10.

Reeks 13 Oefeningen Matlab 2

Oefening 13.1 Schrijf een functie `curt(x)` die de derdemachtswortel berekent door gebruik te maken van het algoritme van Newton om een nulpunt van een vergelijking $f(x) = 0$ te benaderen. Dit algoritme is

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Oefening 13.2

Schrijf een functie `int(N)` die $\int_0^1 e^{x^2} dx$ benadert met een linkersom met N stappen, i.e.

$$I = h(f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{N-1})).$$

Oefening 13.3 Schrijf een functie `isin(M,x)` die als resultaat een 1 geeft als minstens één van de elementen van M gelijk is aan x, en 0 indien dit niet zo is.

Oefening 13.4

- Schrijf een functie `maxi(rij)` die het maximum zoekt in een gegeven rijmatrix.
- Schrijf een functie `posmaxi(rij)` die de index van het maximum zoekt in een gegeven rijmatrix.
- Schrijf een functie `posmaxifrom(rij)` die de index van het maximum vanaf een gegeven index zoekt in een gegeven rijmatrix.

- Schrijf een functie `Selectionsort(rij)`.
- Schrijf de functie `Bubblesort(rij)`.

Oefening 13.5 Schrijf een functie `multifib(M,k)`, waarbij M een $n \times 2$ matrix is en k een natuurlijk getal, die als resultaat een $n \times (2+k)$ matrix geeft waarbij elke rij een Fibonacci rij is. Een Fibonacci rij is een rij getallen waar elk element de som van de twee voorgaande is.

Oefening 13.6 Schrijf een functie `merge(rij1,rij2)` die 2 rijen samenvoegt, waarbij de elementen van de ene rij afgewisseld worden met elementen van de andere rij. We beginnen met een element van de eerste rij en als een rij 'opgebruikt' is, vullen we aan met de resterende elementen uit de andere rij.

Oefening 13.7 Schrijf een functie `splitt(rij)` die als resultaat twee rijen geeft, waarbij de eerste rij alle elementen op oneven positie bevat, en de andere rij alle elementen op even positie.

Reeks 14 Oefeningen Matlab 3

Oefening 14.1 Schrijf een functie `ruit(n)` die een $n \times n$ matrix (met n oneven) van de volgende vorm genereert:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Oefening 14.2 Schrijf een functie `SolveLT(L,b)` die het stelsel $Lx = b$ oplost waarbij L een vierkante onderdriehoeksmatrix is. Idem voor `SolveUT(U,b)` met U een bovendriehoeksmatrix is.

Oefening 14.3

- Schrijf een functie `omzetting(t)` die de omzetting doet van graden Celsius (TC) naar Fahrenheit (TF):

  $$TF = \frac{9}{5}TC + 32$$

- Creëer een tabel voor de omzetting van 0°C tot 100°C.
- Plot de functie.

Oefening 14.4

- Schrijf een MATLAB-functie `plotgauss(begin,einde,stap)` die de gausskromme $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ plot tussen het opgegeven interval met de opgegeven precisie.

- Schrijf een tweede functie `raaklijngauss(a)` die de raaklijn aan de gausskromme tekent voor opgegeven x-coördinaat a.

Oefening 14.5 Schrijf een programma dat de methode van Newton grafisch voorstelt zoals toegepast in oefening 13.1, voor het programma `curt(x)`.

Oefening 14.6 Definieer de functie

$$f(x) = \frac{x - \sin(x)}{x^3}$$

Bereken achtereenvolgens $f(0,01); f(0,001); f(0,0001)$ en $f(0,00001)$ in format "long".
Teken de grafiek van f op het interval $[-3,3]$.

Oefening 14.7 Lees de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in. Bereken de eerste 10 machten van A. Controleer welke macht van A mogelijk is onder de voorwaarde dat alle elementen in deze macht kleiner zijn dan 10^6.

