Vrije Universiteit Brussel

Analyse II

S. Caenepeel

Oefeningen

Oefeningen 127 bij IR-WISK 10333 “Analyse: afleiden, integreren en wiskundige software”
Eerste Bachelor Ingenieurswetenschappen en Natuurkunde 2011

Reeks 1 Impliciete functies

Oefening 1.1 Ga na of de volgende betrekking y als impliciete functie van x bepaalt in een omgeving van (x_0, y_0). Bepaal dan $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ en $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$. Bepaal telkens de vergelijking van de raaklijn in het punt (x_0, y_0) aan de kromme met vergelijking $f(x,y) = 0$.

a) $f(x,y) = ye^{\frac{1}{\cos x}} - e^{\frac{1}{y}} = 0$ met $(x_0, y_0) = (0,1)$

b) $f(x,y) = \operatorname{bgtg}\dfrac{y}{x} - \ln\sqrt{x^2+y^2} = 0$ met $(x_0, y_0) = (1,0)$

c) $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0$ met $(x_0, y_0) = (1,0)$

Oefening 1.2a De vergelijking $z^3 - 2xz + y = 0$ bepaalt z als impliciete functie van x en y, waarbij $z(1,1) = 1$. Schrijf de termen tot en met orde 2 van de reeksontwikkeling van z in machten van $x-1$ en $y-1$. Bepaal ook de vergelijking van het raakvlak aan het oppervlak met vergelijking $z^3 - 2xz + y = 0$ in het punt $(1,1,1)$.

Oefening 1.2b Bereken $\frac{\partial z}{\partial x}$ en $\frac{\partial z}{\partial y}$ als z als impliciete functie van x en y bepaald wordt door de betrekking

$$(*) \qquad \sin(x+y) + \sin(y+z) + \sin(z+x) = 1$$

waarbij

$$z\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

Bepaal dan de vergelijking van het raakvlak aan het oppervlak met vergelijking $(*)$ in het punt $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right)$.

Oefening 1.2c Bereken $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ als z als impliciete functie van x en y gegeven wordt door de formule

$$(**) \qquad z^3 - xz - y = 0, \text{ met } z(1,0) = 1$$

Bepaal ook de vergelijking van het raakvlak in het punt $(1,0,1)$ aan het oppervlak met vergelijking $(**)$.

Oefening 1.3a Het stelsel

$$(\square) \qquad \begin{cases} y^z + z^y = x \\ x + y + z = 2(1+e) \end{cases}$$

bepaalt y en z als impliciete functies van x, waarbij gegeven is dat

$$y(1+e) = 1 \text{ en } z(1+e) = e$$

Bepaal $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ en $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$, en de vergelijking van de raaklijn in het punt $(1+e,1,e)$ aan de kromme met vergelijking (□).

Oefening 1.3b Het stelsel

$$\begin{cases} x = 2\operatorname{bgsin}\frac{y}{u} + 2(u-v) \\ y = v^{x/u} - 1 \end{cases}$$

bepaalt u en v als impliciete functies van x en y, waarbij gegeven is dat $u(2,0) = 2$ en $v(2,0) = 1$. Bepaal de differentialen $\mathrm{d}u$ en $\mathrm{d}v$ in het punt $(2,0)$.

Oefening 1.3c Het stelsel

$$\begin{cases} u+v-x-y = 0 \\ xu+yv-1 = 0 \end{cases}$$

bepaalt u en v als impliciete functies van x en y. Bereken de Jacobiaanse determinant

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$$

Oefening 1.4a Het stelsel

$$\begin{cases} x+y+z+u = 3 \\ x^2+2y^3-3z^2+4u^2 = 0 \end{cases}$$

bepaalt z en u als impliciete functies van x en y. Hierbij is gegeven dat

$$z(1,0) = 1 \ \text{ en } \ u(1,0) = 0$$

Bereken de partiële afgeleiden $\frac{\partial z}{\partial x}(1,0)$ en $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,0)$.

Oefening 1.4b Het stelsel

$$\begin{cases} u^2-v^2+2x = 0 \\ uv-y = 0 \end{cases}$$

bepaalt u en v als impliciete functies van x en y. Bereken de partiële afgeleide $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Oefening 1.4c Het stelsel

$$(\square\square) \qquad \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 5 \\ xy+yz-2 = 0 \end{cases}$$

bepaalt y en z als impliciete functies van x, waarbij ook gegeven is dat $y(0) = 1$ en $z(0) = 2$. Bereken de afgeleiden

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(0), \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}(0), \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(0) \text{ en } \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}(0)$$

en bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de kromme met vergelijking (□□) in het punt $(0,1,2)$.

Reeks 2 Extreme waarden met nevenwaarden

Oefening 2.1a Bepaal de extreme waarden van de functie $w = x + y$ op de cirkel $x^2 + y^2 = 1$.

Oefening 2.1b Bepaal de extreme waarden van de functie $w = -x^2 - y^2 + 2xz$ op het oppervlak $x + y^2 - z^2 = 1$.

Oefening 2.1c Bepaal de extreme waarden van de functie $w = x^2 + y^2 + z^2 + u^2$ als

$$\begin{cases} x + y + z + u = 4 \\ 4x + 3y + 2z + u = 10 \end{cases}$$

Oefening 2.2a Verdeel 47 in drie delen $x, y, z > 0$ zodat

$$\frac{1}{2}xy + \frac{1}{3}yz + \frac{1}{4}xz$$

extreem wordt. Bepaal tevens de aard van het extremum.

Oefening 2.2b Bepaal de afstand van het punt $(1/2, 1/2, 1/2)$ tot de sfeer met vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Oefening 2.2c Bepaal de extreme waarden van de functie $w = x + y + 2z$ onder de nevenvoorwaarde

$$3x^2 + 2y^2 + 12z^2 + 2xy + 4yz - 12 = 0$$

Bepaal ook de aard van de extrema.

Oefening 2.3a Bepaal de extreme waarden van $w = xyz$ op het oppervlak $x + y + z = 3$. Bepaal de aard van deze extrema.

Oefening 2.3b Bepaal de extreme waarden van de functie $f(x, y, z) = xyz$ op de kromme

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ xy + xz + yz = 8 \end{cases}$$

Oefening 2.3c Bepaal de punten P_1 op de rechte $y = x+4$ en P_2 op de parabool $y^2 = 8x$ zodat de afstand van P_1 tot P_2 extreem wordt. Bepaal de aard van de extrema.

Oefening 2.4a Van alle driehoeken ingeschreven in een cirkel met straal R zijn de gelijkzijdige driehoeken die waarvoor het product van de zijden maximaal zijn. Bewijs!

Oefening 2.4b Van alle driehoeken ingeschreven in een cirkel met straal R zijn de gelijkzijdige driehoeken die met maximale omtrek. Bewijs!

Oefening 2.4c Van alle driehoeken ingeschreven in een cirkel met straal R zijn de gelijkzijdige driehoeken die waarvoor de som van de kwadraten van de zijden maximaal zijn. Bewijs!

Oefening 2.5a Bepaal de rechthoekszijden x en y van de rechthoekige driehoeken met oppervlakte S waarvan de omtrek extreem is. Bepaal de aard van de extreme waarden.

Oefening 2.5b Gegeven zijn de punten $A = (1,0,1)$, $B = (0,1,1)$ en $C = (1,1,0)$. Bepaal het punt P gelegen in het vlak $x+2y-3z = 1/4$ waarvoor

$$\|\vec{AP}\|^2 + 2\|\vec{BP}\|^2 + 3\|\vec{CP}\|^2$$

minimaal is.

Oefening 2.5c In $\mathbb{R}^3$ beschouwen we de ellips met vergelijking

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ x+y+z = 0 \end{cases}$$

Bepaal de punten op de ellips die het dichst en het verst van de y-as liggen.

Oefening 2.6a Maximaliseer het volume van de balk in het eerste octant, met zijden evenwijdig met de coördinaatvlakken, waarvan de oorsprong een hoekpunt is, en het tegenovergelegen hoekpunt ligt op het vlak dat de drie coördinaatassen snijdt in de punten $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ en $(0,0,c)$ (met $a,b,c > 0$).

Oefening 2.6b Een fabrikant maakt metalen balkvormige doosjes. Aan de bovenkant zijn de doosjes open. Omdat de bodem steviger moet zijn dan de zijkanten, wordt daarvoor een ander metaal gebruikt, dat per oppervlakteeenheid driemaal zo duur is als het metaal dat gebruikt wordt voor de zijden. Als het volume van een doosje 96 cm^3 moet zijn, bepaal dan de afmetingen van het doosje die de kostprijs minimaliseren.

Oefening 2.6c Beschouw een rechthoek met basis x en hoogte y, en een gelijkbenige driehoek met basis x en tophoek θ. We plaatsen de driehoek bovenop de rechthoek, en krijgen zo een vijfhoek. Als gegeven is dat de omtrek van de vijfhoek gelijk is aan 1, bepaal dan x, y en θ zodat de oppervlakte maximaal is.

Reeks 3 Lijnintegralen

Bepaalde integralen afhankelijk van een parameter

Oefening 3.1a We beschouwen de functie

$$I(y) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2y\cos x + y^2)\mathrm{d}x$$

Bereken eerst $I'(y)$, en dan $I(y)$. Bepaal tenslotte

$$I = \int_0^{\pi} \ln(\frac{5}{4} - \cos x)\mathrm{d}x$$

Oefening 3.1b We beschouwen de functie

$$I(y) = \int_0^{\pi/2} \ln(1 - y^2\sin^2 x)\mathrm{d}x$$

Bereken eerst $I'(y)$, en dan $I(y)$. Bepaal tenslotte

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(1 - \frac{1}{4}\sin^2 x)\mathrm{d}x$$

Oefening 3.1c We beschouwen de functie

$$I(y) = \int_0^{\pi/2} \ln(y^2 - \sin^2 x)\mathrm{d}x$$

Bereken eerst $I'(y)$, en dan $I(y)$. Bepaal tenslotte

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(4 - \sin^2 x)\mathrm{d}x$$

De lijnintegraal

Oefening 3.2 Bereken de volgende lijnintegralen

a1. $\displaystyle\int_{\widehat{AB}} (x^2 - 2xy)\mathrm{d}x + (2xy + y^2)\mathrm{d}y$

waar $\widehat{AB}$ de boog is van de parabool $y = x^2$ die de punten $A(1,1)$ en $B(2,4)$ verbindt.

a2. $\displaystyle\int_{\widehat{AB}} \frac{x^2\mathrm{d}y - y^2\mathrm{d}x}{x^{5/3} + y^{5/3}}$

waar $\widehat{AB}$ de boog is van de asteroide $x = R\cos^3 t,\ y = R\sin^3 t$ die de punten $A(R,0)$ en $B(0,R)$ verbindt.

a3. $\displaystyle\oint_{\Gamma^+} x^2y\mathrm{d}x - y^2\mathrm{d}y$

waarbij Γ de gesloten kromme is die bestaat uit

- de boog op de ellips $x^2 + y^2/4 = 1$ die $A(1,0)$ en $B(0,2)$ verbindt;
- het lijnstuk op de y-as dat B en $C(0,-1)$ verbindt;
- het lijnstuk dat C en A verbindt.

a4. $\displaystyle\int_{\Gamma} \vec{V}(\vec{r}).\mathrm{d}\vec{r}$

waarbij $\vec{V}(\vec{r}) = (x+yz)\vec{u}_1 + (y+xz)\vec{u}_2 + (z+xy)\vec{u}_3$, en Γ een willekeurige stuksgewijs continue boog die de punten $O(0,0,0)$ en $C(1,1,1)$ met elkaar verbindt.

b1. $\displaystyle\int_{\widehat{AB}} (x+y)^2\mathrm{d}x - (x-y)^2\mathrm{d}y$

waar $\widehat{AB}$ de boog is van de parabool $y = x^2$ die de punten $A(0,0)$ en $B(1,1)$ verbindt.

b2. $\displaystyle\int_{\Gamma} (2a-y)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$

waarbij Γ de eerste boog is van de cycloide $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$.

b3. $\displaystyle\oint_{\Gamma^+} 2(x^2+y^2)\mathrm{d}x + (x+y)^2\mathrm{d}y$

waarbij Γ de driehoek met hoekpunten $A(1,1)$, $B(2,2)$ en $C(1,3)$ is.

b4. $\displaystyle\oint_{\Gamma^+} \vec{V}(\vec{r}).\mathrm{d}\vec{r}$

waarbij $\vec{V}(\vec{r}) = x^2y^3\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + z\vec{u}_3$, en Γ de cirkel in het xy-vlak met vergelijking $x^2+y^2 = R^2$.

c1. $\displaystyle\int_{\widehat{AB}} (x+y)^2\mathrm{d}x - (x-y)^2\mathrm{d}y$

waarbij $\widehat{AB}$ het lijnstuk is dat $A(0,0)$ en $B(1,1)$ verbindt.

c2. $\displaystyle\oint_{\Gamma^+} xy(y\mathrm{d}y - x\mathrm{d}x)$

waarbij Γ de cirkel is met vergelijking $x = \cos t$, $y = 1 + \sin t$.

c3. $\displaystyle\oint_{\Gamma^+} \frac{\mathrm{d}x - \mathrm{d}y}{x+y}$

waarbij Γ het vierkant is met hoekpunten $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$ en $D(0,-1)$.

c4. $\displaystyle\oint_{\Gamma^+} \vec{V}(\vec{r}).\mathrm{d}\vec{r}$

waarbij $\vec{V}(\vec{r}) = (x-z)\vec{u}_1 + (x^3 + yz)\vec{u}_2 - 3xy^2\vec{u}_3$, en Γ de cirkel is in het xy-vlak met vergelijking $x^2 + y^2 = 4$.

Reeks 4 De dubbele integraal

De dubbele integraal

Oefening 4.1 Bereken de volgende dubbele integralen

a1. $\displaystyle\iint_G xy^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

waarbij G begrensd is door de krommen met vergelijking $y = x$ en $y = x^2$.

a2. $\displaystyle\iint_G x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

waarbij G begrensd is door de krommen met vergelijking $y = 2x^2 - 2$ en $y = x^2 + x$.

b1. $\displaystyle\iint_G (y + y^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

waarbij G begrensd is door de krommen met vergelijking $y = x$ en $y^2 = x$.

b2. $\displaystyle\iint_G x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

waarbij G begrensd is door de rechte door de punten $A(2,0)$ en $B(0,2)$, en de kleinste boog van de cirkel met middelpunt $(0,1)$ en straal 1.

c1. $\displaystyle\iint_G xe^y \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

waarbij G begrensd is door de krommen met vergelijking $x = 1$, $y = 0$ en $y = x^2$.

c2. $\iint_G (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

waarbij G begrensd is door de krommen met vergelijking $y = 1$, $y = 2$, $x = y$ en $x = 3y$, en gelegen is in het eerste kwadrant.

Volume

Oefening 4.2a Bereken het volume van het ruimtestuk begrensd door de elliptische paraboloide $x^2 + 4y^2 = z$, het vlak $z = 0$ en de cilinders $y^2 = x$ en $x^2 = y$.

Oefening 4.2b Bereken het volume van het ruimtestuk begrensd door de cilinder $4x^2 + y^2 = a^2$, de vlakken $z = 0$ en $z = my$ ($m \neq 0$), en gelegen boven het xy-vlak.

Oefening 4.2c Bereken het volume van het ruimtestuk begrensd door de vlakken $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $2x - y - 2 = 0$, $x - 2y + 2 = 0$ en de parabolische cilinder $z = x^2$.

Oefening 4.3 Bepaal het volume van de volgende omwentelingslichamen.
a1. Het omwentelingslichaam dat ontstaat door het gebied begrensd door $y^2 = 8x$ en $x = 2$ te laten wentelen om de x-as.
a2. Het omwentelingslichaam dat ontstaat door het gebied begrensd door de x-as en de eerste boog van de cycloide

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

te laten wentelen om de symmetrie-as.
a3. Het omwentelingslichaam dat ontstaat door de lus van de kromme

$$\rho = a\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta} \quad (a > 0)$$

te laten wentelen om de x-as.
b1. Het omwentelingslichaam dat ontstaat door het gebied begrensd door $y^2 = 8x$ en $x = 2$ te laten wentelen om de y-as.
b2. Het omwentelingslichaam dat ontstaat door de cardioide

$$\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t) \\ y = a(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$$

te laten wentelen om de x-as.
b3. Het omwentelingslichaam dat ontstaat door de cirkel $x^2 + y^2 = 4$ te laten wentelen rond de

rechte met vergelijking $x = 3$.
c1. Het omwentelingslichaam dat ontstaat door het gebied begrensd door $y^2 = 2x$ en $x^2 + y^2 = 8$ te laten wentelen om de x-as.
c2. Het omwentelingslichaam dat ontstaat door het gebied begrensd door $y^2 = 8x$ en $x = 2$ te laten wentelen om de rechte met vergelijking $x = 2$.
c3. Het omwentelingslichaam dat ontstaat door het gebied begrensd door de x-as, de y-as, de kromme met vergelijking

$$\begin{cases} x = -\cos t - \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} \\ y = \sin t \end{cases} \qquad (0 < t \leq \frac{\pi}{2})$$

en de rechte evenwijdig met de y-as door het punt op de kromme corresponderend met de parameter $t = \pi/6$ te laten wentelen om de x-as.

Oefening 4.4a We beschouwen het regeloppervlak dat beschreven wordt door de rechten evenwijdig met het xz-vlak die steunen op de rechte en de cirkel, respectievelijk met vergelijking

$$\begin{cases} z = 1 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 2ay = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Bereken het volume van het lichaam begrensd door het regeloppervlak en de vlakken $x = 0$, $z = 0$, $y = 0$ en $y = 2a$.

