Vrije Universiteit Brussel
Faculteit Toegepaste Wetenschappen

Waarschijnlijkheidsrekening en Statistiek
Oefeningen

S. Caenepeel

1991-2002

Reeks 1

1.1a Is de kans om met een teerling in zes worpen juist één zes te gooien groter dan om juist twee zessen te gooien in twaalf worpen?

1.1b Drie personen hebben een bepaalde ziekte opgelopen. Experimenten hebben uitgewezen dat 10% van diegenen die deze ziekte oplopen er niet van genezen. Wat is de kans dat ze alle drie genezen? Wat is de kans dat geen enkel van de drie geneest?

1.1c Men werpt een teerling zes maal. Vergelijk de kans dat men tweemaal twee, tweemaal vier en tweemaal zes werpt met de kans dat men driemaal twee en driemaal vier werpt.

1.2a Men zet volgens toeval acht witte torens op de velden van een schaakbord. Hoe groot is de kans dat geen enkele toren door een van de andere torens gedekt staat?

1.2b Fons en Tuur spelen het volgende spel: twee teerlingen worden geworpen. Fons wint als de som van de ogen groter is dan 7 en verliest als de som kleiner is dan 7. Bij 7 : gelijk spel. Is dit een eerlijk spel (m.a.w. hebben beide gelijke kans om te winnen)?

1.2c Klaas en Joris spelen het volgende spel: drie teerlingen worden geworpen. Klaas wint als de som van de ogen groter is dan 10 en verliest als de som kleiner is dan 10. Bij 10 : gelijk spel. Is dit een eerlijk spel (m.a.w. hebben beide gelijke kans om te winnen) ?

1.3a Men verdeelt 52 kaarten willekeurig onder vier personen, zodat elke persoon juist 13 kaarten heeft. Wat is de kans dat elke speler juist één aas heeft ?

1.3b Men verdeelt 52 kaarten willekeurig onder vier personen, zodat elke persoon juist 13 kaarten heeft. Wat is de kans dat speler A 13 kaarten van dezelfde kleur heeft ? Wat is de kans dat hij juist 12 kaarten van dezelfde kleur heeft ?

1.3c Men verdeelt 52 kaarten willekeurig onder vier personen, zodat elke persoon juist 13 kaarten heeft. A heeft juist vijf harten. Wat is de kans dat zijn medespeler C juist drie harten heeft? Wat is de kans dat hij geen enkele harte heeft?

1.4a Men gooit twee dobbelstenen. Bereken de kans dat ze allebei een vier tonen als gegeven is dat de som van het aantal ogen zeven of acht is. Hoe groot is de kans dat beiden een twee aangeven als de som zeven of acht is?

1.4b In de onderstelling dat er evenveel jongens als meisjes geboren worden, bereken de kans dat, in een gezin met vijf kinderen

1. alle kinderen van het zelfde geslacht zijn ;
2. de drie oudsten jongens, en de twee jongsten meisjes zijn ;
3. er drie jongens zijn, en twee meisjes.

1.4c Een grondstof gebruikt in de productie van een scheikundig product kan van zes verschillende plaatsen afkomstig zijn met kansen

$$0.09;\ 0.16;\ 0.25;\ 0.25;\ 0.16;\ 0.09$$

De kans dat het gemaakt product voldoet aan een aantal kwaliteitseisen als de grondstof van de respectievelijke plaatsen komt is

$$0.2;\ 0.3;\ 0.4;\ 0.4;\ 0.3;\ 0.2$$

Wat is het percentage producten dat voldoet aan de kwaliteitseisen ?

1.5a Iemand heeft altijd twee doosjes lucifers op zak. Als hij een lucifer nodig heeft neemt hij volgens toeval een van beide doosjes en neemt er een lucifer uit. Hij begint met twee doosjes van elk n lucifers. Hoe groot is de kans dat op het moment dat hij het ene doosje leegmaakt het ander nog k lucifers bevat?

1.5b Karel en Lodewijk schieten elk tweemaal naar een doel. Bij elk schot hebben ze elk kans p om raak te schieten. Indien men weet dat er op 4 schoten twee raak zijn, bereken dan

1. de kans dat beide treffers van Karel komen;
2. de kans dat beide treffers van Lodewijk komen;
3. de kans dat een treffer van Karel komt en de andere van Lodewijk.

1.5c 10% van de producten vervaardigd door een machine vertonen fouten. Men voert een controle door op de producten die 80% van alle foutieve producten opspoort. Enkel die producten die door de controle goed worden bevonden worden afgeleverd. Indien een foutloos product door de controle steeds foutloos bevonden wordt, wat is dan de kans dat het afgeleverde product geen fout vertoont? Indien slechts 95% van de foutloze producten foutloos wordt bevonden, wat is dan de kans op een foutloos afgeleverd product, en wat is de kans dat een niet geleverd product geen fout bevat?

1.6 r ballen worden willekeurig in n cellen opgeborgen. Onderstel dat $r > n$. A_i is de gebeurtenis waarbij de i-de cel leeg blijft. Bereken

1. gegeven $r_1, \cdots, r_n$ met $r_1 + \cdots + r_n = r$, de kans dat, voor elke i, er r_i ballen in cel i zitten;
2. $P(A_i)$ en $P(A_i \cap A_j)$;
3. de kans dat geen enkele cel leeg is.

Reeks 2

2.1a Vaas A bevat twee rode en twee witte knikkers en vaas B bevat vier witte knikkers. Men trekt een knikker uit een der vazen en deze is wit. Wat is de kans dat ze uit vaas B kwam?

2.1b Men heeft een succesvolle test ontwikkeld om uit te maken of iemand kanker heeft. Men heeft uitgemaakt dat 97% van de kankerpatiënten in een groot ziekenhuis positief reageerden, en dat van de niet-kanker patiënten 5% positief waren. Als 2% van het aantal patiënten in het ziekenhuis kanker hebben, wat is dan de kans dat een willekeurig uitgekozen patiënt die positief reageert effectief kanker heeft?

2.1c Twee urnen A en B bevatten elk een witte en een zwarte bol. Men neemt willekeurig een bol uit elke urn en plaatst deze in de andere urn. Deze procedure wordt een aantal keer herhaald. Noteer voor p_n, q_n en r_n respectievelijk de kansen dat, na n experimenten, A twee witte bollen, resp. een witte en een zwarte, resp. twee zwarte bollen bevat. Bepaal p_{n+1}, q_{n+1} en r_{n+1} in functie van p_n, q_n en r_n. Wat is de limietwaarde voor $n \to \infty$ van p_n, q_n en r_n?