Antwoorden

Oefening 1.1 a 1a geen deelruimte, 2a geen deelruimte, 3a deelruimte, 4a deelruimte.

b 1b deelruimte, 2b deelruimte, 3b geen deelruimte, 4b deelruimte.

c 1c deelruimte, 2c deelruimte, 3c deelruimte, 4c deelruimte.

Oefening 1.2 a 1a geen deelruimte, 2a deelruimte, 3a deelruimte, 4a geen deelruimte.

b 1b deelruimte, 2b deelruimte, 3b geen deelruimte, 4b geen deelruimte

c 1c deelruimte, 2c geen deelruimte, 3c deelruimte, 4c deelruimte.

Oefening 1.4 a 1a deelruimte, 2a deelruimte, 3a geen deelruimte.

b 1b geen deelruimte, 2b deelruimte, 3b deelruimte.

c 1c deelruimte, 2c deelruimte, 3c geen deelruimte.

Oefening 1.5 a 1a lin. afhankelijk, 2a lin. afhankelijk.

b 1b lin. afhankeljk, 2b lin. onafhankelijk

c 1c lin. onafhankelijk, 2c lin. afhankelijk.

Oefening 1.6 a 1a lin. onafhankelijk, 2a lin. onafhankelijk.

b 1b lin. afhankelijk, 2b lin. afhankelijk.

c 1c lin. afhankelijk, 2c lin. afhankelijk.

Oefening 1.7 a 1a lin. onafhankelijk, 2a lin. onafhankelijk.

b 1b lin. onafhankelijk. 2b lin. afhankelijk.

c 1c lin. afhankelijk. 2c lin. onafhankelijk.

Oefening 1.8 a 1a voortbrengend, 2a niet voortbrengend.

b 1b voortbrengend, 2b voortbrengend.

c 1c voortbrengend, 2c niet voortbrengend.

Oefening 1.10 a 1a $\{(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$, 2a $\{(1,0,1,0),(0,1,0,1)\}$.

b 1b $\{(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$, 2b $\{(1,0,0,1),(0,1,0,1),(0,0,1,0)\}$.

c 1c $\{(-1,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)\}$, 2c $\{(1,0,1,1),(0,1,-1,1)\}$

Oefening 2.1

a 1a lineair, 2a niet lineair, 3a niet lineair.

b 1b lineair, 2b lineair, 3b niet lineair.

c 1c lineair, 2c niet lineair, 3c niet lineair.

Oefening 2.2

a $aX^3 + bX^2 + b + c - a$.

b $bX^{10} + cX^2 + d + 2c$.

c $\frac{n(n+1)}{2}$.

Oefening 2.3

a 1a niet lineair, 2a lineair, 3a lineair.

b 1b lineair, 2b lineair, 3b lineair.

c 1c lineair, 2c lineair, 3c lineair.

Oefening 2.4

a 1a $\operatorname{Ker} f = \{\vec{o}\}$, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$, $f^{-1}(x,y) = (\frac{x}{2}, -\frac{y}{2})$, 2a $\operatorname{Ker} f = \{(x, -\frac{3}{2}x) | x \in \mathbb{R}\}$, $\operatorname{Im} f = \{(x, 2x) | x \in \mathbb{R}\}$.

b 1b $\operatorname{Ker} f = \{(x,0) | x \in \mathbb{R}\}$, $\operatorname{Im} f = \{(x,0) | x \in \mathbb{R}\}$, 2b $\operatorname{Ker} f = \{\vec{o}\}$, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$, $f^{-1}(x,y) = (\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2})$.

c 1c $\operatorname{Ker} f = \{(0,y) | y \in \mathbb{R}\}$, $\operatorname{Im} f = \{(x,x) | x \in \mathbb{R}\}$, 2c $\operatorname{Ker} f = \{\vec{o}\}$, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$, $f^{-1}(x,y) = (2x - y, -x + y)$.