Oefening 4.4b We beschouwen het regeloppervlak dat beschreven wordt door de rechten evenwijdig met het yz-vlak die steunen op de twee krommen met respectievelijk als vergelijking

$$\begin{cases} z = x^2 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} y = x^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

Bereken de inhoud van het lichaam begrensd door het regeloppervlak en de vlakken $x = 0$, $z = 0$ en $x = 3$.

Oefening 4.4c We beschouwen het regeloppervlak dat beschreven wordt door de rechten evenwijdig met het xy-vlak die steunen op de rechte en de kromme, respectievelijk met vergelijking

$$\begin{cases} y = z \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} z^2 = x^3 \\ y = 0 \end{cases}$$

Bereken de inhoud van het lichaam begrensd door het regeloppervlak en de vlakken $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ en $z = 4$.

De stelling van Green-Riemann

Oefening 4.5 Bereken de volgende integralen op twee manieren, gebruik makend van de stelling van Green-Riemann

a1. $\iint_G (1-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

waarbij G het gebied in het eerste kwadrant begrensd door de kromme $y^2 = x^2 - x^4$.

a2. $\oint_{\Gamma^+} x^2y\mathrm{d}x - xy^2\mathrm{d}y$

waarbij Γ de ellips is met vergelijking

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

b1. $\oint_{\Gamma^+} x^3\mathrm{d}y - y^3\mathrm{d}x$

waarbij Γ de kromme is met vergelijking in poolcoördinaten

$$\rho = \sqrt{\cos\theta} \quad (-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$$

b2. $\oint_{\Gamma^+} 2(x^2+y^2)\mathrm{d}x + (x+y)^2\mathrm{d}y$

waarbij Γ de driehoek met hoekpunten $A(1,1)$, $B(2,2)$ en $C(1,3)$.

c1. $\oint_{\Gamma^+} (2xy - x^2)\mathrm{d}x - (x+y^2)\mathrm{d}y$

waarbij Γ de gesloten kromme rond het gebied begrensd door $y = x^2$ en $y^2 = x$.

c2. $\oint_{\Gamma^+} (x+y)^2\mathrm{d}x - (x-y)^2\mathrm{d}y$

waarbij Γ de gesloten kromme rond het gebied begrensd door $y = x^2$ en $y = x$.

Overgang naar nieuwe coördinaten

Oefening 4.6 Bereken de volgende dubbele integralen, door overgang op poolcoördinaten

a1. $$\iint_G \sin\theta \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

waarbij G het gebied is dat begrensd wordt door de krommen met vergelijking $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$ en $\rho = \cos\theta$.

a2. $$\iint_G (x^2y + xy^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

waarbij G het grootste gebied is in het halfvlak $y \geq 0$ dat begrensd wordt door de krommen met vergelijking $y = 0$, $x + y = 0$ en $x^2 + y^2 = 1$.

a3. $$\iint_G (x^3y - xy^3)(x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

waarbij G het gebied is in het eerste kwadrant dat begrensd wordt door de krommen met vergelijking $x = y$, $y = 0$, $x^2 - y^2 = 1$ en $xy = 1$.

b1. $$\iint_G \theta \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

waarbij G het kleinste gebied is dat begrensd wordt door de krommen met vergelijking $\rho = a$ ($a > 0$) en $\rho = a/2\cos\theta$.

b2. $$\iint_G \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

waarbij G het gebied is dat begrensd wordt door de krommen met vergelijking $y^2 = 2x$, en $x^2 + y^2 = 8$.

c1. $$\iint_G \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1 + \rho^2)^2}$$

waarbij G de cirkelschijf $\rho \leq 1$.

c2. $$\iint_G \frac{1 + 3y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

waarbij G de cirkelsector is van de cirkel $\rho = 2$, begrensd door $0 \leq \theta \leq \pi/4$.

Oefening 4.7a Bereken het volume van het lichaam begrensd door de oppervlakken met vergelijking $z = x + y$, $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 2x$ en $z = 0$. Doe dit door volgende substitutie uit te voeren:

$$\begin{cases} u = xy \\ v = y/x \end{cases}$$

Oefening 4.7b Bereken het volume van het lichaam begrensd door de sfeer met vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ en het cilinderoppervlak met vergelijking $x^2 + y^2 = ay$.

Oefening 4.7c Bereken het volume van het lichaam begrensd door de paraboloide met vergelijking $x^2 + y^2 + 4z = 16$, het vlak $z = 4$ en het cilinderoppervlak met vergelijking $x^2 + y^2 = 9$.

Oefening 4.8 Bereken de oppervlakte van het gebied G

a1 $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 3y^2 - 3 \leq 0\} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 + y^2 - 3 \leq 0\}$;

a2 G is het stuk van de cardioide $\rho = 1 + \cos\theta$ gelegen buiten de cirkel $\rho = 1$;

a3 G wordt begrensd door de in het eerste kwadrant gelegen lus van de kromme C met vergelijking $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 8xy + 8y^2 = 0$;

b1 wordt begrensd door de parabool $y = 6x - x^2$ en de rechte $y = x$;

b2 G is het deel van het vlak met vergelijking

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 3x - 4 \leq 0 \\ y^2 - x - 2 \leq 0 \end{cases}$$

b3 G is het deel binnen de cirkel $\rho = \sin\theta$ dat buiten de cardioide $\rho = 1 - \cos\theta$ ligt;

c1 G is het gebied in het eerste kwadrant begrensd door de krommen met vergelijking $y^2 = x^3$ en $y = x$;

c2 G is het deel binnen de cirkel $\rho = 4\sin\theta$ dat buiten het lemniscaat $\rho^2 = 8\cos 2\theta$ ligt;

c3 G wordt begrensd door de kromme met vergelijking $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$ (ga over op poolcoördinaten).

Reeks 5 De oppervlakteintegraal

Oefening 5.1 a1 Bereken de oppervlakte van het gedeelte van de cilinder $x^2 + z^2 = 16$ gelegen binnen de cilinder $x^2 + y^2 = 16$.

a2 Bereken de oppervlakte van het gedeelte van de cilinder $x^2 + y^2 = 4y$ dat boven het xy-vlak ligt en onder de kegel $x^2 + y^2 = 3z^2$.

a3 Bereken de oppervlakte van het gedeelte van het oppervlak

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = c\theta \end{cases}$$

gelegen in het eerste octant tussen de cilinders

$$x^2+y^2=a^2 \text{ en } x^2+y^2=b^2 \quad (0<a<b)$$

a4 Bereken de oppervlakte van de torus die verkregen wordt door de cirkel met vergelijking

$$\begin{cases} x = d+R\cos\varphi \\ z = R\sin\varphi \end{cases}$$

in het xz-vlak te laten wentelen om de z-as. Hierbij is $0<R\leq d$.

b1 Bereken de oppervlakte van het gedeelte van de kegel $x^2+y^2=9z^2$ gelegen boven het xy-vlak en binnen de cilinder $x^2+y^2=6y$.

b2 Bereken de oppervlakte van het gedeelte van de sfeer $x^2+y^2+z^2=16$ gelegen buiten de paraboloide $x^2+y^2+z=16$.

b3 Bereken de oppervlakte van het oppervlak met parametervergelijkingen

$$\begin{cases} x = a\cos\alpha+\beta\sin\alpha \\ y = a\sin\alpha-\beta\cos\alpha \\ z = \beta+b \end{cases}$$

waarbij $0\leq\alpha\leq\pi/2$ en $0\leq\beta\leq b$.

b4 Bereken de oppervlakte van het omwentelingsoppervlak dat verkregen wordt door de kromme met vergelijking $y=\ln x$ (in het xy-vlak, waarbij $0<x\leq 1$)) te laten wentelen om de y-as.

c1 Bereken de oppervlakte van het gedeelte van de sfeer $x^2+y^2+z^2=25$ gelegen binnen de cilinder $2x^2+y^2=25$.

c2 Bereken de oppervlakte van het gedeelte van de cilinder $x^2+y^2=6y$ gelegen binnen de sfeer $x^2+y^2+z^2=36$.

c3 Bereken de oppervlakte van het deel van het oppervlak met vergelijking

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = \rho^2/a \end{cases}$$

dat gelegen is binnen de cilinder waarvan de beschrijvenden evenwijdig zijn met de z-as en steunen op het lemniscaat met vergelijking in poolcoördinaten $4\rho^2=a^2\cos 2\theta$.

c4 Bereken de oppervlakte van het omwentelingsoppervlak dat verkregen wordt door de cardioide met vergelijking

$$\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t) \\ y = a(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$$

in het xy-vlak te laten wentelen om de x-as

Oefening 5.2a Bereken de oppervlakte integraal

$$\iint_S z^2 \mathrm{d}O$$

waarbij S dat deel van het oppervlak met vergelijking $z = x^2 + y^2$ is, waarvan de orthogonale projectie op het xy-vlak de cirkelschijf $x^2 + y^2 \leq 5$ is.

Oefening 5.2b Bereken de oppervlakte integraal

$$\iint_S z \mathrm{d}O$$

waarbij S dat deel van het oppervlak met vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ is, gelegen boven het xy-vlak, en waarvan de orthogonale projectie op het xy-vlak het gebied is dat voldoet aan $x^2 + y^2 \leq 1$ en $y^2 \leq x$.

Oefening 5.2c Bereken de oppervlakte integraal

$$\iint_S \frac{z(x+y)}{x^2+y^2} \mathrm{d}O$$

waarbij S het deel is van de torus met vergelijking

$$\begin{cases} x = (d + r\cos u)\cos v \\ y = (d + r\cos u)\sin v \\ z = r\sin u \end{cases}$$

gelegen in het eerste octant. Hierbij is gegeven dat $0 < r \leq d$.

Oefening 5.3a Bereken de flux van het vectorveld $\vec{v} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3$ doorheen het oppervlak bepaald door de vergelijking en ongelijkheid

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$

Hierbij is $\vec{n}$ naar boven gericht.

Oefening 5.3b Bereken de flux van het vectorveld $\vec{v} = (z^2 - x)\vec{u}_1 - xy\vec{u}_2 + 3z\vec{u}_3$ doorheen het gesloten oppervlak bepaald door de vergelijkingen

$$z = 4 - y^2, \;\; x = 0, \;\; x = 3, \;\; z = 0$$

Hierbij is $\vec{n}$ naar buiten gericht.

Oefening 5.3c Bereken de flux van het vectorveld $\vec{v} = x^3\vec{u}_1 + y^3\vec{u}_2 + z^3\vec{u}_3$ doorheen het zijdelings oppervlak van de kegel met vergelijking

$$\frac{x^2 + y^2}{F^2} = \frac{z^2}{H^2}$$

waarbij $0 \leq z \leq H$.

Oefening 5.4a Beschouw het vectorveld

$$\vec{v} = (x - z)\vec{u}_1 + (x^3 + yz)\vec{u}_2 - 3xy^2\vec{u}_3$$

en het gedeelte S van de kegelmantel $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ begrepen tussen de top en het xy-vlak. Bereken beide leden van de stelling van Stokes.

Oefening 5.4b Beschouw het vectorveld

$$\vec{v} = x^2y^3\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + z\vec{u}_3$$

en de halve sfeer S met vergelijking $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Bereken beide leden van de stelling van Stokes.

Oefening 5.4c Beschouw het vectorveld

$$\vec{v} = (x + z)\vec{u}_1 + yz\vec{u}_2 + (x^2 + z)\vec{u}_3$$

en het gedeelte S van de cilindermantel $x^2 + y^2 = 2$ gelegen in het eerste octant onder het vlak $y = z$. Bereken beide leden van de stelling van Stokes.

Oefening 5.5 In deze oefening lichten we een belangrijke toepassing van de oppervlakte integraal toe. Onderstel dat een bepaalde grootheid A (genaamd manna) wordt uitgesmeerd over een oppervlak S. A wordt niet homogeen uitgesmeerd, op sommige plaatsen van S is per oppervlakte meer "manna" aanwezig dan op andere. We noemen α de hoeveelheid manna aanwezig per oppervlakteeenheid. α is dan een functie van de plaats op het oppervlak. Als we α kennen, dan kunnen we het totale manna berekenen:

$$A = \iint_S \alpha \mathrm{d}O$$

Voorbeeld 1: Een skinhead smeert zijn schedel in met een haargroeimiddel, in de vorm van een onwelriekende gelei. Als α de hoeveelheid gelei is die hij per oppervlakteeenheid insmeert, dan wordt de totale hoeveelheid gelei die hij gebruikt heeft gegeven door bovenstaande formule, waarbij S het schedeldak van onze sympathieke hooligan voorstelt.
Voorbeeld 2: Een toastje wordt met kaviaar ingesmeerd. Als α de hoeveelheid kaviaar voorstelt die we per oppervlakteeenheid aanbrengen, dan geeft bovenstaande formule de hoeveelheid kaviaar voor die nodig is om de toast vol te smeren. S is nu het oppervlak toastje. Als we het resultaat vermenigvuldigen met de prijs van de kaviaar, dan zien we hoeveel ons dat gaat kosten. Een meer democratische versie van dit voorbeeld: ons toastje wordt vervangen door een sneetje brood, en de kaviaar door chocopasta.
Voorbeeld 3: Genoeg gelachen, en over naar een serieus voorbeeld. We hebben al gezien dat druk kracht per oppervlakteeenheid is. Dit betekent eigenlijk het volgende: als op een oppervlak S een druk p (afhankelijk van de positie op het oppervlak) wordt uitgeoefend, dan is de totale kracht uitgeoefend op het oppervlak

$$F = \iint_S p \mathrm{d}O$$

Zoals we reeds zagen is de druk binnenin een vloeistof met dichtheid σ op diepte z gegeven door de formule

$$p = \sigma z$$

Bereken nu de totale kracht die wordt uitgeoefend op een sfeer met straal R, ondergedompeld in een vloeistof, met middelpunt van de sfeer op diepte h.
Bepaal dan, in kg, de kracht die wordt uitgeoefend op een sfeer met straal 20 cm, die in water wordt ondergedompeld tot op diepte respectievelijk 3 m (het zwembad), 10 m, 100 m, 1000 m en 10000 m (de diepste zee).

Reeks 6 Drievoudige integralen

Oefening 6.1 Bereken de volgende drievoudige integralen

a1. $\iiint_G z \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

waarbij G het gebied is gelegen in het eerste octant en begrensd door de vlakken $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 2$, $2y + x = 6$ en de cilinder $y^2 + z^2 = 4$.

a2. $$\iiint_G \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

waarbij G het ringvormig gebied begrensd door de oppervlakken met vergelijking $y^2 + z^2 = 2x + 1$, $y^2 + z^2 = 4x + 4$, $y^2 + z^2 = -2x + 1$ en $y^2 + z^2 = -4x + 4$.

b1. $$\iiint_G \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$$

waarbij G het gebied gelegen in het eerste octant en begrensd door de vlakken met vergelijking $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ en $x + y + z = 1$.

b2. $$\iiint_G \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\rho}$$

waarbij G het gebied gelegen in het eerste octant en begrensd door de kegels $\theta = \pi/4$ en $\theta = \operatorname{bgtg} 2$ en de sfeer $\rho = \sqrt{6}$. Hierbij zijn (ρ, θ, φ) bolcoördinaten.

c1. $$\iiint_G (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

waarbij G het gebied is begrensd door de paraboloide met vergelijking $x^2 + y^2 = 9 - z$ en het vlak $z = 0$.

c2. $$\iiint_G \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

waarbij G de bol is met vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.

Oefening 6.2a Bereken de inhoud van het ruimtestuk begrensd door het gesloten oppervlak met vergelijking ($a > 0$)

$$(x^2+y^2+z^2-2ax)^2 = 4a^2(x^2+y^2)$$

Oefening 6.2b Bereken de inhoud van het ruimtestuk begrensd door het kegeloppervlak $\theta = \pi/4$ en de sfeer $\rho = 2a\cos\theta$. Hierbij zijn (ρ, θ, φ) bolcoördinaten.

Oefening 6.2c Bereken de inhoud van het ruimtestuk begrensd door de paraboloide $z = 2x^2 + y^2$ en de cilinder $z = 4 - y^2$.

Oefening 6.3a Gebruik de stelling van Ostrogradski om het volume te berekenen van de torus met parametervergelijkingen ($0 < R \leq d$)

$$\begin{cases} x = (d + r\cos u)\cos v \\ y = (d + r\cos u)\sin v \\ z = r\sin u \end{cases}$$

Oefening 6.3b We beschouwen het vectorveld

$$\vec{v} = 4x\vec{u}_1 - 2y^2\vec{u}_2 + z^2\vec{u}_3$$

en het gebied G begrensd door de vlakken met vergelijking $z = 0$ en $z = 3$ en de cilinder met vergelijking $x^2 + y^2 = 4$. Bereken beide leden van de formule van Ostrogradski.

Oefening 6.3c We beschouwen het vectorveld

$$\vec{v} = (2x - z)\vec{u}_1 + x^2y\vec{u}_2 - xz^2\vec{u}_3$$

en het gebied G begrensd door de vlakken met vergelijking $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 1$ en $z = 1$. Bereken beide leden van de formule van Ostrogradski.