2.2a Een bridgespeler heeft juist twee azen in de hand. Wat is de kans dat zijn medespeler

1. juist één aas heeft;
2. juist twee azen heeft?

2.2b In België zijn er 70% politiekers met veel ervaring en 30% met weinig ervaring in de regionen van de nationale politiek. De ervaren politiekers geven op een gestelde vraag in 50% van de gevallen een ontwijkend antwoord, en in 30% van de gevallen een antwoord dat niet ontwijkend is, en ook geen leugen inhoudt. De politiekers met weinig ervaring geven op een gestelde vraag in 30% van de gevallen een ontwijkend antwoord, en in 40% van de gevallen een antwoord dat niet ontwijkend is, en ook geen leugen inhoudt. Bereken de kans dat een politieker die een leugenachtig antwoord geeft een ervaren politieker is.

2.2c Om de sterkte van betonbewapening na te gaan doet men trekproeven. Wegens meetfouten en niet-homogeniteit van de wapeningen is er een kans van 0.1% dat een goede wapening toch een negatieve uitslag oplevert tijdens de trekproef (d.w.z. volgens de trekproef is de wapening slecht). Als men weet dat in 99.7% van de gevallen de trekproeven wijzen op goede wapeningen en in het algemeen slechts 0.5% van de wapeningen niet voldoende sterk zijn, bereken dan de kans dat men een goede wapening heeft als de trekproef wijst op goede wapeningen. Bereken ook het percentage goede wapeningen dat men niet zal gebruiken als men wapeningen niet gebruikt indien de trekproef wijst op onvoldoende sterkte.

2.3 Gegeven zijn drie gebeurtenissen A, B en C. Druk de volgende gebeurtenissen uit in functie van A, B en C en de bewerkingen $\cup$, $\cap$ en het complement.

1. alleen A doet zich voor;
2. A en B doen zich voor, maar C niet;
3. A, B en C doen zich voor;
4. ten minste één van de drie gebeurtenissen doet zich voor;
5. ten minste twee van de drie gebeurtenissen doen zich voor;
6. geen enkel van de drie gebeurtenissen doet zich voor;
7. precies één van de drie gebeurtenissen doet zich voor;
8. niet meer dan twee van de drie gebeurtenissen doen zich voor.

2.4a Een cijferkombinatieslot bevat 5 schijven op een gemeenschappelijke as met elk 6 cijfers. Het slot kan enkel open indien elk der 5 schijven een welbepaalde plaats heeft t.o.v. een merkteken op het slot. Zoek de kans dat het slot opent voor een willekeurige positie van de vijf schijven.
Onderstel dat de cijfers op de schijven 0, 1, 2, 3, 4 en 5 zijn. Men probeert achtereenvolgens de

volgende standen van de 5 schijven.
$(00000),\ (00001),\cdots,\ (00005),\ (00010),\ (00011),\cdots,\ (00015),\ (00020),\cdots$.
Wat is dan kans dat men minder dan 38 pogingen moet ondernemen om het slot te openen?

2.4c 10% van de bevolking vindt een omstreden langharige politicus best sympathiek maar wil dit niet toegeven: op de vraag of ze de persoon in kwestie sympathiek vinden antwoordt 60% van deze sympathisanten ”neeën 40% ëen beetje”. De overblijvende 90% van de bevolking antwoordt steeds ”nee”. Wat is de kans dat iemand die u vertelt dat hij onze langharige niet sympathiek vindt, toch met de man sympathiseert ?

2.5a Archibald heeft het laatste cijfer van het telefoonnummer van zijn vriend Zenobe vergeten en probeert door lukraak het laatste cijfer te kiezen en dan op te bellen het nummer terug te vinden. Bepaal de kans dat Archibald driemaal moet opbellen om zijn vriend aan de lijn te krijgen. Hoe wijzigt zich deze kans als Archibald weet dat het laatste cijfer even is ? Dit alles in de onderstelling dat Zenobe thuis is. Wat worden al deze kansen indien Zenobe slechts 50% van zijn tijd thuis doorbrengt?

2.5b Vroeger werd in ons land door loting bepaald wie zijn militaire dienstplicht moest vervullen en wie daarvan werd vrijgesteld. Stel dat drie jonge kerels na elkaar een nummer trekken, zonder teruglegging, uit een verzameling van 4 slechte en 4 goede nummers. Welke van deze drie kerels heeft de grootste kans om als soldaat aangewezen te worden? Bereken deze kansen.

2.5c Tien helicopters worden belast met het zoeken naar een vermist vliegtuig. Elk van deze tien toestellen kan gebruikt worden om één van de twee gebieden af te zoeken waar het vliegtuig zich kan bevinden met respectievelijke kansen 0.8 en 0.2. Indien een helicopter in het gebied gaat zoeken waar het vliegtuig zich effectief bevindt, heeft hij een kans van 0.2 om het vliegtuig te detecteren. Hoe moet men de tien helikopters verdelen over de twee gebieden om de kans om het vliegtuig terug te vinden maximaal te maken? Bepaal deze kans.
Strategie: onderstel dat m helikopters gebied 1 afzoeken, en $10-m$ gebied 2. Bereken de kans, in functie van m, dat men het vliegtuig terugvindt. Maximaliseer dan deze kans.

2.6a Een punt P wordt willekeurig gekozen op de omtrek van een cirkel met straal R. Bepaal de gemiddelde afstand tussen een vast punt A op de omtrek en het punt P.

2.6b De punten O, P en Q worden willekeurig gekozen op de omtrek van een cirkel met straal R. k is een getal gelegen tussen $1/2$ en 1. Bepaal de kans dat minstens n van de hoeken van de driehoek $\Delta\, OPQ$ groter is dan $k\pi$.

2.6c Herhaal oef. 6b, maar met k gelegen tussen 0 en $1/2$.

2.7 Het eerste dat een bridgespeler doet wanneer hij zijn kaarten in handen krijgt is het tellen van zijn punten. Hierbij gelden volgende regels.

$$\begin{aligned} \text{aas} &= 4 \text{ punten} \\ \text{heer} &= 3 \text{ punten} \\ \text{dame} &= 2 \text{ punten} \\ \text{boer} &= 1 \text{ punt} \\ \text{gewone kaart} &= 0 \text{ punten} \end{aligned}$$

Zij X de stochastische variabele die het aantal punten van een speler geeft. Bepaal de kansen $P(X=0)$, $P(X=1)$, $P(X+2)$ en $P(X=4)$. Wat is de maximale waarde die X kan aannemen? Bereken de kans dat deze maximale waarde wordt aangenomen.