Oefening 2.5

a $\operatorname{Ker} f = \{\vec{o}\}$, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$, $f^{-1}(x,y,z) = (z, x - z, y - x + z)$,

b $\operatorname{Ker} f = \{(0,y,0) | y \in \mathbb{R}\}$, $\operatorname{Im} f = \{(x, y, \frac{x}{2} - y) | x, y \in \mathbb{R}\}$,

c $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,z) | z \in \mathbb{R}\}$, $\operatorname{Im} f = \{(x, y, \frac{3}{2}x - \frac{y}{2}) | x, y \in \mathbb{R}\}$.

Oefening 2.6

a $\operatorname{Ker} f = \{P \in R[X] | P$ is een constante veelterm $\}$, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}[X]$,

b $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, $\operatorname{Im} f = \{P \in \mathbb{R}[X] | P(0) = 0\}$,

c $\operatorname{Ker} f = \{P \in \mathbb{R}[X] | P(0) = P'(0) = P''(0) = 0\}$, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}_2[X]$.

Oefening 2.7

a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \\ \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

c $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ -3 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 8 & -27 & -13 \\ -8 & -36 & -35 \\ 48 & 34 & 28 \\ 0 & 21 & 10 \end{pmatrix}$

Oefening 2.8

a $f((1,2,3)) = (10,17,4)$, $f((4,5,6)) = (25,38,10)$,

b $f((2,3,-1)) = (-11,-1)$, $f((4,2,-1)) = (-7,1)$,

c $f((1,3,-1)) = (4,22,0,1)$, $f((0,3,6)) = (24,-27,21,24)$.

Oefening 2.9

a 1a dim = 6, 2a dim = 12,

b 1b dim =12, 2b dim = 4,

c 1c dim = 3, 2c dim = 36.

Oefening 3.3

a $\begin{pmatrix} -6 & 2 & -9 \\ 0 & -2 & 0 \\ 10 & -2 & 15 \end{pmatrix}$

b $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} \\ 5 & 2 & 3 \\ -\frac{11}{2} & \frac{15}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

c $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & \frac{11}{2} & \frac{5}{2} \\ 5 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

Oefening 3.4

a rijrang = kolomrang = 4,

basis voor deelruimte voortgebracht door rijen :

$\{(0,1,3,-1,2),(0,0,1,-2,-3),(0,0,0,1,26/7),(0,0,0,0,1)\}$,

basis voor de deelruimte voortgebracht door de kolommen :

$\{(1,-3,-3,-2),(0,1,1/2,3/2),(0,0,1,-7/2),(0,0,0,1)\}$,

b rijrang = kolomrang = 5,

basis voor deelruimte voortgebracht door rijen :

$\{(1,2,3,2,3),(0,1,1,0,0),(0,0,1,0,-2),(0,0,0,1,2),(0,0,0,0,1)\}$,

basis voor de deelruimte voortgebracht door de kolommen :

$\{(1,1,-1,2,1),(0,1,-4,3,0),(0,0,1,1/2,1),(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)\}$,

c rijrang = kolomrang = 4,

basis voor deelruimte voortgebracht door rijen :

$\{(1,-2,0,2),(0,1,-1,1),(0,0,1,-2/7),(0,0,0,1)\}$,

basis voor de deelruimte voortgebracht door de kolommen :

$\{(1,2,1,1),(0,1,5,3),(0,0,1,3/7),(0,0,0,1)\}$.

Oefening 3.5

a x = -1, y = 4, z = -7; x = $\frac{-15a+b+5c}{2}$, y = $\frac{a+b-c}{2}$, z = $\frac{5a-b-c}{2}$,

b x = 1, y = 10, z = -7, w = -6; x = 1, y = 2, z = 1, t = 2,

b x = $-\frac{26}{33}$, y = $-\frac{58}{33}$, z = $-\frac{1}{11}$, t = $\frac{23}{33}$; x = 11, y = -18, z = 34.

Oefening 3.6

a $b_1 = 2b_2$; $b_1 - b_2 = b_3$,

b elke keuze is goed; $b_2 - b_1 = b_3$, $2b_1 - b_2 = b_4$,

c $-5b_1 + 2b_2 + b_3 = 0$; elke keuze is goed.