Oefening 6.4 Gebruik de stelling van Ostrogradski om de flux te berekenen van het vectorveld $\vec{v}$ doorheen het gesloten oppervlak S (van binnen naar buiten) dat het gebied G begrenst.
a. G is begrensd door de vlakken $x = 0$, $x = 3$, $z = 0$ en het oppervlak $z = 4 - y^2$, en

$$\vec{v} = (z^2 - x)\vec{u}_1 - xy\vec{u}_2 + 3z\vec{u}_3$$

b. G is begrensd door de vlakken $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ en $x + y + z = 1$, en

$$\vec{v} = xy\vec{u}_1 + yz\vec{u}_2 + xz\vec{u}_3$$

c. G is begrensd door het omwentelingsoppervlak dat we krijgen als we de figuur gevormd door de parabool $y^2 = x + 1$ (met $-1 \leq x \leq 3$) en door de cirkel $x^2 + y^2 = 3x + 4$ (met $3 \leq x \leq 4$) te laten wentelen om de x-as, en

$$\vec{v} = x^2\vec{u}_1 + y^2z\vec{u}_2 - yz^2\vec{u}_3$$

Oefening 6.5 Een voorwerp T heeft een massadichtheid $\rho(x, y, z)$. We hebben al gezien dat de massa van het voorwerp gegeven wordt door een drievoudige integraal:

$$M = \iiint_T \rho(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Stel formules op die toelaten om het middelpunt en het massamiddelpunt van T te berekenen.

Oefening 6.6 Beschouw een puntdeeltje met massa m op een afstand r van een rechte l, en onderstel dat het deeltje rond die as draait met constante hoeksnelheid ω. De kinetische energie van het deeltje is dan

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$$

Als we het deeltje nu vervangen door een stijf stelsel van n deeltjes met massa m_i gelegen op afstand r_i van l ($i = 1, \cdots, n$), dan is de kinetische energie van het stelsel als het om l draait met constante hoeksnelheid ω:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \omega^2$$

Men noemt

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

het traagheidsmoment van het stelsel om de as l. Om de kinetische energie te krijgen moeten we dus het traagheidsmoment vermenigvuldigen met het kwadraat van de hoeksnelheid en delen door 2.
Als we het stelsel vervangen door een stijf lichaam T met massadichtheid $\rho(x,y,z)$, dan vinden we voor de kinetische energie,

$$\frac{1}{2}\omega^2 \iiint_T \rho(x,y,z) r(x,y,z)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

en het traagheidsmoment:

$$I = \iiint_T \rho(x,y,z) r(x,y,z)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

waarbij $r(x,y,z)$ de afstand van het punt (x,y,z) tot de as l voorstelt. Wat worden deze formules als we voor l respectievelijk de x, y en z-as nemen? De traagheidsmomenten noteren we dan I_x, I_y, I_z.
Onderstellen dat we het lichaam T samenknijpen tot een punt, met dezelfde massa M als T. Op welke afstand K van l moeten we het punt plaatsen opdat het hetzelfde traagheidsmoment als T zou hebben? We noemen K de gyratiestraal.

Oefening 6.7 Zoals in oefening 6.6 is T een lichaam met massadichtheid $\rho(x,y,z)$. We beschouwen nu twee evenwijdige rechten l en l_0, op een afstand d van elkaar gelegen. Onderstel ook dat l_0 door het massamiddelpunt van T gaat. I en I_0 zijn de traagheidsmomenten van T om de assen l en l_0. Bewijs dat

$$I = I_0 + d^2 M$$

waarbij M de massa van T is.
Hint: We mogen ons assenstelsel vrij kiezen. Kies het assenstelsel zo dat l de z-as is, en het massamiddelpunt gelegen in het xy-vlak, dus met coördinaten van de vorm $(x_M, y_M, 0)$.

Oefening 6.8a Bereken het middelpunt van de halve bol met vergelijking

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \text{ en } z \geq 0$$

Oefening 6.8b Bereken het middelpunt van de kwartbol met vergelijking

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \text{ en } x, y \geq 0$$

Oefening 6.8c T is een massieve kegel, met hoogte h en straal van het grondvlak R. Bepaal het middelpunt van T.

Reeks 7 Numerieke Reeksen

Oefening 7.1 Bepaal de som van de volgende reeksen

a1. $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

a2. $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

a3. $$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \frac{(n+1)^2}{n^2+2n}$$

a4. $$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right)$$

b1. $$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^p} - \frac{1}{(n+1)^p}\right) \qquad (p > 0)$$

b2. $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$

b3. $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{n(n+1)}$$

b4. $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{4n-3}{(n(n^2-4)}$

c1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$

c2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{bgtg} \frac{1}{n^2+n+1}$

c3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+n-3}{n!}$

c4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin \frac{1}{n(n+1)}}{\cos \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n+1}}$

Oefening 7.2 Onderzoek de convergentie van de volgende positieve reeksen $(a, b > 0)$

a1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

a2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$

a3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

a4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n+6^n}{7^n}$

a5. $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2}$

a6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}$

a7. $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin^2 \frac{1}{n}$

a8. $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4+1}}$

a9. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$

a0. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{2n^2-3}$

a11. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)\ln n+n^2}$

a12. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)\ln n+n}$

b1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n^2-n+3}{n^3+2n}$

b2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$

b3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2n+1}$

b4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n^2}$

b5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n}$

b6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!!}$

b7. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{2n^3-1}$

b8. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\sqrt{n}}{n^3 - n^2 + n - 1}$

b9. $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n+\ln n}$

b10. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{(n+5)!}}$

b11. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^a}{(n+1)^{a+b}} \quad (b > 0)$

b12. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\text{bgsin}\,\frac{1}{n}\right)^n$

c1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$

c2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$

c3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^3}$

c4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n^2+1}\right)^{n^2}$

c5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{2n^3 - 1}$

c6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$

c7. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{3^n}$

c8. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

c9. $\sum_{n=1}^{+\infty} a^n \sin^2 nb \quad (0 < a < 1)$

c10. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$

Oefening 7.3 Zijn de volgende alternerende reeksen divergent, absoluut of relatief convergent?

a1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$

a2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n^3+1}$

a3. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln \ln n}{\ln n} \cos n\pi\}$

a4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n-1)!!}$

b1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+\sin n}$

b2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{3^n}$

b3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$

b4. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$

c1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(-1)^{n-1}}{e^n}$

c2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n-2^n}$

c3. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(2n-1)-\ln n}{\sqrt{n}}$

c4. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\frac{(-1)^n}{n}}$

Oefening 7.4 Schrijf de volgende decimale getallen als een reeks, en laat zien dat ze kunnen geschreven worden als het quotiënt van twee natuurlijke getallen.

a1. $0,77777777\cdots$

b1. $0,13131313\cdots$

c1. $0,890890890\cdots$

Oefening 7.5 Neem aan dat een bal die vanaf een hoogte h naar beneden valt terugkaatst tot een hoogte rechtevenredig met h. Een bal valt naar beneden vanop een hoogte van drie meter, en kaatst terug tot een hoogte van twee meter. Wat is de totale afstand die de bal aflegt als we hem oneindig lang laten terugkaatsen?

Oefening 7.6 Een kapitaal K_0 wordt belegd tegen een interestvoet α op jaarbasis. Op het einde van het k-de jaar wordt een bedrag n_k afgehaald, waarbij $n_k \leq N$ begrensd, en de rest wordt verder belegd. Hoeveel moet K_0 minimaal bedragen om dit mogelijk te maken? Bepaal K_0 als $\alpha = 5\%$ en $n_k = 100$ EURO voor elke k. Zelfde vraag als $n_k = 50$ EURO voor k oneven, en $n_k = 100$ EURO voor k even

Oefening 7.7 Toon aan dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)}$$

Reeks 8 Reeksen van functies

Uniforme convergentie

Oefening 8.1 **a1.** Gegeven is de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

Toon aan dat de reeks puntsgewijs convergeert in elke $x \in \mathbb{R}$. Toon aan dat ze uniform convergeert over elk interval (a,b) met $0 < a < b$.

a2. Onderstel dat de numerieke reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absoluut convergent is. Toon aan dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$ uniform convergeert over $\mathbb{R}$.

b1. Gegeven is de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^4}{(1+x^2)^n}$$

Toon aan dat de reeks puntsgewijs convergeert in elke $x \in \mathbb{R}$. Toon aan dat ze uniform convergeert over elk interval (a,b) met $0 < a < b$.

b2. Onderstel dat de positieve reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergent is. Toon aan dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} \ln(1 + a_n x)$ uniform convergeert over elk interval $(0,b)$ met $b > 0$.

c1. Onderstel dat de numerieke reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absoluut convergent is. Toon aan dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ uniform convergeert over $[-1,1]$.

c2. Onderstel dat de numerieke reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absoluut convergent is. Toon aan dat de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{1+x^n}$$

uniform convergeert over $(-1,+\infty)$ als $p > -1$.

Oefening 8.2 Toon aan dat de volgende reeksen uniform convergeren over elk interval (a,b).

a1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$

a2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

b1. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos^n x}{n(\ln n)^2}$

b2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{bgtg} x}{n\sqrt{n}}$

c1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$

c2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n+1)!}$

Oefening 8.3 Bespreek de convergentie van de volgende reeks

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+n)(x^2+n+1)}$

b. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^x(n+1)^{2x}(n+2)^{3x}}$

c. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sqrt{n^4+3n+1} - \sqrt{n^4+xn}\right)$

Oefening 8.4 **a1.** De functie s wordt gegegeven door de reeks

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$$

Toon aan dat

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

a2. Onderstel dat de reeks $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ uniform convergeert over (a,b), en dat de functies u_n begrensd zijn over (a,b). Bewijs dat $s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ begrensd is over (a,b).

b1. Bereken

$$\int_0^{\pi} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin nx}{e^n}\Big) \mathrm{d}x$$

b2. De functie s wordt gegeven door

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}$$

Bereken $s'(\pi/2)$.

c1. Bereken

$$\int_0^{1} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{(1+nx^2)(n+1)\ln(n+1)}\Big) \mathrm{d}x$$

c2. Toon aan dat

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n(n+1)}$$

continu is over $\mathbb{R}$.

Machtreeksen

Oefening 8.5 Bepaal het convergentiegebied van de volgende machtreeksen. Bespreek ook het gedrag in de grenspunten.

a1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n3^n}$

a2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$

a3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}}$

a4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!(x-1)^n$

b1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^3(x+1)^3$

b2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$

b3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}x^n}{(\ln n)2^n}$

b4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n x^n}$

c1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

c2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

c3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

c4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n\sqrt[n]{2}}{n}$

Oefening 8.6 We hebben gezien dat

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

voor elke $x \in \mathbb{R}$. Bijgevolg is

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Neem de n-de partiële som

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

- Toon aan dat $0 < n!(e - s_n) < \frac{1}{n}$.
- Toon aan dat $n!s_n$ een natuurlijk getal is.
- Onderstel dat $e = m/n$ een rationaal getal is. Toon aan dat $n!(e - s_n)$ een natuurlijk getal is gelegen in $(0,1)$.

Dit laatste is een contradictie, en hiermee is aangetoond dat e een irrationaal getal is.

Oefening 8.7 Een primitieve van de functie $f(x) = \int e^{-x^2/2}\mathrm{d}x$ kan niet geschreven worden als een combinatie (optelling, samenstelling, vermenigvuldiging, quotiënt) van elementaire functies (veeltermen, goniometrische, logaritme en hun inversen). Wel hebben we gezien dat

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$$

We laten nu zien hoe de bepaalde integraal

$$\int_a^b e^{-x^2/2}\mathrm{d}x$$

numeriek kan uitgerekend worden. Schrijf de Taylorreeks van f op in het punt $x = 0$. Integreer deze term per term, en leid hieruit af dat

$$\int_0^1 e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{4\cdot 3} + \frac{1}{4^2\cdot 5\cdot 2!} - \frac{1}{4^3\cdot 7\cdot 3!} + \cdots$$

Bereken deze integraal nauwkeurig tot op 3 cijfers na de komma.

Goniometrische reeksen

Oefening 8.8 Ontwikkel de volgende functies $f(x)$, met de gegeven periode T, in een Fourier-reeks.

a $f(x) = \begin{cases} x/\pi & \text{als } 0 \le x \le \pi \\ 1 & \text{als } \pi \le x < 2\pi \end{cases} \qquad T = 2\pi$

b $f(x) = \begin{cases} 5x & \text{als } 0 < x \le 0,4 \\ 2 & \text{als } 0,4 \le x \le 1,6 \\ -5(x-2) & \text{als } 1,6 \le x \le 2 \end{cases} \qquad T = 2$

c $f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{als } 0 \le x \le 4 \\ x-6 & \text{als } 4 \le x \le 8 \end{cases} \qquad \text{T=8}$

Oefening 8.9 We beschouwen de functie $f:\ [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}:\ x \mapsto x$.

a Schrijf f als een Fourierreeks van de vorm

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

Laat zien dat men deze reeks niet term per term mag afleiden.

b Schrijf f als een Fourierreeks van de vorm

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

c Schrijf $\cos x$, met $0 \le x \le \pi$ als een Fourierreeks van de vorm

$$\cos x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

Reeks 9 Invoeren van nieuwe veranderlijken in differentiaaluitdrukkingen

Oefening 9.1 In de volgende differentiaaluitdrukkingen vervangt men x door een uitdrukking in t. Schrijf de uitdrukking met t als onafhankelijke veranderlijke :

a. $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - y \qquad$ met $x = \cos t$

b. $x^3\frac{d^3y}{dx^3} - 3x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 7x\frac{dy}{dx} - 8y \qquad$ met $x = e^t$

c. $(x-x^3)\frac{d^2y}{dx^2}+(x^2\sqrt{1-x^2}-1)\frac{dy}{dx}-2x^3y \qquad \text{met } x=\sqrt{1-t^2} \quad (0\leq t\leq 1)$

Oefening 9.2 Waarin gaat de volgende differentiaaluitdrukking over als men y in plaats van x als onafhankelijke veranderlijke beschouwt?

a. $y^2y''+3yy'-3xy'^3-y$

b. $(x+a)yy''+xy'^3-1$

c. $y(y-1)y''+y'^2$

Oefening 9.3 Waarin gaat de volgende differentiaaluitdrukking over door de aangegeven substitutie? In de nieuwe differentiaaluitdrukking beschouwt men u als functie van t.

a. $(x+y-6)y'+(x+y+6) \qquad \text{met } x=u+t \text{ en } y=u-t$

b. $xyy''-xy'^2+y^3 \qquad \text{met } x=e^t \text{ en } y=e^u$

c. $x^3y''-(y-xy')^2 \qquad \text{met } x=e^t \text{ en } y=ue^t$

Oefening 9.4 Waarin gaat de volgende partiële differentiaaluitdrukking (z in functie van x en y) over door de volgende substitatie? In de nieuwe partiële differentiaaluitdrukking beschouwt men z als functie van u en v.

a. $(2x-y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial z}{\partial x} \qquad \text{met } x=u^2+v^2 \text{ en } y=u+v$

b. $y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \qquad \text{met } x=ae^u\cos v \text{ en } y=ae^u\sin v$

c. $(x+\sqrt{x^2-y^2})\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y} \qquad \text{met } x=u^2+v^2 \text{ en } y=2uv$

Oefening 9.5 **a.** Beschouw de transformatie

$$\begin{cases} x &= \operatorname{ch} u\cos v \\ y &= \operatorname{sh} u\sin v \end{cases}$$

Toon aan dat

$$\Delta z=\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u+\sin^2 v}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)$$

b. Beschouw de transformatie

$$\begin{cases} x &= u^2-v^2 \\ y &= 2uv \end{cases}$$

Toon aan dat

$$\Delta z=\frac{1}{4(u^2+v^2)}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)$$

c. Beschouw de transformatie

$$\begin{cases} x &= \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u + \cos v} \\ y &= \frac{\sin v}{\operatorname{ch} u + \cos v} \end{cases}$$

Toon aan dat

$$\Delta z = (\operatorname{ch} u + \cos v)^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)$$

Reeks 10 Differentiaalvergelijkingen van 1ste orde en 1ste graad

Oefening 10.1 Onderzoek of de volgende differentiaalvergelijkingen juiste differentiaalvergelijkingen zijn. Bepaal de algemene integraal.

a1. $(x + y\cos x)dx + \sin x dy = 0$

a2. $(2xye^{x^2y} + y^2e^{xy^2} + 1)dx + (x^2e^{x^2y} + 2xye^{xy^2} - 2y)dy = 0$

a3. $(11x^2 + 3y^2)\sqrt[3]{x^2 + y^2}dx + 8xy\sqrt[3]{x^2 + y^2}dy = 0$

b1. $(1 + e^{2x})dy + 2ye^{2x}dx = 0$

b2. $(y^2 - \frac{y}{x(x+y)} + 2)dx + (\frac{1}{x+y} + 2y(x+1))dy = 0$

b3. $\ln(1 + y^2) + \frac{2yy'(x-1)}{y^2+1} = 0$

c1. $(2x + 3y + 4)dx + (3x + 4y + 5)dy = 0$

c2. $(x\sqrt{x^2 + y^2} - y)dx + (y\sqrt{x^2 + y^2} - x)dy = 0$

c3. $\frac{1-y^2}{(1+xy)^2} = \frac{x^2-1}{(1+xy)^2)}y'$

Oefening 10.2 Bepaal de algemene integraal van de volgende differentiaalvergelijkingen (scheiden van veranderlijken)

a1. $xydy = (y+1)(1-x)dx$

a2. $(x^2 - 1)y' \operatorname{cotg} y = 1$

b1. $(1 + y^2)dx = (x + x^2)dy$

b2. $(1 + e^{-x})y' \sin y + \cos y = 0$

c1. $(2y^2 + 1)dy = 3x^2ydx$

c2. $xy'(2y-1)+y(x-1)=0$

Oefening 10.3 Bepaal de algemene integraal van de volgende differentiaalvergelijkingen (homogene vergelijking)

a1. $(y^2-x^2)dx+xydy=0$

a2. $x^2+y^2+xyy'=0$

b1. $x(x+y)dy-y^2dx=0$

b2. $x\sin\frac{y}{x}-y\cos\frac{y}{x}+xy'\cos\frac{y}{x}=0$

c1. $(x+y)^2dy=(x^2-2xy+5y^2)dx$

c2. $y^2+xy-x^2y'=0$

Oefening 10.4 Bepaal de algemene integraal van de volgende differentiaalvergelijkingen (herleiden tot een homogene vergelijking)

a1. $(x+y+1)dx+(2x+2y+1)dy=0$

a2. $(3y-7x+7)dx+(7y-3x+3)dy=0$

b1. $(3x+2y+1)dx-(3x+2y-1)dy=0$

b2. $(2x+y-1)dy=(4x-y+7)dx$

c1. $(2x+4y+3)dy=(x+2y+1)dx$

c2. $(3x+5y+6)dy-(x+7y+2)dx=0$

Oefening 10.5 Bepaal de algemene integraal van de volgende differentiaalvergelijkingen (lineaire 1ste orde vergelijking)

a1. $xdy-2ydx=(x-2)e^xdx$

a2. $xy'-(x+1)y=x^2-x^3$

a3. $y'+1=4e^{-y}\sin x$

b1. $y'-6y=10\sin 2x$

b2. $dy+(2y\text{cotg}\,x+\sin 2x)dx=0$

b3. $y\ln y dx+(x-\ln y)dy=0$

c1. $xdy=y(1-x\text{tg}\,x)dx+x^2\cos x dx$

c2. $y'-y=x+\sin x$

c3. $(\sin y)y' = \cos x(2\cos y - \sin^2 x)$

Oefening 10.6 Bepaal de algemene integraal van de volgende differentiaalvergelijkingen (Bernoulli vergelijking)

a. $(2xy^5 - y)dx + 2xdy = 0$

b. $y' + y = y^2(\cos x - \sin x)$

c. $y' + 2xy + xy^4 = 0$

Reeks 11 Differentiaalvergelijkingen van 1ste orde en willekeurige graad

In deze oefeningenreeks beschouwen we differentiaalvergelijkingen van het type $F(x,y,y') = 0$. Enkel in speciale gevallen kunnen deze geïntegreerd worden.