Reeks 3

3.1 Onderstel dat X een stochastische variabele is met een continue of een discrete verdeling, en dat de momenten $E[X]$ en $E[|X-E[X]|^r]$ bestaan voor een zekere $r>0$. Bewijs dat voor elke $\varepsilon>0$ geldt dat

$$P(|X-E[X]|>\varepsilon)\frac{E[\left|X-E[X]\right|^r]}{\varepsilon^r}$$

3.2 Onderstel dat X en Y twee onafhankelijke continue stochastische variabelen zijn, en neem $M=\max(X,Y)$. Bepaal de dichtheidsfunctie f_M.

3.3a Een partij goederen is zo groot dat men ze als oneindig groot mag beschouwen. Men voert een kwaliteitstest uit op de partij als volgt. Men kiest lukraak opeenvolgende stukken uit zonder teruglegging tot men een defect stuk heeft gevonden. Als $1/5$ van de partij bestaat uit defekte stukken, bepaal dan de verdelingsfunctie van X, het aantal geteste stukken.

3.3b X is de levensduur in uren van een bepaalde type radiobuis. De dichtheidsfunctie van X wordt gegeven door

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{als } x<100\\ \dfrac{a}{x^2} & \text{als } x\geq 100\end{cases}$$

Een oude radio bevat drie dergelijke buizen, met van elkaar onafhankelijke levensduur. Bepaal a. Bereken de kans dat men in een dergelijke radio geen buizen moet vervangen voor de radio 150 uur gespeeld heeft. Bereken de kans dat men geen buizen zal moeten vervangen in de radio voor 150 uur speelduur, als de radio al 120 uur heeft kunnen spelen zonder buizen te vervangen.

3.3c

$$f(x)=\begin{cases}140x^3(1-x)^3 & \text{als } 0\leq x\leq 1\\ 0 & \text{als } x<0 \text{ of } x>1\end{cases}$$

Zoek de dichtheidsfunctie van $Y=4X(1-X)$.

3.4a (X,Y) is een kansvector met dichtheidsfunctie

$$f_{(X,Y)}(x,y)=xe^{\frac{-x^2}{2}}e^{-y}$$

voor $0<x<+\infty$ en $0<y<+\infty$.

1. Bepaal de verdelingsfunctie $F_{(X,Y)}$;
2. bepaal de marginale verdelingsfuncties ;
3. bepaal $P(X>2,Y\geq 1)$ en $P(X^2+Y^2\leq 2)$.

3.4b Onderstel dat (X,Y) uniform verdeeld is over de driehoek met hoekpunten $(0,0)$, $(0,1)$ en $(1,1)$. Bepaal de dichtheidsfuncties $f_{(X,Y)}$, f_X en f_Y, en de correlatiecoefficiënt tussen X en Y.

3.4c Bij een experiment kunnen zich drie uitslagen u_1, u_2 en u_3 voordoen met kansen respectievelijk p_1, p_2 en p_3. Men voert dit experiment N maal uit. X_i is het aantal keer dat de uitslag u_i is ($i=1,2,3$). Bepaal de verdeling van de kansvector (X_1,X_2,X_3). Bepaal ook de covariantie $\mathrm{cov}(X_1,X_2)$ en de correlatiecoëfficiënt ρ. Wat gebeurt er als $p_3=0$?

3.5 Men kiest willekeurig een getal $x \in [0,1]$ en daarna willekeurig $y \in [x,1]$. (X,Y) is de kansvector die de uitslag afbeeldt op (x,y). Bepaal f_X, $f_{(X,Y)}$ en f_Y.

3.6 Onderstel dat (X,Y) een continu verdeelde kansvector is. We definiëren een nieuwe kansvector (R,Θ) door

$$\begin{cases} X &= R\cos\Theta \\ Y &= R\sin\Theta \end{cases}$$

en $0 \le \Theta < 2\pi$, $0 \le R$. Bepaal de dichtheidsfunctie $f_{(R,\Theta)}$.
Onderstel dat (X,Y) uniform verdeeld is over de eenheidsschijf. Bepaal $f_{(R,\Theta)}$ en laat zien dat R en Θ onafhankelijk zijn.

3.7 Vanuit een punt $(0,0,c)$ op de z-as wordt een deeltje uitgezonden in een willekeurige richting naar het xy-vlak toe. (X,Y) is de positie in het xy-vlak waar het deeltje toekomt, en (R,Θ) wordt gedefinieerd zoals in oefening . Bepaal eerst de dichtheidsfunctie van (R,Θ) en dan die van (X,Y).

Reeks 4

4.1a Men vindt dat de lengte van telefoongesprekken een exponentiële verdeling volgt, met een gemiddelde van drie minuten. Hoe groot is de kans dat een gesprek langer dan drie (resp. dan tien) minuten duurt?

4.1b Een auto valt nogal eens in panne, en dit volgens de Poisson hypothesen: het aantal defecten is Poisson verdeeld. Indien men gemiddeld twee pannes per maand heeft, wat is dan de kans dat men op een jaar meer dan 25 pannes heeft?

4.1c Met dezelfde gegevens als in oefening b, wat is de kans dat onze wagen drie weken kan rijden zonder een enkele panne?

4.2a Twee merken elektronenbuizen hebben een levensduur die normaal verdeeld is:

$$T_A \sim N(27,5) \;\text{ en }\; T_B \sim N(30,2)$$

Welk merk moet men kiezen om de grootste kans te hebben dat de buis langer dan 30 uur meegaat?
Welk merk moet men kiezen om de grootste kans te hebben dat de buis langer dan 34 uur meegaat?

4.2b Een hoogtemeter geeft een systematische fout van 10 meter en een stochastische fout die normaal verdeeld is met gemiddelde 0 meter en standaardafwijking 2 meter. Wat is de kans dat men bij een meting een fout heeft kleiner dan 7 meter?

4.2c Het jaarlijks maximum debiet van een rivier op een bepaalde plaats is normaal verdeeld volgens $N(120\mathrm{m}^3/\mathrm{sec}, 20\mathrm{m}^3/\mathrm{sec})$. Zolang het debiet kleiner dan $150\mathrm{m}^3/\mathrm{sec}$ is, komt er geen overstroming. Bepaal de kans dat zich tijdens een gegeven jaar een overstroming voordoet.