Oefening 3.7

a A heeft geen invers, $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{2} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$, $G^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ \frac{1}{a^3} & -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{1}{a^4} & \frac{1}{a^3} & -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$,

b $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$, $E^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_4} \end{pmatrix}$, $H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$,

c $C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{da-cb} & \frac{-b}{da-cb} \\ \frac{-c}{da-cb} & \frac{a}{da-cb} \end{pmatrix}$, $F^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{7} & 0 \\ \frac{3}{5} & -\frac{9}{35} & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{7} & 0 \end{pmatrix}$.

Oefening 4.1

a 1; -16;

b 2abc; -12;

c 0; $b^3 - b$.

Oefening 4.3

(b-a)(c-a)(c-b)

Oefening 4.5

Als $a_i = 0 : a_1 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_n$

Oefening 4.7

a $p_A(\lambda) = -\lambda^3$, $\lambda = 0 : \{(x,y,z) | y = z = 0\}$. Niet diagonaliseerbaar.

$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 14\lambda + 8$,

$\lambda = 4 : \{(x,y,z) | 2x = 7z, y = -2z\}$.

$\lambda = 2 : \{(x,y,z) | y = z = 0\}$.

$\lambda = 1 : \{(x,y,z) | -x = y = z\}$. Diagonaliseerbaar.

b $p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 + \lambda - 5$,

$\lambda = 5 : \{(x,y,z) | x = 2y, z = 0\}$.

$\lambda = 1 : \{(x,y,z) | x = -z, y = 0\}$.

$\lambda = -1 : \{(x,y,z) | z = -3x, y = 2x\}$. Diagonaliseerbaar.

$p_A(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4)$,

$\lambda = 4 : \{(x,y,z) | x = z, y = 0\}$.

$\lambda = 1 : \{(x,y,z) | z = 4x, y = -6x\}$.

$\lambda = -1 : \{(x,y,z) | 2x + 3z = 0, y = 0\}$. Diagonaliseerbaar.

c $p_A(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda$,

$\lambda = 2 : \{(x,y,z) | 3x = y = -3z\}$.

$\lambda = -1 : \{(x,y,z) | 2x = -2y = z\}$.

$\lambda = 0 : \{(x,y,z) | x = y = z\}$. Diagonaliseerbaar.

$p_A(\lambda) = -\lambda(1 - \lambda)^2$,

$\lambda = 0 : \{(x,y,z) | x + z = 0, y = 0\}$.

$\lambda = 1 : \{(x,y,z) | x = 0\}$. Diagonaliseerbaar.

Oefening 5.4

$$\textbf{b1}.\ \frac{e}{e^2 - 1}\ ;\textbf{b2}.\ -\cos 1\ ;\textbf{b1}.\ 1$$

Oefening 5.5

$$\textbf{a1}.\ [-3,3); \quad \textbf{a2}.\ (-1,1]; \quad \textbf{a3}.\ [-2,0); \quad \textbf{a4}.\ \{1\}$$

$$\textbf{b1}.\ \{-1\}; \quad \textbf{b2}.\ [-1,1]; \quad \textbf{b3}.\ (-2,2); \quad \textbf{b4}.\ \mathbb{R} \setminus [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

a1. $\mathbb{R}$; **a2**. $[-1,1]$; **a3**. $\{0\}$; **a4**. $[1,3]$

Oefening 5.8

a $f(x) = \dfrac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2} \cos nx - \dfrac{1}{n\pi} \sin nx \right)$

b $f(x) = 1,6 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{10}{n^2\pi^2} \left(-1 + \cos\left(\dfrac{2n\pi}{5} \right) \right) \cos n\pi x$

c $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{16}{(2n+1)^2\pi^2} \cos \dfrac{(2n+1)\pi x}{4}$

Oefening 5.9

a $f(x) = \dfrac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \dfrac{n\pi x}{2}$

b $f(x) = 1 - \dfrac{8}{\pi^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2} \cos \dfrac{(2n+1)\pi x}{2} \right)$

c $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{8n}{(4n^2-1)\pi} \sin(2nx)$