De vergelijking kan ontbonden worden

Onderstel dat de functie F kan ontbonden worden:

$$F(x,y,y') = (y' - f_1(x,y))(y' - f_2(x,y)) \cdots (y' - f_n(x,y)) = 0$$

$F(x,y,y') = 0$ als voor tenminste een i geldt dat

$$y' = f_i(x,y)$$

Vergelijkingen van dit type hebben we reeds besproken in de vorige reeks. De oplossing is van de vorm

$$G_i(x,y,c_i) = 0$$

De algemene integraal van de differentiaalvergelijking is dan

$$G_1(x,y,c_i)G_2(x,y,c_i) \cdots G_n(x,y,c_i) = 0$$

Voorbeeld 1

$$yy'^2 - (xy+1)y' + x = 0$$

$$(y' - x)(yy' - 1) - 0$$

$y' = x$ geeft als oplossing: $y = x^2/2 + c_1$
$yy' = 1$ geeft als oplossing: $y^2/2 = x + c_2$
De algemene integraal van de differentiaalvergelijking is dus

$$(y - x^2/2 - c_1)(y^2/2 - x - c_2) = 0$$

Voorbeeld 2

$$F(y') = 0$$

Als α een wortel is van de vergelijking $F(\alpha) = 0$, dan kan men de vergelijking schrijven onder de vorm

$$(y' - \alpha)F_1(y') = 0$$

en $y = \alpha x + c$ is een oplossing van de vergelijking.

Overgang naar parametervorm

Onderstel dat y ontbreekt in de vergelijking: de vergelijking is van de vorm $F(x, y') = 0$. We herschrijven de vergelijking in parametervorm:

$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y' = \psi(t) \end{cases}$$

Uit de tweede vergelijking volgt:

$$\mathrm{d}y = \psi(t)\mathrm{d}x$$

en uit de eerste, na differentiatie

$$\mathrm{d}x = \phi'(t)\mathrm{d}t$$

en

$$\mathrm{d}y = \psi(t)\phi'(t)\mathrm{d}t$$

Integreren geeft

$$y = \int \psi(t)\phi'(t)\mathrm{d}t$$

en we hebben een stel parametervergelijkingen van de integraal van de differentiaalvergelijking:

$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \int \psi(t)\phi'(t)\mathrm{d}t \end{cases}$$

Voorbeeld 3

$$x^4 = y'^3 - x^2 y'$$

Stel $t = y'/x$. Dan is $x^4 = t^3x^3 - x^3t$, en we krijgen volgend stel parametervergelijkingen:

$$\begin{cases} x = t^3 - t \\ y' = xt = t^4 - t^2 \end{cases}$$

We vinden

$$\begin{aligned} \mathrm{d}y &= (t^4 - t^2)\mathrm{d}x \\ &= (t^4 - t^2)(3t^2 - 1)\mathrm{d}t \\ &= (3t^6 - 4t^4 + t^2)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

en de algemene integraal in parametervorm:

$$\begin{cases} x = t^3 - t \\ y = 3t^7/7 - 4t^5/5 + t^3/3 + c \end{cases}$$

Een analoge techniek kunnen we toepassen op vergelijkingen waarin x ontbreekt, van de vorm

$$F(y, y') = 0$$

We schrijven deze weer in parametervorm:

$$\begin{cases} y = \phi(t) \\ y' = \psi(t) \end{cases}$$

Uit de tweede vergelijking volgt:

$$\mathrm{d}y = \psi(t)\mathrm{d}x$$

en uit de eerste

$$\mathrm{d}y = \phi'(t)\mathrm{d}t$$

zodat

$$\mathrm{d}x = \frac{\phi'(t)}{\psi(t)}\mathrm{d}t$$

en de algemene integraal in parametervorm is

$$\begin{cases} x = \int \frac{\phi'(t)}{\psi(t)}\mathrm{d}t \\ y = \phi(t) \end{cases}$$

Voorbeeld 4

$$y = y'^2 + 2\ln y'$$

Stel $t = y'$. We krijgen volgend stel parametervergelijkingen:

$$\begin{cases} y = t^2 + 2\ln t \\ y' = t \end{cases}$$

We vinden

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{t} = \frac{1}{t}(2t + \frac{2}{t}\mathrm{d}t = (2 + \frac{2}{t^2})\ dt$$

en

$$\begin{cases} x = 2t - \frac{2}{t} + c \\ y = t^2 + 2\ln t \end{cases}$$

Tenslotte bekijken we het geval waarin x, y en y' in de vergelijking optreden, en waar de vergelijking homogeen is in x en y. Door te delen door een geschikte macht van x kunnen we de vergelijking schrijven onder de vorm

$$F\left(\frac{y}{x}, y'\right) = 0$$

In parametervorm krijgen we

$$\begin{cases} y/x = \phi(t) \\ y' = \psi(t) \end{cases}$$

De eerste vergelijking geeft

$$y = x\phi(t)$$

en

$$\mathrm{d}y = \phi(t)\mathrm{d}x + x\phi'(t)\mathrm{d}t$$

en de tweede vergelijking geeft

$$dy = \psi(t)\mathrm{d}x$$

en dus

$$\psi(t)\mathrm{d}x = \phi(t)\mathrm{d}x + x\phi'(t)\mathrm{d}t$$

of

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\phi'(t)}{\psi(t) - \phi(t)}\mathrm{d}t$$

Na integratie

$$x = c\exp\int \frac{\phi'(t)}{\psi(t) - \phi(t)}\mathrm{d}t$$

samen met

$$y = x\phi(t)$$

een stel parametervergelijkingen van de algemene integraal.

Voorbeeld 5

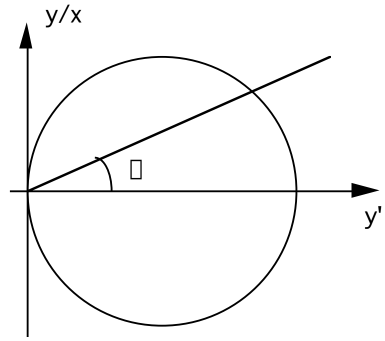
$$x^2y'^2 - 2x^2y' + y^2 = 0$$

of

$$y'^2 - 2y' + (y/x)^2 = 0$$

Dit is de vergelijking van een cirkel in het $(y', y/x)$-vlak, met middelpunt $(1,0)$ en straal 1. We kiezen $t = \mathrm{tg}\,\theta$ als parameter. We vinden

$$\begin{cases} y' = \frac{2}{1+\mathrm{tg}^2\theta} = \frac{2}{1+t^2} \\ y/x = \frac{2\mathrm{tg}\,\theta}{1+\mathrm{tg}^2\theta} = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$



Figuur 1: Voorbeeld 5

en

$$\begin{aligned}
x &= c \exp \int \frac{(t^2-1)\mathrm{d}t}{(1+t^2)(t-1)} \\
&= c \exp \int \frac{(t+1)\mathrm{d}t}{(1+t^2)} \\
&= c \exp\Big(\operatorname{bgtg} t + \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big) \\
&= c\sqrt{t^2+1}\exp \operatorname{bgtg} t
\end{aligned}$$

Een stel parametervergelijkingen van de oplossing is dan

$$\begin{cases} x = c\sqrt{t^2+1}\exp \operatorname{bgtg} t \\ y = 2xt/(1+t^2) \end{cases}$$

Oefening 11.1 Bepaal van de volgende differentiaalvergelijkingen de algemene integraal:

a1. $x^2y'^2 + xyy' - 6y^2 = 0$

a2. $x = 1 + 3y'^3$

a3. $1 + y'^2 = 2ay'^2/y$

a4. $x^2y'^2 + 5xyy' + 6y^2 = 0$

b1. $xy'^2 + (y-1-x^2)y' - x(y-1) = 0$

b2. $(y'-x)^2 = y' + x$

b3. $(3y+2)^2y'^2 = 4y+1$

b4. $xyy'^2 + (x^2+xy+y^2)y' + x^2 + xy = 0$

c1. $y'^4 - (x+2y+1)y'^3 + (x+2y+2xy)y'^2 - 2xyy' = 0$

c2. $(1-y'^2)\cos x = 2y'\sin x$

c3. $(y+y')^2 = y-y'$

c4. $xy'^2 - 2yy' - x = 0$

De methode van afleiding en eliminatie

Onderstel dat de differentiaalvergelijking

$$F(x,y,y') = 0$$

kan opgelost worden naar y, dus geschreven kan worden onder de vorm

$$y = \phi(x,y')$$

We voeren een hulpveranderlijke $p = y'$ in en schrijven

$$y = \phi(x,p)$$

hierin is p een functie van x. Afleiden naar x geeft

$$y' = \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial p}p'$$

of

$$p = \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial p}p'$$

Dit is een vergelijking van eerste orde en eerste graad met onbekende functie p. Onderstel dat we deze kunnen integreren:

$$G(x,p,c) = 0$$

We hebben dan een stel parametervergelijkingen voor de oplossing:

$$\begin{cases} y = \phi(x,p) \\ G(x,p,c) = 0 \end{cases}$$

met p als parameter.
Opmerkingen 1) Gekomen bij de vergelijking $G(x,p,c) = 0$, zou men terug $p = y'$ kunnen stellen en opnieuw integreren. Dit is fout omdat $G(x,p,c) = 0$ niet equivalent is met de oorspronkelijke

vergelijking. Het zou trouwens een oplossing afhankelijk van twee constanten opleveren.
2) Als de vergelijking niet oplosbaar is naar y, maar wel naar x, dan beschouwen we x als een functie van y, en nemen y als onafhankelijke veranderlijke.

Voorbeeld 6

$$y = y'^2 + y'^3$$

Stel $y' = p$. We krijgen $y = p^2 + p^3$, en, na afleiding

$$p = 2pp' + 3p^2p$$

of

$$p((2+3p)p' - 1) = 0$$

a) $(2+3p)p' = 1$ geeft de oplossing

$$\begin{cases} x = 2p + 3p^2/2 + c \\ y = p^2 + p^3 \end{cases}$$

b) $p = 0$ geeft de singuliere oplossing $y = 0$.

De vergelijking van Lagrange

Dit is een vergelijking van de vorm

$$y = x\phi(y') + \psi(y')$$

De methode van afleiding en eliminatie kan steeds worden toegepast:

$$y = x\phi(p) + \psi(p)$$

$$p = \phi(p) + (x\phi'(p) + \psi'(p))p'$$

$$(p - \phi(p))\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} - \phi'(p)x = \psi'(p)$$

Dit is een lineaire differentiaalvergelijking, met veranderlijke p en onbekende functie x.

Voorbeeld 7

$$y = y'^2 x + y'^2$$

$$y = xp^2 + p^2$$

$$p = p^2 + 2xpp' + 2pp'$$

$$p = 0 \text{ of } 2(x+1)p' + p = 1$$

De vergelijking

$$2(x+1)p' + p = 1$$

heeft als oplossing (controleer zelf)

$$c(1-p)^2(1+x) = 1$$

en dus vinden we als algemene integraal van de differentiaalvergelijking

$$\begin{cases} c(1-p)^2(1+x) = 1 \\ y = p^2(1+x) \end{cases}$$

Eliminatie van p geeft

$$y = (\sqrt{1+x} - d)^2$$

$p = 0$ levert de singuliere oplossing $y = 0$.

De vergelijking van Clairaut

Dit is een vergelijking van de vorm

$$y = xy' + \psi(y')$$

m.a.w. een vergelijking van Lagrange met $\phi(p) = p$. Door te werk te gaan als hierboven vinden we

$$(x + \psi'(p))\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0$$

a) Integreren van

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0$$

geeft $p = c$, en de algemene integraal is

$$y = cx + \psi(c)$$

Dit is een familie rechten.
b) De vergelijking $x + \psi'(p)$ geeft een singuliere oplossing in parametervorm:

$$\begin{cases} x = -\psi'(p) \\ y = px + \psi(p) \end{cases}$$

Oefening 11.2 Gebruik de methode van afleiding en eliminatie om van de volgende differentiaalvergelijkingen de algemene integraal, en eventueel de singuliere oplossingen, te bepalen:

a1. $xy'^2 - 2yy' + 4x = 0$

a2. $y^2y'^2 + 3y'x - y = 0$

a3. $y = (1 + y')x + y'^2$

a4. $y = y'x + y' - y'^2$

b1. $3x^4y'^2 - xy' - y = 0$

b2. $16y^3y'^2 - 4xy' + y = 0$

b3. $2y = y'^2 + 4y'x$

b4. $y = xy' + \sqrt{1 - y'^2}$

c1. $xy'^2 - yy' - y = 0$

c2. $8yy'^2 - 2xy' + y = 0$

c3. $y = xy'^2 + y'^3$

c4. $x^2y - x^3y' + yy'^2 = 0$ (stel $x^2 = u$ en $y^2 = v$)

Meetkundige toepassing: orthogonale baankrommen

We beschouwen een familie krommen met vergelijking

$$F(x,y,\alpha) = 0$$

Voor elke waarde van de parameter α hebben we een kromme van de familie. Een kromme met vergelijking $G(x,y) = 0$ wordt orthogonale baankromme genoemd, als ze elke kromme uit de familie orthogonaal snijdt. Gevraagd wordt om alle orthogonale baankrommen te bepalen.
We stellen eerst de differentiaalvergelijking van de gegeven familie krommen op: elimineer α uit

$$\begin{cases} F(x,y,\alpha) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,\alpha) + y'\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,\alpha) = 0 \end{cases}$$

We krijgen

$$f(x,y,y') = 0$$

Neem nu een orthogonale baankromme

$$K: \ y = y(x)$$

en een kromme L uit de gegeven familie met vergelijking

$$L: \ y = y_1(x)$$

en onderstel dat K en L mekaar snijden in het punt (x_0,y_0). De raaklijnen aan K en L in het punt (x_0,y_0) zijn orthogonaal, en dus is het product van hun richtingscoëfficiënten gelijk aan -1:

$$y'(x_0)y_1'(x_0) = -1$$

De vergelijking van L voldoet aan de differentiaalvergelijking. In het bijzonder geldt

$$f(x_0,y_0 = y_1(x_0), y_1'(x_0)) = 0$$

en dus

$$f(x_0,y_0 = y(x_0), -\frac{1}{y'(x_0)}) = 0$$

Door elk punt (x_0,y_0) van K gaat een kromme uit de familie, en dus geldt deze betrekking in elk punt (x_0,y_0) van K. Dit betekent dat K voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$f(x,y,-1/y') = 0$$

Oplossing van deze differentiaalvergelijking levert alle orthogonale baankrommen.

Voorbeeld 8 We bepalen de orthogonale baankrommen van de familie hyperbolen

$$y^2 - x^2 = \alpha$$

Afleiden naar x geeft de differentiaalvergelijking van deze familie:

$$2yy' - 2x = 0$$

De differentiaalvergelijking van de familie orthogonale baankrommen is

$$-2\frac{y}{y'} - 2x = 0$$

of

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} + \frac{\mathrm{d}x}{x} = 0$$

en, na integratie,

$$xy = c$$

Dit is weer een familie hyperbolen.