Onderstel dat gedurende opeenvolgende jaren de maximale optredende debieten steeds van elkaar onafhankelijk zijn. Bepaal nu over een periode van 100 jaar het gemiddeld aantal jaren waarin zich er een overstroming voordoet. Wat is de kans dat men gedurende 95 opeenvolgende jaren geen overstroming kent ?

4.3a Men gooit 30 000 keer met een dobbelsteen. Wat is - bij benadering - de kans dat men tussen de 4 950 en de 5 050 keer een zes gooit?

4.3b Men gooit 30 000 keer met een muntstuk. Wat is - bij benadering - de kans dat men tussen de 15 900 en de 16 100 keer munt gooit?

4.3c Bij de verkiezingen haalt een politieke partij 30% van de stemmen. Men verricht achteraf een steekproef bij 3000 mensen die gestemd hebben en vraagt hen of ze daadwerkelijk voor die partij gestemd hebben. Wat is de kans dat tussen de 850 en 950 ondervraagden hierop bevestigend antwoorden?

4.4a Op een landelijke weg komen gemiddeld drie auto's per uur voorbij. Stel X het aantal wagens dat gedurende een tijdsinterval van 20 minuten voorbij komt. Bepaal $P(X=0)$ en $P(X \geq 2)$.

4.4b Een krantenjongen in Chicago verkoopt per uur 50 kranten. Als we nu een krant van hem kopen, wat is dan de kans dat het minstens twee minuten zal duren alvorens hij de volgende verkoopt? Als het nu al vijf minuten geleden is dat hij nog een krant verkocht heeft, wat is dan de kans dat hij nog twee minuten zal moeten wachten om er nog een te verkopen?

4.4c Een verstrooide professor vergeet gemiddeld eens per maand zijn paraplu. Bepaal de kans dat de man zich op een jaar tijd minstens 15 nieuwe paraplus moet aanschaffen.

4.5a Een eerlijk muntstuk wordt opgeworpen tot er voor de eerste maal een kop geworpen wordt. Wat is de kans dat het aantal worpen oneven is?

4.5b Onderstel in oefening a dat het muntstuk niet ëerlijkïs, d.w.z. $P(\text{kop}) = q = 1p \neq 1/2$. Voor welke waarde van p krijgen we dat de kans op een oneven aantal worpen om voor de eerste keer kop te krijgen $1/2$ is?

4.5c Een amateur wijnmaker heeft twee soorten wijn gebotteld: rabarberwijn en appelwijn, en van beiden heeft hij een aanzienlijke voorraad liggen. 70% van zijn voorraad bestaat uit appelwijn. Hij heeft echter nagelaten etiketten op de flessen te plakken, zodat hij beide soorten niet uit elkaar kan houden. Bepaal de kans dat pas de zevende fles die hij ontkurkt rabarberwijn bevat.

4.6 Men beschouwt een rij onafhankelijke stochastische variabelen $X_0, X_1, X_2, \cdots$ die allen $B(1, p)$ verdeeld zijn. De X_i kunnen dan twee waarden aannemen, zeg a en b, met $P(a) = p$ en $P(b) = q$. Beschouw een natuurlijk getal r, en neem voor de stochastische variabele N het aantal experimenten dat nodig is om r maal de uitslag a te bekomen. Bepaal de verdelingsfunctie van N. Men zegt dat N *negatief binomiaal* verdeeld is met parameters r en p.

4.7 Onderstel dat een stochastische variabele X $N(m, \sigma)$-normaal verdeeld is. We zeggen dan dat $Y = e^X$ *lognormaal verdeeld* is met parameters m en σ.

1. Bepaal de verdelingsfunctie van Y in functie van de verdelingsfunctie van de standaardnormaalverdeling en de parameters m en σ;

2. bepaal de dichtheidsfunctie van Y;

3. bepaal gemiddelde en standaardafwijking van Y.

Reeks 5

5.1a Van de schoenen die in een fabriek geproduceerd worden zijn 4% defect. Bepaal op drie manieren de kans dat in een doos met 100 willekeurig gekozen schoenen er ten hoogste twee defect zijn:

1. exact ;
2. met de normale benadering ;
3. met de Poissonbenadering.

5.1b Een boek bevat gedrukte bladzijden met telkens 40 lijnen van 75 letters (beschouw de spatiëringen ook als letters). De drukker maakt gemiddeld één fout per 6000 letters. Wat is de verdelingsfunctie van X, het aantal fouten per bladzijde? Bereken de waarschijnlijkheid dat een bladzijde geen enkele fout bevat. Wat is de kans dat een hoofdstuk van 16 bladzijden geen enkele fout bevat?

5.1c De lengte van de recruten in het Belgisch leger, lichting 1991, is normaal verdeeld met gemiddelde $\mu = 1.75$ m en standaardafwijking $\sigma = 8$ cm. Wat is de kans dat een recruut groter is dan 2 meter? Wat is de kans dat hij groter is dan een meter tachtig?

5.2 Een gasmolecule heeft snelheid $\vec{v}$ met componenten v_x, v_y en v_z. Neem aan dat v_x, v_y en v_z onafhankelijk zijn, en normaalverdeeld volgens $N(0, \sigma)$. Bepaal de dichtheidsfunctie van $v = \|\vec{v}\|$, en bepaal $E[v]$.

5.3 X is uniform verdeeld over het interval $[0, 1]$. Bepaal de dichtheidsfunctie van $Y = -2\ln(X)$.

5.4a De reactietijd van een automobilist op een plots opduikend gevaar wordt verondersteld normaal verdeeld te zijn. Bij een laboratoriumtest met 12 willekeurig gekozen automobilisten berekent men het rekenkundig gemiddelde en de steekproefvariantie, en men vindt

$$\begin{aligned} \bar{x}_{12} &= 0.15 \text{ sec} \\ s_{12}^2 &= 450 \cdot 10^{-6} \text{ sec} \end{aligned}$$

Vind een 90% betrouwbaarheidsinterval voor de gemiddelde reactietijd m van een automobilist.

5.4b Een stochastische variabele X is normaal verdeeld. Men verricht een steekproef, en men vindt de volgende waarden :

$$6.1,\ 7.2,\ 3.4,\ 5.5,\ 2.1$$

Stel een 90%-BTI op voor het gemiddelde

1. als $\sigma = 2$ bekend is;
2. als σ niet bekend is.