Oefening 5.10

a $F(p) = -\dfrac{2p\sin(p\pi)}{p^2 - 9}$

b $F(p) = \dfrac{6i\sin(p\pi)}{p^2 - 9}$

c $F(p) = -\dfrac{1}{p^2}\left(e^{-ip} - 1\right)^2$; $(\phi * \phi)(t) = \begin{cases} 1 - |x-1| & \text{als } 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$

Oefening 6.1

a1. $x^2 + 2y\sin x = c$

a2. $e^{x^2 y} + e^{xy^2} + x - y^2 = c$

a3. $x\sqrt[3]{(x^2+y^2)^4} = c$

b1. $(1 + e^{2x})y = c$

b2. $(x+1)y^2+\ln|x+y|-\ln|x|+2x=c$

b3. $(x-1)\ln(y^2+1)=c$

c1. $x^2+3yx+4x+2y^2+5y=c$

c2. $\sqrt{(x^2+y^2)^3}-3xy=c$

c3. $x+y=c(1+xy)$

Oefening 6.2

a1. $x+y-\ln|x(y+1)|=c$; singuliere oplossingen : $x=0,\ y=-1$

a2. $\dfrac{1+x}{1-x}\sin^2 y=c$

b1. $y=\operatorname{tg}\ln\left|\dfrac{cx}{x+1}\right|$ singuliere oplossingen : $x=0,\ x=-1$

b2. $\cos y=c(1+e^x)$

c1. $y=ce^{x^3-y^2}$

c2. $2y+x=\ln|cxy|$; singuliere oplossing : $y=0$

Oefening 6.3

a1. $2x^2y^2-x^4=c$

a2. $2x^2y^2+x^4=c$

b1. $ye^{y/x}=c$ singuliere oplossing : $x=0$

b2. $\sin\dfrac{y}{x}=\dfrac{c}{x}$

c1. $\ln|y-x|-\dfrac{4x}{y-x}-\dfrac{2x^2}{(y-x)^2}=c$; singuliere oplossingen : $x=y,\ y=0$

c2. $xe^{x/y} = c$ singuliere oplossing : $y = 0$

Oefening 6.4

a1. $(x+y)e^{x+2y} = c$

a2. $(y-x+1)^2(y+x-1)^5 = c$

b1. $5x-5y-2\ln|15x+10y-1| = c$

singuliere oplossing : $15x+10y-1=0$

b2. $(y+4x+1)^2(y-x-4)^3 = c$

c1. $(4x+8y+5)e^{8y-4x} = c$

c2. $(x+2-y)^4 = c(x+5y+2)$ singuliere oplossing : $x+5y+2=0$

Oefening 6.5

a1. $y = e^x + cx^2$

a2. $y = x^2 + cxe^x$

a3. $e^y = 2(\sin x - \cos x) + ce^{-x}$

b1. $y = -\dfrac{3}{2}\sin 2x - \dfrac{1}{2}\cos x + ce^{6x}$

b2. $y = -\dfrac{1}{2}\sin^2 x + c\operatorname{cosec}^2 x$

b3. $x = \dfrac{1}{2}\ln y + \dfrac{c}{\ln y}$ singuliere oplossing : $y = 1$

c1. $y = x^2\cos x + cx\cos x$ singuliere oplossing : $x = 0$

c2. $y = ce^x - (x+1) - \dfrac{1}{2}(\sin x + \cos x)$

c3. $\cos y = \frac{1}{2}\sin^2 x - \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{4} + ce^{-2\sin x}$