Poolcoördinaten

Onderstel nu dat de vergelijking van een familie krommen gegeven is in poolcoördinaten. Wat zijn de orthogonale baankrommen?
Eerst lossen we het volgend probleem op: twee krommen $\rho = \rho_1(\theta)$ en $\rho = \rho_2(\theta)$ snijden mekaar in een punt (ρ_0, θ_0). Wanneer snijden ze orthogonaal?
We hebben

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x} = \frac{\rho_i \cos\theta + \rho_i' \sin\theta}{-\rho_i \sin\theta + \rho_i' \cos\theta}$$

en dus snijden de krommen mekaar orthogonaal als

$$\frac{\rho_0 \cos\theta_0 + \rho_1'(\theta_0)\sin\theta_0}{-\rho_0 \sin\theta_0 + \rho_1' \cos\theta_0} \frac{\rho_0 \cos\theta_0 + \rho_2'(\theta_0)\sin\theta_0}{-\rho_0 \sin\theta_0 + \rho_2' \cos\theta_0} = -1$$

of, na vereenvoudiging

$$\rho_1' = -\frac{\rho^2}{\rho_2'}$$

Zoals hierboven verkrijgen we dus: als $f(\theta, \rho, \rho') = 0$ de differentiaalvergelijking in poolcoördinaten is van een familie krommen, dan is de differentiaalvergelijking voor de orthogonale baankrommen:

$$f(\theta, \rho, -\frac{\rho^2}{\rho'}) = 0$$

Oefening 11.3 Bepaal de orthogonale baankrommem van de volgende families krommen:

a1. $x^2 + 2y^2 = a$

a2. $\rho = a \cos\theta$

b1. $y = ce^{-2x}$

b2. $\rho = a(1 + \sin\theta)$

c1. $y = x^2 - a$

c2. $\rho^4 - 2\rho^2 \cos 2\theta = a$

Meetkundige toepassing: omhullende van een familie krommen

We beschouwen weer een familie krommen

$$F(x, y, \alpha) = 0$$

Neem twee verschillende leden van de familie, en zoek de snijpunten. We moeten dan het stelsel

$$\begin{cases} F(x, y, \alpha) = 0 \\ F(x, y, \alpha') = 0 \end{cases}$$

oplossen. Het stelsel

$$\begin{cases} F(x, y, \alpha) = 0 \\ \frac{F(x,y,\alpha') - F(x,y,\alpha)}{\alpha - \alpha'} = 0 \end{cases}$$

is equivalent. In de limiet $\alpha' \to \alpha$ vinden we het stelsel

$$\begin{cases} F(x, y, \alpha) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \alpha}(x, y, \alpha) = 0 \end{cases}$$

Elimineer - indien mogelijk - α uit dit stelsel; dit geeft een kromme

$$f(x,y)=0$$

We noemen deze kromme de *omhullende* van de familie $F(x,y,\alpha)=0$.

Eigenschap 1 De omhullende raakt aan elk lid van de familie krommen.

Bewijs Los α op uit de vergelijking

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}(x,y,\alpha)=0$$

Dit geeft $\alpha = X(x,y)$. Subsitutie in de eerste vergelijking levert

$$F(x,y,X(x,y))=0$$

en dit is dan de vergelijking van de omhullende. De richtingscoëfficiënt y' van de raaklijn in een punt (x,y) op de omhullende voldoet aan de vergelijking

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'+\frac{\partial F}{\partial \alpha}\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial \alpha}\frac{\partial X}{\partial y}y'=0$$

of

$$y'=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial \alpha}\frac{\partial X}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial \alpha}\frac{\partial X}{\partial y}}$$

In een punt van de omhullende geldt

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}=0$$

zodat

$$y'=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

maar dit is ook de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van een kromme van de familie $F(x,y,\alpha)=0$.

Eigenschap 2 De omhullende is een (singuliere) oplossing van de differentiaalvergelijking van de familie oppervlakken.

Bewijs Stel dat de differentiaalvergelijking

$$f(x,y,y') = 0$$

is, en neem een punt (x_0, y_0) op de omhullende. Neem $y = y_1(x)$ een kromme van de familie die door (x_0, y_0) gaat. Dan geldt

$$f(x_0, y_0, y_1'(x_0)) = 0$$

Als $y = y_2(x)$ de vergelijking van de omhullende is, dan hebben we, vanwege eigenschap 1:

$$y_2'(x_0) = y_1'(x_0)$$

en dus

$$f(x_0, y_0, y_2'(x_0)) = 0$$

Dit geldt in elk punt van de omhullende, en dus is de vergelijking van de omhullende een oplossing van de differentiaalvergelijking.

Oefening 11.4 Bepaal de omhullende van de volgende familie krommen:

a. $y = \alpha x + \psi(\alpha)$ (cf. vergelijking van Clairaut)

b. $y = (x - \alpha)^2$

c. $x^2 - 2\alpha x + y^2 = 0$

Reeks 12 Differentiaalvergelijkingen van hogere orde

Willekeurige vergelijkingen

In sommige gevallen kan men de orde van de differentiaalvergelijking verlagen. Als we ze kunnen terugbrengen tot een vergelijking van orde 1, dan kunnen we de methodes uit de vorige reeksen gebruiken.

1) De vergelijking bevat slechts x en één afgeleide
De vergelijking is dan van de vorm

$$y^{(n)} = f(x)$$

We hebben

$$y^{(n-1)}(x) = \int f(x)\mathrm{d}x + c_1$$

Nogmaal integreren geeft $y^{(n-2)}$, $y^{(n-3)}$, enz.

2) Vergelijkingen waarin y ontbreekt
De vergelijking is van de vorm

$$F(x, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

Stel $z = y'$. De vergelijking wordt

$$F(x, z, z', \cdots, z^{(n-1)}) = 0$$

De orde is verlaagd. Als we z kunnen bepalen, dan vinden we y na integratie van z.

Voorbeeld 1

$$xy'' + y' = 0$$

Stel $y' = z$

$$xz' + z = 0$$

$$xz = c_1$$

$$y' = \frac{c_1}{x}$$

$$y = c_1 \ln|x| + c_2$$

3) Vergelijkingen waarin x ontbreekt
De vergelijking is van de vorm

$$F(y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

We nemen x als onbekende functie en y als argument. Dan is

$$y' = \frac{1}{x'}; \quad y'' = -\frac{x''}{x'^3}; \cdots$$

en de vergelijking wordt van de vorm

$$G(y, x', x'', \cdots, x^{(n)}) = 0$$

en we zijn herleid tot het vorige geval.

Voorbeeld 2

$$y'' = -\frac{1}{2y^3}$$

$$-\frac{x''}{x'^3} = -\frac{1}{2y^3}$$

Stel $x' = z$

$$\frac{\mathrm{d}z}{z^3} = \frac{\mathrm{d}y}{2y^3}$$

$$-\frac{1}{2z^2} = -\frac{1}{4y^2} - \frac{c_1}{4}$$

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1 + c_1 y^2}{2y^2}$$

$$x' = z = \frac{\sqrt{2}y}{\sqrt{1 + c_1 y^2}}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{c_1}\sqrt{1 + c_1 y^2} + c_2$$

$$(c_1 x - c_1 c_2)^2 = 2 + 2c_1 y^2$$

4) <u>Vergelijkingen die homogeen zijn in y, $y', \cdots, y^{(n)}$</u>
De orde wordt met een eenheid verlaagd door $z = y'/y$ als nieuwe onbekende functie te nemen. Immers

$$y' = yz$$

en dus

$$y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z')$$

en

$$y''' = y'(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = y(z^3 + 3zz' + z'')$$

enz.

Voorbeeld 3

$$xyy'' - xy'^2 + yy' = 0$$

$$xy^2(z^2 + z') - xy^2z^2 + zy^2 = 0$$

$y = 0$ is een singuliere oplossing.

$$x(z^2 + z') - xz^2 + z = 0$$

$$xz' + z = 0$$

$$\frac{y'}{y} = z = \frac{c_1}{x}$$

$$\ln y = c_1 \ln x + \ln c_2$$

$$y = c_2 x^{c_1}$$

Oefening 12.1 Bepaal de algemene integraal van de volgende differentiaalvergelijkingen.

a1. $y'' = xe^x + \cos x$

a2. $x^2y'' + xy' = a$

a3. $y(y-1)y'' + y'^2 = 0$

a4. $y'' + y'^2 = 1$

b1. $y'' = 1/x$

b2. $xy'' + y' + x = 0$

b3. $yy'' + y'^2 + 2y^2 = 0$

b4. $y'' - y' + y'^2 = 0$

c1. $y'' = xe^x + \sin x$

c2. $2x^2y'y'' - xy'' + y' = 0$

c3. $yy'' = y'^2 - y'^3$

c4. $y'' + y' = y'^2$

c5. $2y'y''' = 3y''^2$

Meetkundige toepassingen

Oefening 12.2 **a1.** Bepaal de vlakke krommen met de volgende eigenschap: de afstand van de oorsprong tot een punt van de kromme is gelijk aan het stuk van de raaklijn in dat punt gelegen tussen dat punt en de x-as.
a2. Bepaal de vlakke krommen met de volgende eigenschap: voor elk punt $P(x,y)$ van de kromme is B het snijpunt van de raaklijn met de y-as, en A het snijpunt van de normaal met de x-as; de oppervlakte van de rechthoek met zijden AP en BP is gelijk aan $|xy|$.
a3. Bepaal de vlakke krommen met de volgende eigenschap: voor elk punt P van de kromme is de projectie op de y-as van de kromtestraal een positieve constante a.
De kromtestraal R in het punt $P(x,y)$ wordt gegeven door de formule

$$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$$

b1. Bepaal de vlakke krommen met de volgende eigenschap: de raaklijn in elk punt $P(x,y)$ van de kromme snijdt de y-as in Q, zodanig dat $\mathrm{d}(O,Q)^2 = |xy|^2$.

b2. Bepaal de vlakke krommen met de volgende eigenschap: vanuit elk punt $P(x,y)$ van de kromme zijn de afstanden tot de x-as langs de normaal en langs de raaklijn gelijk.
b3. Bepaal de integraalkrommen van de differentiaalvergelijking

$$yy'' - y'^2 + y' = 0$$

die door $(0,0)$ gaan en die daar kromtestraal $\sqrt{2}$ hebben.
c1. Bepaal de vlakke krommen met de volgende eigenschap: voor elk punt P van de kromme is de afstand van de oorsprong tot de raaklijn in P gelijk aan de afstand van de oorsprong tot de normaal in P.
c2. Bepaal de vlakke krommen met de volgende eigenschap: de som van de lengtes van de segementen die raaklijn afsnijdt op de x-as en de y-as is gelijk aan de constante $2a$.
c3. Bepaal de integraalkrommen van de differentiaalvergelijking

$$(1-x^2)y'' - xy' + y = 0$$

die door $(0,1)$ gaan en daar kromtestraal $2\sqrt{2}$ hebben.

Reeks 13 Differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten

De homogene vergelijking

Oefening 13.1 Bepaal de algemene integraal van de volgende homogene lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten:

a. $y^{(4)} + 4y = 0$

b. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

c. $y^{(6)} + m^2 y^{(4)} - m^4 y'' - m^6 y = 0 \quad (m \neq 0)$

De volledige vergelijking met bijzonder rechterlid

Oefening 13.2 Bepaal de algemene integraal van de volgende lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten:

a1. $y'' - 5y' + 6y = (x^2 + 3x + 2)e^{3x}$

a2. $y'' + y = 8\cos x \cos 2x$

b1. $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$

b2. $y'' - y' = 4xe^x$

c1. $y'' + y = 8\cos x \cos 2x$

c2. $y'' - 4y = e^{2x} \sin 2x$

De volledige vergelijking met algemeen rechterlid

Beschouw de differentiaalvergelijking

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$$

waarbij f een willekeurige functie is. De oplossing van de homogene vergelijking is van de vorm

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

Om een particuliere oplossing van de volledige vergelijking te zoeken, passen we de methode van de variatie van de constante toe: we proberen

$$y_p = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2$$

we substitueren in de differentiaalvergelijking:

$$\begin{aligned} a_2(c_1 y_1 + c_2 y_2) + a_1(c_1' y_1 + c_2' y_2) + a_1(c_1 y_1' + c_2 y_2') \\ + \quad (c_1' y_1 + c_2' y_2)' + (c_1' y_1' + c_2' y_2') + (c_1 y_1'' + c_2 y_2'') = f(x) \end{aligned}$$

of, omdat y_1 en y_2 oplossingen zijn van de homogene vergelijking:

$$a_1(c_1' y_1 + c_2' y_2) + (c_1' y_1 + c_2' y_2)' + (c_1' y_1' + c_2' y_2') = f(x)$$

Hieraan is voldaan als

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x) \end{cases}$$

Dit is een lineair stelsel in c_1' en c_2'. Oplossing hiervan levert c_1' en c_2', en, na integratie, c_1 en c_2.

Voorbeeld

$$y'' + y = \sec x$$

De oplossing van de homogene vergelijking is

$$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

en we zoeken een particuliere integraal van de vorm

$$y_p = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x$$

c_1' en c_2' zijn oplossingen van het stelsel

$$\begin{cases} c_1'\cos x + c_2'\sin x = 0 \\ -c_1'\sin x + c_2'\cos x = \sec x \end{cases}$$

De determinant van dit stelsel is 1, en met de regel van Cramer vinden we

$$c_1' = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \sec x & \cos x \end{vmatrix} = -\mathrm{tg}\, x \quad \text{en} \quad c_2' = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \sec x \end{vmatrix} = 1$$

en, na integratie,

$$c_1 = -\int \mathrm{tg}\, x \mathrm{d}x = \ln|\cos x| + k_1$$

$$c_2 = x + k_2$$

en, tenslotte

$$y_p = \cos x \ln|\cos x| + x\sin x$$

$$y = \cos x \ln|\cos x| + x\sin x + c_1\cos x + c_2\sin x$$

Oefening 13.3 Bepaal de algemene integraal van de volgende lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten:

a. $y'' - 3y' + 2y = \sin e^{-x}$

b. $y'' + y = \mathrm{tg}\, x$

c. $y'' - y = e^{2x}/(e^{2x} + 1)$

De vergelijking van Euler

Dit is een differentiaalvergelijking van de vorm

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(ax+b)y' + a_0 y = f(x)$$

De substitutie $u = \ln|ax+b|$ herleidt deze tot een differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten.

Oefening 13.4 Bepaal de algemene integraal van de volgende differentiaalvergelijking:

a. $(2x+1)^2y'' + (4x+2)y' - 4y = x^2$

b. $x^2y'' - xy' + y = x\ln|x|$

c. $x^3y''' + 6x^2y'' + 7xy' + y = \frac{1}{x} + \ln x^2$

Stelsels differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten

Oefening 13.5 Bepaal de algemene integraal van volgende differentiaalstelsels met behulp van de methode van afleiding en eliminatie.

a1. $\begin{cases} y' = 4y + 2z \\ z' = 2y + z \end{cases}$

a2. $\begin{cases} x' - x + y' = 2t + 1 \\ 2x' + x + 2y' = t \end{cases}$

b1. $\begin{cases} y' = y + 2z \\ z' = -y + 4z \end{cases}$

b2. $\begin{cases} y' - y - 2z = e^x \\ z' + y - 4z = -2 \end{cases}$

c1. $\begin{cases} y' = 7y + 6z \\ z' = 2y + 6z \end{cases}$

c2. $\begin{cases} x' + y' + 2x + y = t \\ y' + 5x + 3y = t^2 \end{cases}$

Oefening 13.6 Bepaal de algemene integraal van volgende differentiaalstelsels met behulp van de methode der eigenwaarden en eigenvectoren.

a. $\begin{cases} x' = 3x - 6y - 2z \\ y' = x - 4y - 2z \\ z' = -2x + 6y + 3z \end{cases}$

b. $\begin{cases} x' = 2y + z \\ y' = x + y - z \\ z' = -4x + 4y + 5z \end{cases}$

c. $\begin{cases} x' = 2x - 2y - 2z \\ y' = -2x + 5y - z \\ z' = -2x - y + 5z \end{cases}$

Reeks 14 Oplossen van differentiaalvergelijkingen door reeksontwikkeling

Oplossing in een omgeving van een gewoon punt

Oefening 14.1 Bepaal, door middel van reeksontwikkeling, de algemene integraal in een omgeving van $x = 0$ van de volgende differentiaalvergelijkingen. Schrijf de recursiebetrekking, en de eerste drie van nul verschillende termen van twee lineair onafhankelijke oplossingen. Schrijf indien mogelijk de algemene term van de reeks, en bepaal tevens het convergentiegebied.

a. $4(1-x^2)y'' - 8xy' + 3y = 0$

b. $(1-x^2)y'' - xy' + y = 0$

c. $y'' - (x - 15x^2)y' - (1 - 3x^3)y = 0$

Oplossing in een omgeving van een regelmatig singulier punt

Oefening 14.2
Bepaal, door middel van een reeksontwikkeling, twee lineair onafhankelijke oplossingen in een omgeving van $x = 0$ van de volgende differentiaalvergelijkingen. Schrijf, indien mogelijk, de algemene term van de reeks. Bepaal ook het convergentiegebied.

a. $2x^2y'' + (x^2 - x)y' + y = 0$

b. $4xy'' + 2(1-x)y' - y = 0$

c. $(3x^2 + 3x^3)y'' - (x + 6x^2)y' + y = 0$

Oplossing in een omgeving van oneindig

Men zegt dat de differentiaalvergelijking

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

waarbij $a_0(x), a_1(x)$ en $a_2(x)$ veeltermen zijn, een **regelmatig singulier punt op oneindig** heeft, als de substitutie $t = 1/x$ leidt tot een differentiaalvergelijking met een regelmatig singulier punt in $t = 0$.

Oefening 14.3 Toon aan dat de volgende differentiaalvergelijking een regelmatig singulier punt op oneindig heeft en bepaal de algemene integraal (met reeksontwikkeling) voor grote waarden van $| x |$.

a. $2x^3y'' + (2x + x^2)y' + 2y = 0$

b. $x^4y'' - y = 0$

c. $x^3y'' + x(1 - x)y' + y = 0$

15 Inleiding tot MATLAB

In deze tekst wordt kort uitgelegd hoe je in MATLAB werkt. Eens vertrouwd met de basis, is het de bedoeling autonoom met het pakket aan de slag te kunnen, de helpfile is daartoe voldoende uitgebreid en verhelderend: Maak er gebruik van!
Voor wie meer informatie wil, bulkt het internet van de FAQ's, manuals en nieuwsgroepen terzake. Een goede start is bijvoorbeeld 'MATLAB Primer', te vinden op de website van de vakgroep wwwir.vub.ac.be/wisk.