5.4c De jaarlijkse hoeveelheid sneeuw waargenomen in het Koninklijk Metereologisch Instituut te Ukkel is normaal verdeeld. Gedurende de laatste twintig jaar heeft men de sneeuwhoeveelheden x_i, voor $i = 1, \cdots, 20$ waargenomen. Men heeft gevonden dat

$$\sum_{i=1}^{20} x_i = 200 \text{ mm} \;\text{ en }\; \sum_{i=1}^{20} (x_i - \overline{x}_{20})^2 = 76 \text{ mm}^2$$

Bepaal een 95%-BTI-BTI voor de gemiddelde hoeveelheid sneeuw in een jaar, onderstellende dat de waargenomen sneeuwvoorraden in opeenvolgende jaren onafhankelijk zijn van elkaar. Bepaal het minimum aantal jaargegevens waarover men zou moeten kunnen beschikken om een 95%-BTI te bekomen met lengte gelijk aan 1 mm. Onderstel hierbij dat σ gelijk aan 2 mm blijft in de grotere steekproef.

5.5a De topsnelheid van een bepaald merk racewagen is normaal verdeeld met gemiddelde v en standaardafwijking σ. Men kiest willekeurig 10 wagens, en meet de maximum snelheid. Men vindt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{10} v_i &= 2243 \text{ km/uur} \\ \sum_{i=1}^{10} (v_i - \overline{v}_{10})^2 &= 290.123 \text{ km}^2/\text{uur}^2 \end{aligned}$$

Bepaal 90%-BTI's voor v en σ.

5.5b Om de onnauwkeurigheid van een balans te bepalen meet men 25 maal een bekend gewicht van 4 kg. De meetuitslagen x_i geven aanleiding tot

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{25} x_i &= 100.02 \text{ kg} \\ \sum_{i=1}^{25} (x_i - \overline{x}_{25})^2 &= 3.34 \text{ kg}^2 \end{aligned}$$

Geef een 90%-BTI voor de onbekende onnauwkeurigheid van de balans. Men onderstelt hier dat de meetuitslagen stochastisch onafhankelijk zijn, en normaal verdeeld zijn. De onnauwkeurigheid is dan σ.

5.5c Men wil zich een idee vormen van de tijd die een arbeider nodig heeft om een zeker werk uit te voeren. Men onderstelt dat deze tijd normaal verdeeld is. Vijfentwintig arbeiders voeren het werk uit, en men vindt een gemiddelde tijd van 56 minuten, met steekproef variantie $(10 \text{ min})^2$. Bepaal een 90%-BTI voor de gemiddelde tijd.

5.6 Beschouw $n_1 + n_2$ onafhankelijke stochastische variabelen

$$\begin{aligned} X_1, X_2, \cdots, X_{n_1} &\sim N(m_1, \sigma) \\ Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2} &\sim N(m_2, \sigma) \end{aligned}$$

waarbij m_1, m_2 en σ onbekend zijn. Construeer een $(1-\alpha)$-BTI voor $m_1 - m_2$.

5.7 Een stochastische variabele X is uniform verdeeld over $[0, b]$, met b een onbekende parameter. Men verricht een steekproef $X_1, X_2, \cdots, X_n$ en beschouwt de statistiek $M = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$.

1. Gebruik M om een zuivere schatter voor de parameter b te vinden;
2. construeer een $(1-\alpha)$-BTI voor de parameter b.

Reeks 6

6.1 Een stochastische variabele X is Poissonverdeeld met (onbekende) parameter λ. Gebruik de normale benadering van de Poissonverdeling om een $(1-\alpha)$-BTI voor de parameter λ te vinden.

6.2 Een stochastische variabele is exponentieel verdeeld met (onbekende) parameter λ. Neem een aselecte steekproef $X_1, \cdots, X_n$.

1. Bepaal de karakteristieke functie van de verdeling van

$$2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i$$

2. leid hieruit af dat

$$2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i = 2\lambda n \overline{X}_n$$

   een chi-kwadraat verdeling met $2n$ vrijheidsgraden bezit;

3. gebruik dit resultaat om een $(1-\alpha)$-BTI voor de parameter λ te construeren.

6.3 De levensduur van een gloeilamp is exponentieel verdeeld met onbekende parameter λ. Men test 15 gloeilampen en vindt 130 u als gemiddelde levensduur. Construeer een 90%-BTI voor λ, en voor de gemiddelde levensduur.

6.4a Een boswachter beweert dat in een bepaald stuk bos, waar gelijktijdig beukebomen zijn aangeplant, de bomen een gemiddelde hoogte van 35 m bereikt hebben. Er worden 30 willekeurig gekozen bomen geveld. Men vindt voor het rekenkundig gemiddelde van hun lengtes $\overline{x}_n = 34.4$ m, en steekproefvariatie $s_n^2 = (1.6 \text{ m})^2$. Toets de bewering van de boswachter, in de veronderstelling dat de hoogtes van de bomen allen onafhankelijk normaal verdeeld zijn, met significantieniveau $\alpha = 0.05$.

6.4b In 1970 bedroeg de gemiddelde lengte van een achttienjarige jongen 1.78 m. Sommigen beweren dat jongeren tegenwoordig groter zijn dan twintig jaar geleden. Om dit te toetsen meet men de lengte van 30 achttienjarigen, en men vindt een gemiddelde van 1.81 m, met steekproefvariantie $s_{30}^2 = (11 \text{ cm})^2$. Is het verschil met 1970 significant op niveau 0.05? Op niveau 0.025?

6.4c Men onderstelt dat het aantal uren dat een modale Belg dagelijks tv kijkt normaal verdeeld is. Een socioloog beweert dat de gemiddelde Belg dagelijks gemiddeld anderhalf uur voor de kijkkast zit, en wil dit testen. Hij laat zijn studenten de volgende steekproef verrichten. Over een langere periode wordt het kijkgedrag van 25 willekeurig gekozen mensen opgemeten. Men vindt:

$$\overline{x}_{25} = 80 \text{ min en } s_{25} = 30 \text{ min}$$

Wat zullen zijn conclusies zijn, op significantieniveau 10%?

6.5a Men weet dat het gewicht van vier maand oude varkens normaal verdeeld is met gemiddelde 55 kg en standaardafwijking 4.5 kg. Om uit te maken of een alternatieve manier van voeden beter is (d.w.z. dat men zwaardere varkens krijgt) probeert men ze uit op 25 pasgeboren varkens, lukraak over het land verspreid. Wanneer men vier maand na de geboorte hun gewicht meet, bekomt men $\bar{x}_{25} =$ kg. Men veronderstelt dat de standaardafwijking van het gewicht onveranderd is. Is de alternatieve manier van voeden beter dan de traditionele manier? Gebruik significatieniveau $\alpha = 0.05$.