Oefening 6.6

a. $y^{-4} = \frac{4x}{3} + \frac{c}{x^2}$ singuliere oplossing : $y = 0$

b. $\frac{1}{y} = -\sin x + ce^x$ singuliere oplossing : $y = 0$

c. $y^{-3} = ce^{3x^2} - \frac{1}{2}$ singuliere oplossing : $y = 0$

Oefening 6.7

a1. $(yx^3 - c_1)(y - c_2x^2)) = 0$

a2. $64(y-c)^3 = 9(x-1)^4$

a3. $\begin{cases} x = c + 2a\alpha + a\sin 2\alpha \\ y = 2a\sin^2\alpha \end{cases}$

a4. $(yx^3 - c_1)(yx^2 - c_2) = 0$

b1. $(yx - x - c_1)(y - x^2/2 - c_2) = 0$

b2. $\begin{cases} x = (t+1)/(t-1)^2 \\ y = (6t^3 + 3t^2 + 4t - 1)/6(t-1)^4 + c \end{cases}$

b3. $(x-2)^2 = (y+1)y^2$; singuliere oplossing : $y + 1 = 0$

b4. $(y^2 + x^2 - c_1)(yx + x^2/2 - c_2) = 0$

c1. $(y - c_1)(y - x - c_2)(y - x^2/2 - c_3)(y - c_4e^{2x}) = 0$

c2. $\Big(y - \ln|\cos x| + \ln|t-1| - \ln|t+1| - c_2\Big)\Big(y - \ln|\cos x| - \ln|t-1| + \ln|t+1| - c_1\Big) = 0$

c3. $(\sqrt{8y+1} \pm 3)^3 = ce^{-x}(\sqrt{8y+1} \pm 1)$

c4. $2cy - c^2x^2 + 1 = 0$

Oefening 6.8

a1. $y = (4 + c^2y^2)/2c$; singuliere oplossingen : $y = -2x,\ y = 2x$

a2. $3cx = c^2y^3 - 1$; singuliere oplossingen : $y = 0,\ 9x^2 + 4y^3 = 0$

a3. $\begin{cases} x = -2p + 2 + ce^{-p} \\ y = 2 - p^2 + c(1+p)e^{-p} \end{cases}$

a4. $y = cx + c - c^2$; singuliere oplossing : $y = (x+1)^2/4$

b1. $yx = 3c^2x - c$; singuliere oplossing : $y = -x^2/12$

b2. $y^4 + c(c - x) = 0$; singuliere oplossingen : $x = -2y^2,\ x = 2y^2$

b3. $\begin{cases} x = -p/3 = c/p^2 \\ y = -p^2/6 + 2c/p \end{cases}$; singuliere oplossing : $y = 0$

b4. $y = cx + \sqrt{1 - c^2}$; singuliere oplossing : $\begin{cases} x = p/\sqrt{1-p^2} \\ y = 1/\sqrt{1-p^2} \end{cases}$

c1. $\begin{cases} x = c(1+p)e^p \\ y = cp^2e^p \end{cases}$

c2. $y^2 - 4cx + 32c^2 = 0$; singuliere oplossing : $8y^2 - x^2 = 0$

c3. $\begin{cases} x = \left(3p^2/2 - p^3 + c\right)/(p-1)^2 \\ y = xp^2 + p^3 \end{cases}$; singuliere oplossing : $y = x + 1$

c4. $y^2 = cx^2 - c^2$; singuliere oplossing : $4y^2 - x^4 = 0$

Oefening 7.1

a1. $y = (x-2)e^x - \cos x + c_1x + c_2$

a2. $y = \frac{1}{2}a\ln x^2 + c_1\ln|x| + c_2$

a3. $x = c_2(y - \ln|y|) + c_1$; singuliere oplossing : $y = c$

a4. $y = -x + \ln(c_1 + e^{2x}) + c_2$

a5. $c_2\Big(\frac{1}{2}(1+x^2)\mathrm{bgtg}\,x + \frac{x}{2} + c_1(1+x^2)\Big)$

b1. $y = x\ln|x| + c_1x + c_2$

b2. $y = c_1\ln|x| - \frac{x^2}{4} + c_2$

b3. $y = c_1\sqrt{\cos 2(x+c_2)}$

b4. $y = \ln|c_1 + c_2e^x|$; singuliere oplossing : $y = x + c$

b5. $y = c_2(x^2 + x + c_1)/x$; singuliere oplossing : $y = -1/x$

c1. $y = (x-2)e^x - \sin x + c_1x + c_2$

c2. $\frac{1}{2}\ln|x| \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-4c_1x^2} \mp \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{1-4c_1x^2}) \pm \frac{1}{2}\ln(2\sqrt{|c_1|}x + c_2$