15.1 De kracht van MATLAB

Je kan je afvragen waarom wordt gekozen voor het pakket MATLAB, en bijvoorbeeld niet voor MAPLE. Dit is omdat er een erg groot conceptueel verschil tussen beide pakketten is:
MAPLE is symbolisch erg sterk, het is ontworpen om exacte oplossingen te geven, $\sqrt{2}$ in plaats van $1,4142135623$. MATLAB daarentegen presteert symbolisch eerder slecht, maar het heeft alles in huis om numerieke berekeningen te maken.
Een tweede punt is dat MAT- in MATLAB *niet* staat voor mathematisch, maar voor matrix: MATLAB is MATRIX LABORATORY. De meest uiteenlopende matrixbewerkingen zijn uitermate efficiënt te programmeren binnen dit pakket. Hierbij kan je 'matrixbewerking' nauwelijks te ruim nemen: vectoren, lijsten van vectoren, punten van een grafiek, ... deze kunnen allemaal binnen MATLAB gemanipuleerd worden als waren het matrices.

15.2 De MATLAB windows

MATLAB kent een aantal verschillende vensters. De belangrijkste hiervan, die je reeds terug vindt bij het opstarten van MATLAB, zijn

- Command Window : In dit venster bevindt zich de *Commandline* (aangegeven door '>>') waar je MATLAB-commando's kan invoeren. Ook de output van een commando wordt hier onmiddellijk getoond.
- Command History : In dit venster worden alle ingevoerde commando's opgeslagen.
- Workspace : Hier kan je zien welke variabelen er in gebruik zijn, van welk type ze zijn (boolean, getal, vector, matrix) en wat hun waarde op dat moment is.
- Current Directory

Tijdens het werken met MATLAB zullen we nog enkele andere vensters tegenkomen

- Figure : Dit venster wordt geopend om geplotte grafieken te tonen.
- M-file Editor : Dit is een eenvoudige editor waarin we programma's en functies kunnen typen.

15.3 Het invoeren van commando's

Eén van de belangrijkste aspecten van MATLAB is dat het steeds in matrices rekent. Dit houdt ondermeer in dat alle variabelen als matrices worden beschouwd en je als gebruiker ook op die manier moet leren denken. Getallen worden beschouwd als 1×1-matrices, vectoren als $1 \times n$ (of $n \times 1$) matrices.

Ook veeltermen worden in MATLAB aan de hand van matrices gemanipuleerd. Een rijmatrix $[a_1\, a_2 \cdots a_{n-1}\, a_n]$ wordt dan gezien als de veelterm $p(x) = a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$.

Om een variabele te (her)definiëren, dient men *eerst* de naam van de variabele te typen, gevolgd door een gelijkheidsteken en de waarde die men aan deze variabele wil toekennen. De naam die aan een variabele gegeven wordt, mag een combinatie van letters en cijfers zijn, maar moet steeds beginnen met een letter.

Voorbeeld

```
>> x=2
x =

         2

>> v=[1 2 3]
v =

         1     2     3

>> A=[1,2;3,4]
A =

         1     2
         3     4
```

Normaal geeft MATLAB na elk commando het resultaat daarvan weer op het scherm. Indien men echter zo'n commando eindigt met een kommapunt ('`;`') wordt het commando wel uitgevoerd, maar krijgt men geen resultaat op het scherm. Dit is handig in (lange) berekening waarbij men niet geïnteresseerd is in tussentijdse uitkomsten. Door gebruik van de kommapunt zal het programma ook minder tijd in beslag nemen.

Een ander handig hulpmiddel is de dubbelepunt. Het wordt gebruikt indien men aan een variabele opeenvolgende waarden wil geven. '`:`' heeft dus de betekenis "van ... tot ...". Zoals gezegd zijn alle variabelen in MATLAB matrices, dit is in dit geval ook zo. Meer precies genereert een commando als

```
t=0:3
```

een rijmatrix `t=[0 1 2 3]`. Zoals uit het voorbeeld duidelijk is, is het verschil tussen opeenvolgende waarden standaard gelijk aan 1. Indien men dit wil wijzigen gebruikt men '`:s:`' in plaats van '`:`', waarbij `s` de grootte van de tussenliggende stap is.

Voorbeeld

```
>> t=0:0.2:1
t =

       0      0.2     0.4     0.6     0.8     1

>> t=4:-1:1
t =

       4      3      2      1
```

Dit soort commando's zijn heel handig voor het manipuleren van deelmatrices en bij het gebruik van lussen (zie sectie 15.6).

Te lange commando's kan men over meerdere lijnen spreiden door op het einde van een lijn drie punten (`...`) te plaatsen, waarna men op de volgende lijn verdergaat.

Het commando `clc` maakt het commandoscherm leeg en het commando `clear` verwijdert alle variabelen uit het werkgeheugen.

Indien men in het commandoscherm een fout commando opgaf of men wil een vroeger commando (eventueel in licht gewijzigde vorm) opnieuw uitvoeren, dan kan men dit commando opnieuw oproepen door een aantal keer op de pijltjestoets ↑ te drukken, waarna men de wijzigingen kan aanbrengen. Oude commando's kunnen ook uit de Command History worden opgeroepen door ze te dubbelklikken.

15.4 Het laden van `.m`-files in MATLAB

Een van de sterke punten van MATLAB is de mogelijkheid om programmaatjes op te slaan in een apart bestand (de zogenaamde `.m`-files). Deze kunnen dan op eender welke schijf worden geplaatst, en binnen MATLAB gebruikt.

- Nieuwe .m-files die je wil gebruiken, of .m-files die je zelf maakt, plaats je best in dezelfde map. Hiervoor maak je best een nieuwe map aan, b.v. `'C:\MATLAB'`
- Vervolgens voeg je MATLAB-directory toe aan het 'path', dit is de lijst van alle locaties op de computer waar MATLAB naar `.m`-files gaat zoeken. Typ hiertoe volgende opdracht: `path(path,'C:\MATLAB')`
- In de PC-klas zal je dit *elke keer* dat je MATLAB opstart moeten doen, op je eigen PC kan je de map permanent aan het path toevoegen:
  File > Set Path > Add Folder > `C:\MATLAB` > OK > Close > Yes.

Eenmaal het path juist is ingesteld, kan je een `.m`-file aan de commandline oproepen door gewoon de naam te typen, *zonder* de `.m`-extensie.

15.5 Het creëren van `.m`-files

15.5.1 Maken en plaatsen van `.m`-files

Vergeet eerst en vooral niet de *Current Directory* in te stellen (zie sectie 15.4). Zoals reeds gezegd gaan we daar alle `.m`-files opslaan, zodat we ze rechtstreeks kunnen aanroepen vanuit het *Command Window*.
We kunnen `.m`-files op verschillende manieren maken. De meest courante is ze uit te typen in een gewone editor. De specifieke MATLAB-editor is hiervoor aangewezen:

Start > Programs > MATLAB 7.0 > M-file Editor
Een andere mogelijkheid is de commando's één na één in te voeren in het Command Window zelf, en wanneer een juist werkende reeks commando's is gevonden, de overeenkomstige regels in de *Command History* te selecteren (met `Shift` en `Ctrl`) en na rechtermuisklikken `Create M-File` te selecteren.

15.5.2 Syntaxis van .m-files

De meest eenvoudige programma's bestaan enkel uit een opeenvolging van commando's (eventueel met voorzien van voorwaardelijke commando's of lussen, zie sectie 15.6). Indien men zo'n `.m`-file oproept door de naam van deze `.m`-file aan de commandline in te typen, zal MATLAB de verschillende commando's uit het programma in dezelfde volgorde uitvoeren.
Let wel op, alle variabelen uit het programma zijn in dit geval 'locaal gedefinieerd'. D.w.z. dat indien bijvoorbeeld een programma `test.m` gebruik maakt van een variabele `x` (het bevat bijvoorbeeld de lijn `'x = 2'`) en in het command window werd reeds een waarde aan een variabele met de naam `x` gegeven (bijvoorbeeld `'x = 1'`), dan zal MATLAB beide variabelen toch als verschillend beschouwen. Dit impliceert dat het uitvoeren van het programma geen invloed zal hebben op de waarde van de variabele `x` in het Command Window (na het uitvoeren van het programma zal de waarde van `x` nog steeds 1 zijn.)

Indien met een programma wel wil ingrijpen in de waarde van de variabelen uit de command window, moet je gebruik maken van een iets geavanceerder soort programma's, namelijk *functies*. Bij dit soort programma's kan je een aantal MATLAB-variabelen (booleans, getallen, vectoren, of algemeen matrices) inlezen, en een aantal andere als uitkomst teruggeven.
Elke functie start met

```
function [a,b,...] = naam(x,y,...)
```

waarbij

- `a`, `b`, ..., de te berekenen functiewaarden zijn, dit kunnen zowel booleans, getallen, vectoren en dus in het algemeen matrices zijn;
- `x`, `y`, ..., de op te geven variabelen zijn, dit mogen opnieuw booleans, getallen, vectoren of matrices zijn;
- `naam` de naam van de functie is. Het is aangewezen de functie steeds op te slaan onder dezelfde naam deze die gekozen is voor de functie zelf, dus in dit geval onder '`naam.m`'.

Nu kan de functie worden aangeroepen in MATLAB met de naam die meegegeven werd aan de `.m`-file. De op te geven variabelen worden tussen haakjes en gescheiden met komma's meegegeven.

```
>>[a,b,c] = naam(x,y,z) of kortweg
>>naam(x,y,z)
```

In het tweede geval wordt de output niet opgeslagen in een globale variabele.

MATLAB kent geen syntax voor het beëindigen van een programma of functie.

Het is vaak handig om een programma van wat extra commentaar te voorzien, zoals waarvoor het programma dient of wanneer het gemaakt is. Dit kan door een regel te beginnen met een procentteken '%'. Alles wat op een regel op een procentteken volgt, wordt bij het uitvoeren van het programma door MATLAB genegeerd.

Voorbeeld

```
function [y] = dubbel(x)    % Deze functie verdubbelt
y=2*x;                      % de waarde van een getal
```

In MATLAB geeft dit

```
>> dubbel(2)

ans =
        4
```

De kommapunt achter het commando onderdrukt de output van de toekenning `y=2*x`, je ziet enkel de output van `dubbel(2)`. Je kan van deze kommapunten gebruik maken indien je bepaalde delen van je programma wenst te debuggen.

15.6 Lussen

Bij het programmeren is het vaak van belang om voorwaardelijke commando's te kunnen opgeven. In MATLAB zijn hiervoor enkele mogelijkheden voorzien zoals men die vindt in de meeste computertalen.

15.6.1 FOR-LUS

Een opeenvolging van bevelen wordt een *vast aantal* keer uitgevoerd.

for <teller> = <rij>
    <bevelen> (;)
end

Voorbeeld

```
for i=1:n
x(i)=0;
end
```

Dit maakt de eerste *n* elementen van de vector `x` nul.

15.6.2 WHILE-LUS

Een opeenvolging van bevelen wordt steeds opnieuw uitgevoerd, *zolang* aan een bepaalde voorwaarde wordt voldaan.

```
while <voorwaarde>
      <bevelen> (;)
end
```

Voorbeeld

We bepalen het grootste getal n waarvoor $n!$ kleiner is dan 10^{100}.

```
n=1
while prod(1:n)<1 e 100
n=n+1;
end
n-1
```

15.6.3 IF-LUS

Een opeenvolging van bevelen wordt enkel (*eenmalig*) uitgevoerd als aan de voorwaarde wordt voldaan, zoniet worden eventueel andere bevelen uitgevoerd.

```
if       <voorwaarde>
         <bevelen> (;)
elseif   <voorwaarde>
         <andere bevelen> (;)
else
         <andere bevelen> (;)
end
```

Voorbeeld

We bepalen $n!$ voor een opgegeven getal n.

```
n=input('Van welk getal wil je de faculteit bepalen')
if n<0
error('Niet gedefinieerd voor negatieve getallen')
break
elseif n==0
fac=1
else
fac=prod(1:n)
end
```

Opmerking : 'break' in bovenstaand voorbeeld zorgt ervoor dat men onmiddellijk uit de lus stapt.

15.7 Grafieken

Om een grafiek te tekenen met MATLAB dien je de functie uit te rekenen in een groot aantal waarden en deze tegen elkaar uit te zetten. Het commando `plot(x,y)`, waarbij `x` en `y` vectoren zijn met dezelfde lengte, zorgt ervoor dat MATLAB de punten (x_i, y_i) uitzet en in volgorde met elkaar verbindt, waarbij x_i de i-de coördinaat is van de vector `x` en y_i de i-de coördinaat van de vector `y`. De grafiek verschijnt in een nieuw venster : *Figure*.

Voorbeeld

We tekenen de grafiek voor de functie $y = x^2$ op het interval $[-1, 1]$.

`>>x=linspace(-1,1,100)`	Dit maakt een fijne onderverdeling van een interval $[-1, 1]$.
`>>y=x.^2`	De functiewaarden in de respectievelijke punten worden berekend.
`>>plot(x,y)`	De functie wordt geplot, het resultaat verschijnt in het Figure-venster.

De puntbewerkingen zijn hier vaak heel nuttig.

Indien men het commando `plot` nogmaals uitvoert, wordt de nieuwe grafiek in hetzelfde venster geplot en wordt de vorige grafiek gewist. MATLAB voorziet echter twee manieren om vroegere tekeningen te behouden. De eerste methode bestaat erin het commando `figure` uit te voeren voor men een tweede grafiek plot. Dit zorgt ervoor dat de volgende tekening in een *ander venster* wordt getekend. Bij de tweede methode gebruikt men de commando's `hold on` en `hold off`. Alles wat na het commando `hold on` en voor `hold off` wordt geplot, wordt bovenop de op dat moment opstaande grafiek getekent.

15.8 overzicht van de belangrijkste MATLAB commando's

BASISHANDELINGEN

>Help>MATLAB Help	gebruiksvriendelijke helpfiles met voorbeelden en tutorials
help	geeft een lijst met de topics
help <topic>	geeft de commando's per topic
help <commando>	legt het gebruik van het commando in detail uit
clc	wist alle info op het scherm
clear	verwijdert variabelen uit het geheugen
clear <variabele>	verwijdert een specifieke variabele uit het geheugen
who	geeft een lijst van de gebruikte variabelen
del, backspace, $\rightarrow$, $\leftarrow$	navigeren binnen het commando
$\uparrow$, $\downarrow$	selecteren van een eerder gebruikt commando
[ctrl + c]	berekening onderbreken

INVOER

+ − * / ^	basisbewerkingen tussen getallen
<variabele> = <getal>	toekenning
pi	π
eps	machinenauwkeurigheid
realmin	kleinste positief reëel getal dat het programma kan gebruiken
realmax	grootste positief reëel getal dat het programma kan gebuiken
inf	∞
i, j	imaginaire eenheid, $i^2 = -1 = j^2$

UITVOER

<commando>;	uitvoer onderdrukken
ans	laatste niet toegekende uitkomst
NaN	geen geldig getal als uitvoer
format	pas het formaat van de uitvoer aan (aantal b.c.)