6.5b Zelfde vraag als oefening b, maar waarbij de standaardafwijking σ bekend ondersteld wordt: $\sigma = 0.11$.

6.5c Een fabrikant van wegwerpbatterijen doet goede zaken - tenminste voor het invoeren van de eco-taks. Hij beweert in zijn reclamespots dat zijn batterijen goed zijn voor 10 uur muziek op een walkman. Een consumentenmagazine wil dit testen, en voert de volgende steekproef uit : 20 batterijen worden getest, en men vindt

$$\bar{x}_{20} = 9 \text{ uur } 35 \text{ min en } s_{20} = 20 \text{ min}$$

Is dit verschil significant op niveau 10 %.

6.6 Een geneesmiddelenfabrikant beweert dat een bepaald vaccin 85% effectief is (d.w.z. de kans dat men er immuun van wordt is 0.85). Om na te gaan of deze bewering strookt met de werkelijkheid wordt het vaccin geprobeerd bij 100 willekeurig gekozen personen. Wanneer 82 of meer personen immuun worden nemen we de bewering aan. Vind een benadering voor de kans dat we de bewering niet voor waar aannemen terwijl het vaccin in werkelijkheid toch 85% effectief is.

Reeks 7

7.1a Men wenst het benzineverbruik van twee verschillende automerken te vergelijken. Men laat tien auto's van merk A en 16 auto's van merk B 100 km aan constante snelheid tegen 90 km/u over de autostrade rijden. Men vindt voor het gemiddelde verbruik:
merk A: $m_{10} = 6.5$ liter per 100 km
merk B: $m_{16} = 6.0$ liter per 100 km
en voor de standaardafwijking:
merk A: $s_{10} = 0.21$ liter per 100 km
merk B: $s_{16} = 0.22$ liter per 100 km
Is het verschil in varianties significant op niveau 5%? Zo nee, test dan of het verschil in brandstofverbruik significant is op niveau 5%?

7.1b Men wenst de slijtage van twee verschillende types van banden voor vrachtwagens te vergelijken. Men neemt daartoe een aselecte steekproef van acht banden van elk type en onderwerpt deze aan een slijtagetest waarvan de uitslag het aantal mm diktevermindering van de oppervlaktelaag is.

De resultaten zijn de volgende:

type 1	type 2
5.7 mm	6.3 mm
6.3 mm	5.9 mm
6.1 mm	5.8 mm
5.9 mm	6.4 mm
6.4 mm	6.0 mm
5.6 mm	5.7 mm
6.2 mm	6.5 mm
6.0 mm	6.4 mm

Men mag onderstellen dat de diktevermінderingen normaal verdeeld zijn, zeg met parameters μ_i en σ_i, voor type i.
Toets de hypothese $\sigma_1 = \sigma_2$ op significantieniveau 10%.
Toets de hypothese $\mu_1 = \mu_2$ op significantieniveau 10%.

7.1c Een verspringer, genaamd X, beweert dat hij gemiddeld verder kan springen dan een van zijn concurrenten, genaamd Y. Van elk van beide atleten worden de 10 laatste prestaties bekeken. Men vindt, over deze 10 sprongen:

voor atleet Y: gemiddeld 5.56 m; empirische variantie $(0.52\ \text{m})^2$;
voor atleet X: gemiddeld 5.78 m; empirische variantie $(0.53\ \text{m})^2$.

Is het verschil in de varianties significant op niveau 5%? Is het verschil in gemiddelde significant op niveau 5%?

7.2a Een professor in de eerste kandidatuur neemt examens af van 98 studenten en bekomt het volgend resultaat

punten	aantal studenten	punten	aantal studenten
4.5	2	12	7
5	1	12.5	2
5.5	1	13	8
6	2	13.5	8
6.5	0	14	5
7	2	14.5	4
7.5	2	15	5
8	3	15.5	7
8.5	1	16	1
9	4	16.5	5
9.5	5	17	2
10	10	17.5	0
10.5	2	18	2
11	4	18.5	0
11.5	3		

Gebruik de chi-kwadraat toets om na te gaan of deze punten normaal verdeeld zijn, op significantieniveau $\alpha = 10\%$. Gebruik hiervoor de volgende partitie van $\mathbb{R}$:

$$(-\infty, 7.75, 9.75, 11.75, 13.75, 15.75, +\infty)$$

Na berekening vindt men dat

$$\bar{x}_n = 12.01,\ s_n^2 = 10.15,\ s_n = 3.19$$

7.2b Men wenst te controleren of de elasticiteit van een bepaald merk rubberballen Poissonverdeeld is. Men test hoeveel maal een rubberbal weer opbotst binnen een tijdspanne van 1 minuut als men deze bal vanop een hoogte van 2 meter laat vallen. Men krijgt volgende resultaten.

aantal botsen	aantal ballen
1-6	8
6-8	34
8-10	59
10-12	72
12-14	63
14-16	32
16-18	20
18-20	9
20-25	3

Men vindt tevens na berekening dat $\bar{x}_n = 12$ (botsen per minuut). Is de elasticiteit inderdaad Poissonverdeeld op significantieniveau 10%?

7.2c Men wenst te testen of de duur van telefoongesprekken exponentieel verdeeld is. Hiervoor meet men de duur van 100 willekeurig uitgekozen telefoongesprekken. Men vindt volgende resultaten:

duur	aantal
0-2 min	30
2-4 min	19
4-6 min	13
6-8 min	12
8-10 min	9
10-12 min	4
12-14 min	4
14-20 min	4
20-∞ min	5

Men vindt ook dat een telefoongesprek gemiddeld 5.9 min geduurd heeft. Kan men met deze gegevens inderdaad aannemen dat de duur van telefoongesprekken exponentieel verdeeld is? (significantieniveau 10%).

Antwoorden

Reeks 1

1.1 a) $p_2 < p_1$;   b) $P(\text{alle 3 genezen}) = 0.729$; $P(\text{geen enkele geneest}) = 0.001$;   c) $p_2 < p_1$.

1.2 a) $p = \dfrac{(8!)^2 56!}{64!}$;   b) eerlijk spel;   c) geen eerlijk spel.