singuliere oplossingen : $y = \ln|x| + c, y = c$

c3. $x = y + c_1\ln|c_2y|$; singuliere oplossing : $y = c$

c4. $y = x - \ln|c_2(1-c_1e^x)|$; singuliere oplossingen : $y = c,\ y = x + c$

c5. $y = c_3 + c_2/(x+c_1)$

Oefening 7.2

a1. $y = cx$ en $xy = c$

a2. $y = c$

a3. $y = \pm a\ln(\cos(x/a) + c_1) + c_2$

b1. $y = cxe^{\pm x}$

b2. $y = \pm x + c$ en $y = 0$

b3. $y = \pm \frac{1}{2}(1 - e^{\mp x})$

c1. $\ln \sqrt{x^2 + y^2} \pm \operatorname{bgtg}(y/x) = c$

c2. 1) $y = cx + \dfrac{2ac}{(\mp 1 - c)}$ en $\begin{cases} x = \pm 2a/(-p \mp 1)^2 \\ y = xp + 2ap/(-p \mp 1) \end{cases}$

c2. 2) $y = cx - \dfrac{2ac}{(\mp 1 - c)}$ en $\begin{cases} x = \mp 2a/(-p \mp 1)^2 \\ y = xp - 2ap/(-p \mp 1) \end{cases}$

c3. $y = \pm x + \sqrt{1 - x^2}$

Oefening 8.1

a. $y = e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + e^{-x}(c_3 \cos x + c_4 \sin x)$

b. $y = (c_1 x^2 + c_2 x + c_3)e^{2x}$

c. $y = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx} + (c_3 + xc_4)\cos mx + (c_5 + xc_6)\sin mx$

Oefening 8.2

a1. $y = \left(\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x + c_1\right)e^{3x} + c_2 e^{2x}$

a2. $y = c_1 \cos x + (c_2 + 2x)\sin x - \dfrac{1}{2}\cos 3x$

b1. $y = \left(\dfrac{x^2}{2} + c_1 x + c_2\right)e^{3x}$

b2. $y = (c_1 + \dfrac{x^3}{6})\cos x + c_2 \sin x$

c1. $y = e^x(x^2 - x) + c_1 e^x + c_2 e^{-x}$

c2. $e^{2x}\left(-\dfrac{1}{10}\cos 2x - \dfrac{1}{20}\sin 2x\right) + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$

Oefening 8.3

a. $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - e^{2x} \sin e^{-x}$

b. $y = \dfrac{1}{2} \cos x \ln \dfrac{1 - \sin x}{1 + \sin x} + c_1 \cos x + c_2 \sin x$

c. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \operatorname{ch} x \operatorname{bgtg} e^x - \dfrac{1}{2}$

Oefening 8.4

a. $y = \dfrac{1}{16}\left(\dfrac{1}{3}(2x+1)^2 - (c_1 + \ln|2x+1|)(2x+1) + \dfrac{c_2}{2x+1} - 1\right)$

b. $y = |x|(\pm\dfrac{1}{6}(\ln|x|)^3 + c_1 \ln|x| + c_2)$

c. $y = \dfrac{(\ln|x|)^3}{6x} + \ln x^2 - 6 + \dfrac{c_1}{x} + c_2 \dfrac{\ln|x|}{x} + c_3 \dfrac{(\ln|x|)^2}{x}$