MATRICES INVOEREN

$A = [a_{11}, \ldots, a_{1m}; a_{n1}, \ldots, a_{nm}]$	invoer van een $n \times m$ matrix (het is mogelijk spaties te gebruiken in plaats van komma's en nieuwe lijnen te beginnen in plaats van de kommapunten)

$v = [v_1\, v_2\, \ldots\, v_n]$	invoer van een n-dimensionale rijvector
$w = [v_1; v_2; \ldots; v_n]$	invoer van een n-dimensionale kolomvector

MATRIXBEWERKINGEN

$v = w'$	transponeren van een matrix
$+ \quad - \quad .^* \quad ./ \quad .\hat{}$	elementsgewijze bewerkingen tussen matrices
$A\, {}^*B$	matrixvermenigvuldiging
$A/B = A\, {}^*B^{-1}$	matrixvermenigvuldiging met de inverse

SELECTIES BINNEN MATRICES

$A(i, j)$	selecteert het element op positie i, j binnen de matrix
$A(i_1 : i_2, j)$	… de elementen op rijen i_1 t.e.m. i_2, in kolom j
$A(i_1 : s : i_2, j)$	… de elementen in kolom j van rijen i_1 t.e.m. i_2, om de s stappen
$A(:, j)$	… alle elementen binnen kolom j

MATRICES GENEREREN

`eye(`n`)`	genereert de eenheidsmatrix van dimensie n
`zeros(`n`)`	… de matrix van dimensie n met enkel nullen
`ones(`n`)`	… de matrix van dimensie n met enkel enen
`rand(`m,n`)`	… een $m \times n$ matrix met willekeurige elementen tussen 0 en 1
`diag(`v`)`	… een diagonaalmatrix met de componenten van v
`diag(`A`)`	… een vector met als componenten de diagonaalelementen van A
$v_1 : s : v_2$	… een vector met getallen van v_1 tot v_2 en stapgrootte s
`linspace(`v_1`,`v_2`,`n`)`	… een vector met n equidistante getallen tussen v_1 en v_2

FUNCTIES

`help elfun, help specfun`	overzicht van de meest courante functies op getallen
`help elmat, help matfun`	overzicht van de functies op vectoren en matrices

VEELTERMEN

$p = [a_1\, a_2\, \ldots\, a_{n-1}\, a_n]$	de veelterm $p(x) = a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$

`conv(`p`,`q`)`	veeltermvermenigvuldiging
$[q,r]$`=deconv(`p`,`q`)`	Euclidische deling van veeltermen, met q en r als quotiënt en rest
`polyder(`p`)`	afleiden van een veelterm
`polyval(`p`,`x`)`	berekenen van p voor het getal x
	BEWERKINGEN MET BOOLEANS
$<$ $<=$ $>$ $>=$ $==$ $\sim=$	relationele bewerkingen
& $\mid$ $\sim$	logische bewerkingen *en, of, niet*
	GRAFIEKEN
`plot(x,y)`	maakt een tekening bestaande uit alle punten (x_i, y_i)
`plot(x,y,'r*.')`	plot een grafiek in rode kleur (‘`r`’), waar de punten (x_i, y_i) aangeduid worden met een $\star$ en verbonden worden door een stippellijn (‘`.`’)
`plot3(x,y,z)`	maakt een tekening bestaande uit alle punten (x_i, y_i, z_i)
`title('tekst')`	zet een titel bij een grafiek
`xlabel('tekst')`	geeft een naam aan de x-as
`ylabel('tekst')`	geeft een naam aan de y-as
`grid`	maakt schaallijnen op de tekening
`figure`	opent nieuw figuurvenster voor grafieken
`hold on`, `hold off`	om verschillende figuren boven elkaar te plotten

16 Voorbeelden van MATLAB programma’s

Voorbeeldprogramma 01

```
% INLEIDING MATLAB
% Voorbeeldprogramma 01

% Definitie, oproep en wijziging van getal-variabelen.
% Onderdrukken van output.
% Commentaar in code

clear;
clc;

x = 7
x
x = 1
x
y = 4 - i;
```

```
y;
y
x = y
x
z
```

Voorbeeldprogramma 02

```
% INLEIDING MATLAB
% Voorbeeldprogramma 02

% Elementaire rekenoperaties op getal-variabelen.
% Volgorde van rekenoperaties en gebruik van haakjes.
% Wiskundige functies op getalvariabelen.
% Veranderen output-formaat getallen.

clear;
clc;

a = -8;
b = 4;
c = 3;

d = a/3+b-2*c^2
d = a/3+(b-2)*c^2

sqrt(16)
exp(1)
log10(100)
sin(pi)
conj(3 + 5i)
abs(4 - 5j)

format short; d
format long; d
format short e; d
format long e; d
```

Voorbeeldprogramma 03

```
% INLEIDING MATLAB
% Voorbeeldprogramma 03
```

```
% Definitie, oproep en wijziging van matrix-variabelen.
% Oproep en wijziging van matrix-elementen.


clear;
clc;

A = [1 2
3 4];

A

A = [11 12 13; 21 22 23];
A

C(1,1) = 11
C(1,2) = 12
C(2,1) = 21
C(2,2) = 22
C

A(1,3)

A(2,2) = 9;
A

C(2,4)
```

Voorbeeldprogramma 04

```
% INLEIDING MATLAB
% Voorbeeldprogramma 04

% Definitie van speciale matrix-variabelen.
% Selectie van deelmatrices.
% Transponeren van matrices.

clear; clc;

ones(2)
ones(2,3)

zeros(3)
```

```
zeros(3,2)

eye(2)
eye(2,4)

rand(3)
rand(1,3)

randn(2)
randn(3,1)

vect1 = 1:6
vect2 = 1:2:6
vect3 = 6:-3:-10
vect4 = 0:0.1:1

A = vect2'*vect3

A(:,4)
A(2,:)
A(1:3,2:4)

a = 1:3; b = 2:4;
A(a,b)
A([1 5],[1 3 4])
```

Voorbeeldprogramma 05

```
% INLEIDING MATLAB
% Voorbeeldprogramma 05

% Elementaire rekenoperaties op matrix-variabelen.
% Elementaire rekenoperaties op matrix- en getalvariabelen.

clear; clc;

A = [1 2 3; 4 5 6];
B = [-1 0 1; 3 3 2; 1 -4 0];
C = [-5 7 -1; 2 6 -2];
D = [1 2 3; -4 0 0; 0 3 -3];
a = 3;

A + C
```

```
C - A
A * B

A + 3
-2 * C
B / a

B/A
B*inv(A)

A\B
A^(-1)*B

flops(0);
B/A;
flops

flops(0);
B*inv(A);
flops

sqrt(A), cosh(B), abs(C)
```

Voorbeeldprogramma 06

```
% INLEIDING MATLAB
% Voorbeeldprogramma 06

% Puntsgewijze rekenoperaties op matrix-variabelen.
% Puntsgewijze rekenoperaties op matrix- en getalvariabelen.
% Matrix functies

clear;
clc;

A = [2 5; -7 3];
B = [1 2; 2 4];
c = [1 2 3];
d = [1 0 2];

A*B
A.*B
```

```
A/B
A./B

A.^B
B.^3
3.^B

size(A)
a = size(A)
[r,k] = size(B)

length(c)
length(c')

det(A)
rank(B)

dot(c,d)
cross(c,d)
```

Voorbeeldprogramma 07

```
% INLEIDING MATLAB
% Voorbeeldprogramma 07

% Booleans.
% Relationele en logische operatoren.

clear;
clc;

a = 1;
b = 2;

A = [1 2; 3 4];
B = [1 3; 2 4];

a < b
a > b
A == B
(A > 1) & (A <= 3)
(A ~= B) | ~(B <= 2)
```

Voorbeeldprogramma 08

```
% INLEIDING MATLAB
% Voorbeeldprogramma 08

% If conditional.

clear;
clc;

x = 0

if (x < 1)
  x = x + 1
end

if (x < 1)
  x = x + 1
else
  x = 4*x
end

if (x < 1)
  x = x + 1;
elseif (x > 2)
  x = 0;
end

if (x < 1)
  x = x + 1;
else
  if (x > 2)
    x = 0;
  end
end

x
```

Voorbeeldprogramma 09

```
% INLEIDING MATLAB
% Voorbeeldprogramma 09
```

```
% For loop.

clear;
clc;

for index = 1:3
  index^2
end

for index = 1:4:10
  index^2
end

x = 1:3:10;
A = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9];

x
for v = x
  v
end

A
for v = A
  v
end

a = 2;
x(1) = 0; x(2) = a;

for k = 2:25
  x(k+1) = (x(k)*(x(k-1)^2 - a) - x(k-1)*(x(k)^2 - a))...
           ((x(k-1)^2 - a) - (x(k)^2 - a));
end

x
```

Voorbeeldprogramma10

```
% INLEIDING MATLAB
% Voorbeeldprogramma 10

% Loops : while-loop
```

```
clear;
clc;

format long;

e = exp(1); approx = 0; counter = 0;

while (abs(approx - e) > 1e-8)
  approx = approx +...
           1/fac(counter);
  counter = counter + 1;
end

e, approx, counter

macheps = 1;

while (1 + macheps > 1), macheps = macheps/2; end
macheps = macheps*2

eps, realmax, realmin
```

Voorbeeldprogramma 11

```
% INLEIDING MATLAB
% Voorbeeldprogramma 11

% Definitie en oproep van functies.
% Meerdere variabelen als input en output.

clear;
clc;

A = [1 2; 3 4];

a = double(1)
a = double(a)
double(A)
B = double(double(A))

quadratic(1,0,-4)
a = quadratic(1,2,1)
a = quadratic(1,0,4)
```

```
[a,b] = quadratic(1,0,1)

***

% INLEIDING MATLAB
% Voorbeeldfunctie double

% Deze functie berekent het dubbele van het argument.

function res = double(par)

res = par + par;

***

% INLEIDING MATLAB
% Voorbeeldfunctie quadratic

% Deze functie berekent de (twee) wortels van een quadratische vgl.,
% als de coefficienten als argument worden meegegeven.

function [root1,root2] = quadratic(a,b,c)

d = b^2 - 4*a*c;

root1 = (-b + sqrt(d))/(2*a);
root2 = (-b - sqrt(d))/(2*a);
```

Voorbeeldprogramma 12

```
% INLEIDING MATLAB
% Voorbeeldprogramma 12

% Recursieve definitie van functies.
% De ene implementatie is de andere niet!

clear;
clc;

fac(0)
fac(6)
fac(10)
```

```
flops(0)
tic
fibrec(5)
toc
flops

flops(0)
tic
fibit(5)
toc
flops

flops(0)
tic
fibrec(25)
toc
flops

flops(0)
tic
fibit(25)
toc
flops

***

% INLEIDING MATLAB
% Voorbeeldfunctie fac

% Deze functie berekent de faculteit van het argument,
% op een recursieve manier.

function res = fac(n)

if (n == 0)
  res = 1;
else
  res = n*fac(n-1);
end

***

% INLEIDING MATLAB
% Voorbeeldfunctie fibrec
```

```
% Deze functie berekent het fibonacci-getal van het argument.

function res = fibrec(n)

if ((n ==0) | (n == 1))
  res = 1;
else
  res = fibrec(n-1) + fibrec(n-2);
end

***

% INLEIDING MATLAB
% Voorbeeldfunctie fibit

% Deze functie start de (iteratieve) berekening van het
% fibonacci-getal op.

function res = fibit(n)

res = fibitaux(n,1,0);

***

% INLEIDING MATLAB
% Voorbeeldfunctie fibitaux

% Deze functie is een hulpfunctie van fibit.
% Ze voert de feitelijke berekeningen uit.

function res = fibitaux(n, curr, prev)

if (n == 0)
  res = curr;
else
  res = fibitaux(n-1, curr + prev, curr);
end
```

Reeks 17 Oefeningen Matlab 1

Oefening 17.1 Wis alle variabelen die we tijdens de les gebruikt hebben.

Oefening 17.2 • Bereken de inverse matrix B van A; verifieer dat $A.A^{-1} = I$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Bereken het kwadraat van B en noem dit resultaat C.
- Bekom E door de getransponeerde van C elementsgewijs met D te vermenigvuldigen:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 7 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

- Creëer de vector f (gebruik een commando):

$$f = \begin{bmatrix} 8 & 14 & 20 \end{bmatrix}$$

- Creëer de matrix G met behulp van de matrix D, de vector f en commando's

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 14 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 & 20 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bereken de determinant h van G.

Oefening 17.3 • Schrijf de functie `myabs(x)` die de absolute waarde van x berekent.

- Schrijf de functie `mysign(x)` dat het teken van x weergeeft.
- Schrijf een functie `mypower(a,n)` die a^n berekent met n een natuurlijk getal.

Oefening 17.4 Schrijf de functie van Ackerman

$$Ack(x,y) = \begin{cases} 0 & y = 0 \\ 2y & x = 0 \\ 2 & y = 1 \\ Ack((x-1), Ack(x, y-1)) & \text{anders} \end{cases}$$

Oefening 17.5 Schrijf een functie `schrikkel(n)` die als resultaat een 1 geeft als n een schrikkeljaar is, en 0 indien niet. Schrikkeljaren zijn jaren waarvan de jaartallen deelbaar zijn door 4, maar niet deelbaar door 100, tenzij het jaartal deelbaar is door 400, in welk geval het toch een schrikkeljaar is.

Oefening 17.6 Schrijf een functie `sol(x,y,z)` die als resultaat de som van de twee grootste getallen geeft.

Oefening 17.7 Schrijf een functie `geslaagd(a,m,s)` die als resultaat een 1 geeft als de student, die als punten a, m en s heeft behaald, een gemiddelde hoger of gelijk aan 11.6 op 20 heeft, en een 0 anders. a, m en s zijn cijfers op 20. De berekening van het gemiddelde is als volgt: elk cijfer hoger of gelijk aan 10 heeft gewicht 1, elk cijfer onder de 10 heeft gewicht 2. Een cijfer onder de 10 weegt dus dubbel zo zwaar als een cijfer hoger of gelijk aan 10.

Reeks 18 Oefeningen Matlab 2

Oefening 18.1 Schrijf een functie `curt(x)` die de derdemachtswortel berekent door gebruik te maken van het algoritme van Newton om een nulpunt van een vergelijking $f(x) = 0$ te benaderen. Dit algoritme is

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Oefening 18.2

Schrijf een functie `int(N)` die $\int_0^1 e^{x^2} dx$ benadert met een linkersom met N stappen, i.e.

$$I = h(f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{N-1})).$$

Oefening 18.3 Schrijf een functie `isin(M,x)` die als resultaat een 1 geeft als minstens één van de elementen van M gelijk is aan x, en 0 indien dit niet zo is.

Oefening 18.4

- Schrijf een functie `maxi(rij)` die het maximum zoekt in een gegeven rijmatrix.
- Schrijf een functie `posmaxi(rij)` die de index van het maximum zoekt in een gegeven rijmatrix.
- Schrijf een functie `posmaxifrom(rij)` die de index van het maximum vanaf een gegeven index zoekt in een gegeven rijmatrix.
- Schrijf een functie `Selectionsort(rij)`.
- Schrijf de functie `Bubblesort(rij)`.

Oefening 18.5 Schrijf een functie `multifib(M,k)`, waarbij M een $n \times 2$ matrix is en k een natuurlijk getal, die als resultaat een $n \times (2+k)$ matrix geeft waarbij elke rij een Fibonacci rij is. Een Fibonacci rij is een rij getallen waar elk element de som van de twee voorgaande is.

Oefening 18.6 Schrijf een functie `merge(rij1,rij2)` die 2 rijen samenvoegt, waarbij de elementen van de ene rij afgewisseld worden met elementen van de andere rij. We beginnen met een element van de eerste rij en als een rij ’opgebruikt’ is, vullen we aan met de resterende elementen uit de andere rij.

Oefening 18.7 Schrijf een functie `splitt(rij)` die als resultaat twee rijen geeft, waarbij de eerste rij alle elementen op oneven positie bevat, en de andere rij alle elementen op even positie.

Reeks 19 Oefeningen Matlab 3

Oefening 19.1 Schrijf een functie `ruit(n)` die een $n \times n$ matrix (met n oneven) van de volgende vorm genereert:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Oefening 19.2 Schrijf een functie `SolveLT(L,b)` die het stelsel $Lx = b$ oplost waarbij L een vierkante onderdriehoeksmatrix is. Idem voor `SolveUT(U,b)` met U een bovendriehoeksmatrix is.

Oefening 19.3

- Schrijf een functie `omzetting(t)` die de omzetting doet van graden Celsius (TC) naar Fahrenheit (TF):

  $$TF = \frac{9}{5}TC + 32$$

- Creëer een tabel voor de omzetting van 0°C tot 100°C.
- Plot de functie.

Oefening 19.4

- Schrijf een MATLAB-functie `plotgauss(begin,einde,stap)` die de gausskromme $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ plot tussen het opgegeven interval met de opgegeven precisie.
- Schrijf een tweede functie `raaklijngauss(a)` die de raaklijn aan de gausskromme tekent voor opgegeven x-coördinaat a.

Oefening 19.5 Schrijf een programma dat de methode van Newton grafisch voorstelt zoals toegepast in oefening 18.1, voor het programma `curt(x)`.

Oefening 19.6 Definieer de functie

$$f(x) = \frac{x - \sin(x)}{x^3}$$

Bereken achtereenvolgens $f(0,01); f(0,001); f(0,0001)$ en $f(0,00001)$ in format ”long”.
Teken de grafiek van f op het interval $[-3,3]$.

Oefening 19.7 Lees de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in. Bereken de eerste 10 machten van A. Controleer welke macht van A mogelijk is onder de voorwaarde dat alle elementen in deze macht kleiner zijn dan 10^6.

Antwoorden

Oefening 1.1 a. Ja, want $f(0,1)=0$, en $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1)=2e\neq 0$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\mathrm{tg}\,x\sec x\frac{y^2}{1+y}\;\;;\;\;\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\mathrm{tg}^2x\sec^4x\frac{y^3(y+2)}{y+1}-\frac{1+\sin^2x}{\cos^3x}\frac{y^2}{y+1}$$

Vergelijking van de raaklijn: $y=1$.
b. Ja, want $f(1,0)=0$, en $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0)=1\neq 0$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x+y}{x-y}\;\;;\;\;\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=2\frac{x^2+y^2}{(x-y)^3}$$

Vergelijking van de raaklijn: $x-y=1$.
c. Ja, want $f(1,0)=0$, en $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0)=-1\neq 0$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{2x-2y+1}{2x+2y+1}\;\;;\;\;\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{8}{(-2x+2y+1)^3}$$

Vergelijking van de raaklijn: $3x-y=1$.

Oefening 1.2 a. Vergelijking van het raakvlak: $2x-y-z=0$.

$$z(x,y)=1+2(x-1)-(y-1)-8(x-1)^2+10(x-1)(y-1)-3(y-1)^2+\cdots$$

b. Vergelijking van het raakvlak: $x+y+2z=0$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=-\frac{\cos(x+y)+\cos(x+z)}{\cos(y+z)+\cos(x+z)}\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=-\frac{\cos(x+y)+\cos(y+z)}{\cos(y+z)+\cos(x+z)}\end{aligned}$$

c. Vergelijking van het raakvlak: $x+y-2z+1=0$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{3z^2+x}{(3z^2-x)^3}$$

Oefening 1.3 a.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=\frac{1+y^z\ln y+yz^{y-1}}{zy^{z-1}+z^y\ln z-y^z\ln y-yz^{y-1}}\\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}&=\frac{1+z^y\ln z+zy^{z-1}}{yz^{y-1}+y^z\ln y-z^y\ln z-zy^{z-1}}\end{aligned}$$

Vergelijking van de raaklijn:

$$\begin{cases} (2e-1)y = 2x-3 \\ (-2e+1)z = (2e+1)x - 4e^2 - 2e - 1 \end{cases}$$

b. $\mathrm{d}u = (\mathrm{d}x + \mathrm{d}y)/2, \quad \mathrm{d}v = \mathrm{d}y.$

c. $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -\dfrac{v-u}{y-x}.$

Oefening 1.4 a. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{3}, \quad \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{70}{27}.$

b. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{3uv^2 - u^3}{(u^2+v^2)^3}.$

c. $y'(0) = -\dfrac{2}{3}, \; z'(0) = \dfrac{1}{3}, \; y''(0) = \dfrac{46}{27}, \; z''(0) = -\dfrac{44}{27}.$

Vergelijking van de raaklijn:

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + 1 \\ z = \frac{1}{3}x + 2 \end{cases}$$

Oefening 2.1 a. $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$: minimum; $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$: maximum.
b. $(2,0,1)$ is een stationair punt, maar geen extremum.
c. $(1,1,1,1)$: minimum.