1.3 a) $P(\text{elke speler 1 aas}) = \dfrac{4!13^4}{49 \times 50 \times 51 \times 52}$;
b) $P(\text{13 maal zelfde kleur}) = \dfrac{4}{\binom{52}{13}}$; $P(\text{12 maal zelfde kleur}) = \dfrac{4 \times 13 \times 39}{\binom{52}{13}}$;
c) $P(\text{juist 3 harten}) = \dfrac{\binom{8}{3}\binom{31}{10}}{\binom{39}{13}}$; $P(\text{geen harten}) = \dfrac{\binom{31}{13}}{\binom{39}{13}}$.

1.4 a) $P(\text{allebei een 4}|\text{som is 7 of 8}) = 1/11$; $P(\text{allebei een 2}|\text{som is 7 of 8}) = 0$;
b) $p_1 = 1/16,\ p_2 = 1/32,\ p_3 = 5/16$;   c) $p = 0.332$.

1.5 a) $p = \dfrac{1}{2^{2n-k-1}}\dbinom{2n-k-1}{n-k}$;   b) $p_1 = 1/6,\ p_2 = 1/6,\ p_3 = 2/3$;
c) $P_1(\text{foutloos afgeleverd product}) = 0.9782609$; $P_2(\text{foutloos afgeleverd product}) = 0.9771429$;
$P_1(\text{foutloos niet geleverd product}) = 0.36$.

1.6 1) $p = \dfrac{1}{n^r}\dbinom{r}{r_1, r_2, \cdots, r_n}$;   2) $P(A_i) = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^r$ en $P(A_i \cap A_j) = \left(\dfrac{n-2}{n}\right)^r$;
3) $P(\text{geen enkele cel is leeg}) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\left(\frac{n-i}{n}\right)^r$.

Reeks 2

2.1 a) $P(\text{vaas } B|\text{witte knikker}) = 2/3$; b)P(kanker—positieve reactie)=194/684;
c) $p_{n+1} = \dfrac{q_n}{4} = r_{n+1}$; $q_{n+1} = p_n + \dfrac{q_n}{2} + r_n$; $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \dfrac{1}{6} = \lim\limits_{n\to\infty} r_n$; $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \dfrac{2}{3}$.

2.2 a) $P(\text{juist 1 aas}) = 52/114$; $P(\text{juist 2 azen}) = 12/114$;
b) $P(\text{ervaren politicus}|\text{leugenachtig antwoord}) = 14/23$
c) $P(\text{goede wapening}|\text{positieve trekproef}) = 0.996916$;
$P(\text{goede wapening}|\text{negatieve trekproef}) = 0.1$.

2.3 $A \cap B^c \cap C^c$; $A \cap B \cap C^c$; $A \cap B \cap C$; $A \cup B \cup C$;
$(A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$
$A^c \cap B^c \cap C^c$; $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$
$(A \cap B \cap C)^c = A^c \cup B^c \cup C^c$.

2.4 a) $P(\text{willekeurige positie}) = \dfrac{1}{6^5}$; $P(\text{minder dan 38 pogingen}) = \dfrac{37}{6^5}$

b) $P(\text{geen stroom}) = 0.9656$;   c) $P(\text{sympathiseert}|\text{zegt nee}) = \frac{1}{16}$.

2.5 a) $p_1 = \frac{81}{1000}$; $p_2 = \frac{16}{125}$; $p_3 = \frac{361}{8000}$;
b) $P(\text{eerste}) = P(\text{tweede}) = P(\text{derde}) = 0.5$; c) $m = 8$, $p_{\max} = 0.737856$.

2.6 a) $E[d] = \frac{4R}{\pi}$; b) $p = 3(1-k)^2$; c) $p = 1-(3k-1)^2$.

2.7 $P(X=0) = \frac{\binom{36}{13}}{\binom{52}{13}}$; $P(X=1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{36}{12}}{\binom{52}{13}}$; $P(X=2) = \frac{\binom{4}{1}\binom{36}{12}+\binom{4}{2}\binom{36}{11}}{\binom{52}{13}}$;
$P(X=4) = \frac{\binom{4}{1}\binom{36}{12}+\binom{4}{2}\binom{36}{11}+\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{36}{11}+\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{36}{10}+\binom{4}{4}\binom{36}{9}}{\binom{52}{13}}$; $P(X=37) = \frac{4}{\binom{52}{13}}$.

Reeks 3

3.2 Het bewijs is analoog met dat van de formule van Chebyshev (vervang kwadraten door r-de machten).

3.3 $f_M(t) = f_X(t)F_Y(t) + F_X(t)f_Y(t)$.

3.4 a) $F_X(x) = \frac{1}{4}\sum_{1\le i\le x} p^i$, met $p = \frac{4}{5}$.
b) $a = 100$; $P(\text{levensduur} > 150) = \frac{8}{27}$; $P(\text{levensduur} > 150|\text{levensduur} \ge 120) = \frac{64}{125}$;
c) $f_Y(t) = \frac{35}{32}\frac{t^3}{\sqrt{1-t}}$.

3.5 a) $F_{(X,Y)}(x,y) = (1-e^{-y}).(1-e^{-x^2/2})$; $F_X(x) = 1-e^{-x^2/2}$: $F_Y(y) = 1-e^{-y}$;

$P(X>2, Y\ge 1) = e^{-3}$; $P(X^2+Y^2 \le 2) = 0.395116$;

b) $f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{als } 0<x<1 \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$;

$f_X(x) = \begin{cases} 2(1-x) & \text{als } 0<x<y<1 \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$; $f_Y(y) = \begin{cases} 2y & \text{als } 0<y<1 \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$;

c) $P(X_1 = i,\ X_2 = j,\ X_3 = N-i-j) = \binom{N}{i,\ j,\ N-i-j} p_1^i p_2^j p_3^{N-i-j}$ $\rho = 0.5$;

$\mathrm{cov}(X,Y) = -p_2 p_1 N$; $\rho = -\dfrac{p_2 p_1}{\sqrt{p_1(1-p_1)p_2(1-p_2)}}$

3.6 $f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$;

$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 1/(1-x) & \text{als } 0 \le x \le y \le 1 \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$;

$f_Y(y) = \begin{cases} -\ln(1-y) & \text{als } 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$.

3.7 $f_{(R,\Theta)}(r,\vartheta) = r\, f_{(X,Y)}(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)$.

3.8 $f_{(X,Y)}(x,y) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{x^2+y^2}} \dfrac{c}{c^2+x^2+y^2}$.

Reeks 4

4.1 a) $P(X > 3) = e^{-1}$ en $P(X > 10) = e^{-10/3}$;
b) $P(X > 25) = 0.3783$; c) $P(X = 0) = 0.25042$.