Oefening 8.5

a1. $\begin{cases} y_1 = -c_1/2 + 2c_2 e^{5x} \\ z c_1 + c_2 e^{5x} \end{cases}$

a2. $\begin{cases} x = -2/3 - t \\ y = c_1 + 4t/3 + t^2/2 \end{cases}$

b1. $\begin{cases} y = 2c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} \\ z = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} \end{cases}$

b2. $\begin{cases} y = c_1 e^{3x} + 2c_2 e^{2x} - 3e^x/2 - 2/3 \\ z = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} - e^x/2 + 1/3 \end{cases}$

c1. $\begin{cases} y = 3c_1 e^{3x} + 2c_2 e^{10x} \\ z = -2c_1 e^{3x} + c_2 e^{10x} \end{cases}$

c2. $\begin{cases} x = 2c_1 \cos t + 2c_2 \sin t - t^2 + t + 3 \\ y = (c_2 - 3c_1)\cos t - (c_1 + 3c_2)\sin t + 2t^2 - 3t - 4 \end{cases}$

Oefening 8.6

a. $\begin{cases} x = -Ae^t + 2Be^{2t} + Ce^{-t} \\ y = -Ae^t + Be^{2t} + Ce^{-t} \\ z = 2Ae^t - 2Be^{2t} - Ce^{-t} \end{cases}$

b. $\begin{cases} x = Ae^{2t} + Ce^t \\ y = Ae^{2t} - Be^{3t} \\ z = 2Be^{3t} + ce^t \end{cases}$

c. $\begin{cases} x = 2A + Be^{6t} \\ y = A + Ce^{6t} \\ z = A - (2B + C)e^{6t} \end{cases}$

Oefening 9.1

a. $y = c_0(1 - \frac{3}{8}x^2 - \frac{21}{128}x^4 + \ldots) + c_1(x + \frac{5}{24}x^3 + \frac{15}{128}x^5 + \ldots) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

met $c_n = \frac{4n^2 - 12n + 5}{4n(n-1)} c_{n-2}$

convergentiegebied : $(-1, 1)$

b. $y = c_1 x + c_0(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \ldots) = c_1 x + \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} x^{2n}$

met $c_{2n} = \frac{2n-3}{2n} c_{2n-2} = -\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} c_0$

convergentiegebied : $(-1, 1)$

c. $y = c_0(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{9}{10}x^5 + \ldots) + c_1(x + \frac{x^3}{3} - \frac{5}{4}x^4 - \frac{x^5}{15} + \ldots) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

met $c_2 = \frac{c_0}{2}, c_3 = \frac{c_1}{3}, c_4 = \frac{c_2 - 5c_1}{4}, c_n = \frac{(n-1)c_{n-2} - 15(n-3)c_{n-3} - 3c_{n-5}}{n(n-1)}$

convergentiegebied : $\mathbb{R}$

Oefening 9.2

a. $y_1 = x(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n+1)!!})$

$y_2 = \sqrt{x}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2^n n!}\right)$

convergentiegebied : $\mathbb{R}$

b. $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n!} = e^{x/2}$

$y_2 = \sqrt{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n+1)!!}$

convergentiegebied : $\mathbb{R}$

c. $y_1 = x + \frac{6}{5}x^2 + \frac{9}{20}x^3$

$y_2 = x^{1/3} + \frac{8}{3}x^{4/3} + \frac{20}{9}x^{7/3} + \frac{40}{81}x^{10/3} + 80\sum_{n=4}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(3n-11)!!!}{3^n n!}x^{n+1/3}$

convergentiegebied : voor y_1 : $\mathbb{R}$; voor y_2 : $(-1,1)$

Oefening 9.3

a $y_1 = 1 - \frac{2}{3x}$

$y_2 = \sqrt{x}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n!(2n-1)(2n-3)x^n}\right)$

convergentiegebied : $\mathbb{R}_o$

b $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{-2n}}{(2n+1)!}$

$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{1-2n}}{(2n)!}$

convergentiegebied : $\mathbb{R}_o$

c $y_1 = 1 - \frac{1}{3x}$

De methode levert slechts één lineair onafhankelijke oplossing.