4.2 a) $P_B(X > 30) = 0.5 > 0.2742 = P_A(X > 30)$;
$P_B(X > 34) = 0.0228 < 0.0808 = P_A(X > 34)$;
b) $P(X \le 7) = 0.0688$; c) $P(\text{overstroming}) = 0.0668$;
gemiddeld aantal jaren $= 6.68$; $P(\text{geen overstroming gedurende 95 jaar}) = 0.001407512$.

4.3 a) $p = 0.5646$; b) $p = 0$; c) $p = 0.9556$.

4.4 a) $P(X = 0) = e^{-1}$; $P(X \ge 2) = \dfrac{e-2}{e}$;
b) $P(T \ge 2) = e^{-5/3}$; $P(T \ge 2 \text{ als reeds 5 min geleden}) = e^{-5/3}$; c) $P(X \ge 15) = 0.2358$.

4.5 a) $P(X \text{ oneven}) = 2/3$; b) Onmogelijk; c) $p = 0.0352947$.

4.6 $F_N(x) = \sum_{t \le x} \binom{t-1}{r-1} p^r q^{t-r}$.

4.7 a) $F_Y(y) = \begin{cases} F_{N(0,1)}\left(\frac{\ln(y)-m}{\sigma}\right) & \text{als } y \ge 0 \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$;

b) $f_Y(y) = \dfrac{1}{y} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\dfrac{(\ln(y)-m)^2}{2\sigma^2}\right)$;

c) $E[Y] = \exp(m+\sigma^2/2)$; $\sigma_Y = \exp(m+\sigma^2/2)\sqrt{e^{\sigma^2}-1}$.

Reeks 5

5.1 a) $P(X \leq 2) = 0.2321$; $P(X \leq 2) = 0.2099$: $P(X \leq 2) = 0.2381$;
b) $P(X = 0) = 0.606531$; $P(\text{hoofdstuk}) = 0.000335463$;
c) $P(L \geq 2) = 0.0009$; $P(L \geq 1.8) = 0.2660$.

5.2 $f_v(y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y^2}{\sigma^3}e^{-y^2/2\sigma^2} & \text{als } y > 0 \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$; $E[v] = 2\sigma\sqrt{2/\pi}$.

5.3 $f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-1/x^2} & \text{als } x \geq 0 \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$.

5.4 a) $\text{BTI} = [0.139; 0.161]$;
b) $\text{BTI} = [3.388673; 6.3313327]$; $\text{BTI} = [2.8844745; 6.8355255]$;
c) $\text{BTI} = [9.06398; 10.93602]$; lengte $\text{BTI} \leq 1$ als $n = 64$.

5.5 a) $\text{BTI}_\sigma = [4.141; 9.341]$; $\text{BTI}_\nu = [221.009; 227.591]$;
b) $\text{BTI} = [0.302854; 0.491111]$; c) $\text{BTI} = [52.578; 59.422]$.

5.6 $\text{BTI} = \overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2} \pm \tilde{S}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\,t_{n_1+n_2-2,1-\alpha/2}$.

5.7 $\frac{n+1}{n}M$ is een zuivere schatter voor b; $\text{BTI} = \left[M\sqrt[n]{\frac{2}{2-\alpha}}, M\sqrt[n]{\frac{2}{\alpha}}\right]$.

Reeks 6

6.1 $\text{BTI} = \left[\overline{X}_n - \sqrt{\frac{\overline{X}_n}{n}}\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right), \overline{X}_n + \sqrt{\frac{\overline{X}_n}{n}}\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right]$.

6.2 $\varphi_{2\lambda\sum X_i} = \frac{1}{(1-2it)^n}$; $\text{BTI} = \left[\frac{\chi^2_{2n,\alpha/2}}{2n\overline{X}_n}, \frac{\chi^2_{2n,1-\alpha/2}}{2n\overline{X}_n}\right]$.

6.3 $\text{BTI}_\lambda = [0.00474, 0.01120]$.

6.4 a) $\begin{cases} H_0 & : & m = 35 \\ H_0 & : & m < 35 \end{cases}$ Verwerpen;

b) $\begin{cases} H_0 & : & m = 1.78 \\ H_0 & : & m > 1.78 \end{cases}$ Verwerpen;

c) $\begin{cases} H_0 & : & m = 1.5 \\ H_0 & : & m > 1.5 \end{cases}$ Aanvaarden.

6.5 a) $\begin{cases} H_0 & : & m = 55 \\ H_0 & : & m > 55 \end{cases}$ Significant beter;

b) $\begin{cases} H_0 & : & m = 1.78 \\ H_0 & : & m > 1.78 \end{cases}$ Verwerpen;

c) $\begin{cases} H_0 & : & m = 10 \\ H_0 & : & m < 10 \end{cases}$ Verwerpen.

6.6 a) $\begin{cases} H_0 & : & p = 85\% \\ H_0 & : & p < 85\% \end{cases}$ $P(\sum X_i < 82 = 16.35\%)$.

Reeks 7

7.1 a) $\begin{cases} H_0 & : & \sigma_{10} = \sigma_{16} \\ H_0 & : & \sigma_{10} \neq \sigma_{16} \end{cases}$ Aanvaarden; $\begin{cases} H_0 & : & m_{10} = m_{16} \\ H_0 & : & m_{10} \neq m_{16} \end{cases}$ Verwerpen;

b) $\begin{cases} H_0 & : & \sigma_1 = \sigma_2 \\ H_0 & : & \sigma_1 \neq \sigma_2 \end{cases}$ Aanvaarden; $\begin{cases} H_0 & : & m_1 = m_2 \\ H_0 & : & m_1 \neq m_2 \end{cases}$ Aanvaarden;

c) $\begin{cases} H_0 & : & \sigma_A = \sigma_B \\ H_0 & : & \sigma_A \neq \sigma_B \end{cases}$ Aanvaarden; $\begin{cases} H_0 & : & m_A = m_B \\ H_0 & : & m_A < m_B \end{cases}$ Aanvaarden.

7.2 a) $\begin{cases} H_0 & : & p_i = \hat{p}_i \\ H_0 & : & p_i \neq \hat{p}_i \end{cases}$ Aanvaarden;

b) $\begin{cases} H_0 & : & p_i = \hat{p}_i \\ H_0 & : & p_i \neq \hat{p}_i \end{cases}$ Aanvaarden;

c) $\begin{cases} H_0 & : & p_i = \hat{p}_i \\ H_0 & : & p_i \neq \hat{p}_i \end{cases}$ Aanvaarden.