Oefening 2.2 a. maximum voor $x = 20$, $y = 21$, $z = 6$.
b. $1 - \sqrt{3}/2$.
a. $(1,1,1/2)$: minimum; $(-1,-1,-1/2)$: maximum.

Oefening 2.3 a. $(1,1,1)$: maximum; $(3,0,0)$, $(0,3,0)$, $(0,0,3)$ zijn stationaire punten, maar geen extrema.
b. $(2,2,1)$, $(1,2,2)$, $(2,1,2)$: minima; $(7/3,4/3,4/3)$, $(4/3,7/3,4/3)$, $(4/3,4/3,7/3)$: maxima.
c. minimale afstand voor $P_1 = (1,5)$, $P_2 = (2,4)$.

Oefening 2.5 a. $x = y = \sqrt{2s}$: minimum.
b. $(15/24, 3/4, 15/24)$: minimum.
c. $(1, -\sqrt{2}, -1+\sqrt{2})$ en $(-1, \sqrt{2}, 1-\sqrt{2})$ liggen het dichtst bij de y-as; $(1, \sqrt{2}, -1-\sqrt{2})$ en $(-1, -\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ het verst.

Oefening 2.6 a. $x = a/3, \; y = b/3, \; z = c/3$; **b.** $x = y = 4$ cm, $z = 6$ cm; **c.** $\theta = \pi/6, \; x = 2 - \sqrt{3}, \; y = (3-\sqrt{3})/6$.

Oefening 3.1 a) $I'(y) = 0$. Omdat $I(0) = 0$, is $I(y) = 0$. Tenslotte is $I = I(1/2) = 0$.
b)

$$I'(y) = \frac{\pi}{y} - \frac{\pi}{y\sqrt{1-y^2}}$$

$$I(y) = \pi \ln\left(1 + \sqrt{1-y^2}\right) + c$$

$$c = -\pi \ln 2, \text{ omdat } I(0) = 0$$

$$I = I(1/2) = \pi \ln \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

c)

$$I'(y) = \frac{\pi}{\sqrt{y^2-1}}$$

$$I(y) = \pi \ln (y + \sqrt{y^2-1}) + c$$

$$I(1) = \int_0^{\pi/2} \ln (1 - \sin^2 x) \mathrm{d}x = -\pi \ln 2$$

(zie oefening 3.1b). Hieruit volgt dat

$$c = -\pi \ln (1 + \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$I = I(2) = \pi \ln (1 + \frac{\sqrt{3}}{2})$$

Oefening 3.2

a1 $\frac{1219}{30}$	a2 $\frac{3\pi}{16} R^{4/3}$	a3 $-\frac{1}{12} - \frac{\pi}{8}$	a4 $\frac{5}{2}$
b1 1	b2 $-2\pi a^2$	b3 $-\frac{4}{3}$	b4 $-\frac{\pi R^6}{8}$
c1 $\frac{4}{3}$	c2 $\frac{3\pi}{2}$	c3 -4	c4 12π

Oefening 4.1

a1 $\frac{1}{40}$	a2 $\frac{9}{4}$	b1 $\frac{7}{60}$
b2 $\frac{1}{6}$	c1 $\frac{e}{2} - 1$	c2 14

Oefening 4.2

a $\frac{3}{7}$ b $\frac{|m| a^3}{3}$ c $\frac{11}{6}$

Oefening 4.3

a1 16π	a2 $\pi a^3 \left(\frac{3\pi^2}{2} - \frac{8}{3} \right)$	a3 $\pi a^3 \left(2 \ln 2 - \frac{4}{3} \right)$
b1 $\frac{128}{5}\pi$	b2 $\frac{64}{3}\pi a^3$	b3 $24\pi^2$
c1 $\frac{(32\sqrt{2}-28)\pi}{3}$	c2 $\frac{256\pi}{15}$	c3 $\frac{\sqrt{3}\pi}{8}$

Oefening 4.4

a $\frac{\pi a^2}{4}$ b $\frac{243}{10}$ c $6\sqrt[3]{2}$

Oefening 4.5

a1 $\frac{1}{3}-\frac{\pi}{16}$ a2 $-\frac{\pi}{4}(a^3b+ab^3)$ b1 $\frac{3\pi}{8}$
b2 $-\frac{4}{3}$ c1 $-\frac{19}{30}$ c2 $-\frac{1}{3}$

Oefening 4.6

a1 $\frac{1}{6}$ a2 $\frac{\sqrt{2}}{30}+\frac{1}{15}$ a3 $\frac{1}{8}$
b1 0 b2 $\frac{2\pi}{9}-\frac{1}{3}+\frac{\pi}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\text{bgtg}\,\frac{1}{\sqrt{2}}$
c1 $\frac{\pi}{2}$ c2 $2\text{tg}\,\frac{\pi}{8}-12\ln\cos\frac{\pi}{8}$

Oefening 4.7

a $\frac{2}{3}(4-\sqrt{2})$ b $\frac{2}{3}|a|^3(\pi-\frac{4}{3}$ c $\frac{81\pi}{8}$

Oefening 4.8

a1 $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ a2 $2+\frac{\pi}{4}$ a3 $2-\frac{\pi}{2}$
b1 $\frac{125}{6}$ b2 $\frac{25}{4}\text{bgsin}\,\frac{4}{5}+\frac{23}{3}$ b3 $1-\frac{\pi}{4}$
c1 $\frac{1}{10}$ c2 $\frac{8\pi}{3}+4\sqrt{3}-4$ c3 $\sqrt{2}\pi$

Oefening 5.1

a1 128 a2 $\frac{32}{\sqrt{3}}$ a4 $4\pi^2Rd$

a3 $\frac{\pi}{4}\left(b\sqrt{b^2+c^2}-a\sqrt{a^2+c^2}+c^2\ln\frac{b+\sqrt{b^2+c^2}}{a+\sqrt{a^2+c^2}}\right)$

b1 $3\pi\sqrt{10}$ b2 8π b4 $\pi\ln(1+\sqrt{2})+\pi\ln 2$

b3 $\frac{\pi a^2}{4\sqrt{2}}\ln\left((\sqrt{2}b+\sqrt{a^2+2b^2})/a\right)+\frac{\pi b}{4}\sqrt{a^2+2b^2}$

c1 50π c2 144 c3 $\frac{a^2}{3}\left(\frac{5}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$ c4 $\frac{128\pi a^2}{5}$

Oefening 5.2

a $\frac{\pi}{32}\left(\frac{5768}{5}\sqrt{21}-\frac{8}{105}\right)$ b $\frac{\sqrt{2}}{3}(\sqrt{2}-1)^{3/2}+\frac{\pi}{2}-\text{bgsin}\,(\sqrt{2}-1)$ c $4r^2$

Oefening 5.3

a $\frac{\pi}{2}$ b 16 c $\frac{1}{10}\pi HR^2(3R^2-4H^2)$

Oefening 5.4

a 12π b $-\frac{\pi R^6}{8}$ c $\frac{\pi}{2}-2\sqrt{2}$

Oefening 5.5

$F=4\pi R\sigma h$

Oefening 6.1

a1 $26/3$ a2 π b1 $\ln\sqrt{2}-\frac{5}{16}$
b2 $\frac{3\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ c1 $\frac{243\pi}{2}$ c2 πR^4

Oefening 6.2

a $5\pi^2a^3$ b πa^3 c 4π

Oefening 6.3

a $2\pi^2R^2d$ b 84π c $\frac{11}{6}$

Oefening 6.4

a 16 b $\frac{1}{8}$ c $\frac{247\pi}{6}$

Oefening 6.5 Het middelpunt $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ kan berekend worden via de formule

$$\bar{x}=\frac{1}{V}\iiint_T x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

en voor het massamiddelpunt $(\bar{x}_M,\bar{y}_M,\bar{z}_M)$ hebben we

$$\bar{x}_M=\frac{1}{M}\iiint_T x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Analoge formules gelden voor $\bar{y}_M, \bar{z}_M$.

Oefening 6.6

$$\begin{aligned}
I_x &= \iiint_T \rho(x,y,z)(y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
I_y &= \iiint_T \rho(x,y,z)(x^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
I_z &= \iiint_T \rho(x,y,z)(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
K &= \sqrt{I/M}
\end{aligned}$$

Oefening 7.1

a1. $1/2$; **a2**. $1/4$; **a3**. $\ln 2$; **a4**. $\ln 3$

b1. 1; **b2**. $1/6$; **b3**. 1; **b4**. $167/96$

c1. $1/4$; **c2**. $\pi/4$; **c3**. 3; **c4**. $1/4$

Oefening 7.2
a. 1. divergent; 2. convergent (d'Alembert); 3. divergent (vergelijk met $\sum 1/\sqrt{n}$; 4. convergent ($u_n \leq 2(6/7)^n$); 5. convergent (d'Alembert of Cauchy); 6. diverent (vergelijk met de harmonische reeks); 7. convergent (vergelijk met $\sum 1/n^2$); 8. convergent ($u_n \leq \int_n^{n+1} \mathrm{d}t/t^2$ en $\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \mathrm{d}t/t^2 = \int_1^{\infty} \mathrm{d}t/t^2$ is convergent; 9. divergent (integraalkenmerk, of vergelijk met de harmonische reeks); 10. convergent (vergelijk met $\sum 1/n^{3/2}$); 11. convergent ($u_n \leq 1/n^2$); 12. divergent (vergelijk met $\sum 1/(n \ln n)$.

b. 1. divergent (vergelijk met de harmonische reeks); 2. convergent (Cauchy); 3. divergent; 4. convergent (vergelijk met $\sum 1/n^2$); 5. convergent (d'Alembert); 6. convergent (d'Alembert); 7. convergent (vergelijk met $\sum 1/n^2$); 8. convergent (vergelijk met $\sum 1/n\sqrt{n}$); 9. convergent (d'Alembert); 10. convergent (vergelijk met $\sum 1/n^2\sqrt{n}$); 11. $b > 1$: convergent, $b \leq 1$: divergent (vergelijk met $\sum (n+1)^{-b}$; 12. convergent (Cauchy).

c. 1. divergent (algemene term gaat niet naar nul); 2. convergent (d'Alembert); 3. convergent (vergelijk met $\sum 1/n^2$); 4. convergent (Cauchy); 5. convergent (vergelijk met $\sum 1/n^2$); 6. convergent (d'Alembert, of vergelijk met $\sum 1/2^n$); 7. convergent (d'Alembert, of vergelijk met $\sum 1/3^n$); 8. convergent (Cauchy); 9. convergent (vergelijk met $\sum a^n$); 10. divergent (d'Alembert).

Oefening 7.3
a. 1. absoluut convergent; 2. relatief convergent; 3. relatief convergent; 4. absoluut convergent.

b. 1. relatief convergent; 2. absoluut convergent; 3. relatief convergent; 4. relatief convergent.

c. 1. absoluut convergent; 2. absoluut convergent; 3. relatief convergent; 4. relatief convergent.

Oefening 7.4

$$\textbf{a}.\quad 0,777\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{10^n} = \frac{7}{9}$$

$$\textbf{b}.\quad 0,1313\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{13}{100^n} = \frac{13}{99}$$

$$\textbf{a}.\quad 0,809809\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{809}{100^n} = \frac{809}{999}$$

Oefening 7.5 15 meter.

Oefening 7.6

$$K_0 = \sum_{k=1}^{\infty} n_k (1+\alpha)^{-k}$$

Oefening 8.4

$$\textbf{b1}.\ \frac{e}{e^2-1}\ ;\textbf{b2}.\ -\cos 1\ ;\textbf{c1}.\ 1$$

Oefening 8.5

$\textbf{a1}.\ [-3,3)$; $\textbf{a2}.\ (-1,1]$; $\textbf{a3}.\ [-2,0)$; $\textbf{a4}.\ \{1\}$

$\textbf{b1}.\ \{-1\}$; $\textbf{b2}.\ [-1,1]$; $\textbf{b3}.\ (-3,2)$; $\textbf{b4}.\ \mathbb{R}\setminus[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

$\textbf{c1}.\ \mathbb{R}$; $\textbf{c2}.\ [-1,1]$; $\textbf{c3}.\ \{0\}$; $\textbf{c4}.\ [1,3)$

Oefening 8.8

$$\textbf{a}\ \ f(x) = \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}\cos nx - \frac{1}{n\pi}\sin nx\right)$$

b $f(x) = 1,6 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n^2\pi^2}\left(-1+\cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right)\right)\cos n\pi x$

c $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16}{(2n+1)^2\pi^2}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{4}$

Oefening 8.9

a $f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}$

b $f(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2}\right)$

c $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n}{(4n^2-1)\pi}\sin(2nx)$

Oefening 9.1

a. $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - y$

b. $\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}t^3} - 6\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 12\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - 8y$

c. $(1-t^2)^{3/2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - 2y\right)$

Oefening 9.2

a. $-\frac{y^2\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}y^2} - 3y\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2 + 3x + y\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^3}{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^3}$

b. $\frac{x - (x+a)y\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}y^2} - \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^3}{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^3}$

c. $\frac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - y(y-1)\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}y^2}}{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^3}$

Oefening 9.3

a. $\dfrac{4\left(u\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+3\right)}{\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+1}$

b. $e^{2u-t}\left(\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}-\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)+e^{3u}$

c. $e^{2t}\left(\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}-\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2+\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)$

Oefening 9.4

a. $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)$

b. $\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$

c. $\begin{cases} u\frac{\partial z}{\partial u} & \text{als } u^2 \geq v^2 \\ v\frac{\partial z}{\partial v} & \text{als } u^2 \leq v^2 \end{cases}$

Oefening 10.1

a1. $x^2+2y\sin x=c$

a2. $e^{x^2y}+e^{xy^2}+x-y^2=c$

a3. $x\sqrt[3]{(x^2+y^2)^4}=c$

b1. $(1+e^{2x})y=c$

b2. $(x+1)y^2+\ln|x+y|-\ln|x|+2x=c$

b3. $(x-1)\ln(y^2+1)=c$

c1. $x^2+3yx+4x+2y^2+5y=c$

c2. $\sqrt{(x^2+y^2)^3} - 3xy = c$

c3. $x+y = c(1+xy)$

Oefening 10.2

a1. $x+y-\ln|x(y+1)| = c$; singuliere oplossingen : $x=0,\ y=-1$

a2. $\frac{1+x}{1-x}\sin^2 y = c$

b1. $y = \mathrm{tg}\ln\left|\frac{cx}{x+1}\right|$ singuliere oplossingen : $x=0,\ x=-1$

b2. $\cos y = c(1+e^x)$

c1. $y = ce^{x^3-y^2}$

c2. $2y+x = \ln|cxy|$; singuliere oplossing : $y=0$

Oefening 10.3

a1. $2x^2y^2 - x^4 = c$

a2. $2x^2y^2 + x^4 = c$

b1. $ye^{y/x} = c$ singuliere oplossing : $x=0$

b2. $\sin\frac{y}{x} = \frac{c}{x}$

c1. $\ln|y-x| - \frac{4x}{y-x} - \frac{2x^2}{(y-x)^2} = c$; singuliere oplossingen : $x=y,\ y=0$

c2. $xe^{x/y} = c$ singuliere oplossing : $y=0$

Oefening 10.4

a1. $(x+y)e^{x+2y} = c$

a2. $(y-x+1)^2(y+x-1)^5 = c$

b1. $5x-5y-2\ln|15x+10y-1| = c$

singuliere oplossing : $15x+10y-1=0$

b2. $(y+4x+1)^2(y-x-4)^3 = c$

c1. $(4x+8y+5)e^{8y-4x} = c$

c2. $(x+2-y)^4 = c(x+5y+2)$ singuliere oplossing : $x+5y+2=0$

Oefening 10.5

a1. $y = e^x + cx^2$

a2. $y = x^2 + cxe^x$

a3. $e^y = 2(\sin x - \cos x) + ce^{-x}$

b1. $y = -\dfrac{3}{2}\sin 2x - \dfrac{1}{2}\cos x + ce^{6x}$

b2. $y = -\dfrac{1}{2}\sin^2 x + c\operatorname{cosec}^2 x$

b3. $x = \dfrac{1}{2}\ln y + \dfrac{c}{\ln y}$ singuliere oplossing : $y=1$

c1. $y = x^2\cos x + cx\cos x$ singuliere oplossing : $x=0$

c2. $y = ce^x - (x+1) - \dfrac{1}{2}(\sin x + \cos x)$

c3. $\cos y = \dfrac{1}{2}\sin^2 x - \dfrac{1}{2}\sin x + \dfrac{1}{4} + ce^{-2\sin x}$

Oefening 10.6

a. $y^{-4} = \dfrac{4x}{3} + \dfrac{c}{x^2}$ singuliere oplossing : $y=0$

b. $\dfrac{1}{y} = -\sin x + ce^{x}$ singuliere oplossing : $y = 0$

c. $y^{-3} = ce^{3x^2} - \dfrac{1}{2}$ singuliere oplossing : $y = 0$

Oefening 11.1

a1. $(yx^3 - c_1)(y - c_2x^2)) = 0$

a2. $64(y-c)^3 = 9(x-1)^4$

a3. $\begin{cases} x = c + 2a\alpha + a\sin 2\alpha \\ y = 2a\sin^2\alpha \end{cases}$

a4. $(yx^3 - c_1)(yx^2 - c_2) = 0$

b1. $(yx - x - c_1)(y - x^2/2 - c_2) = 0$

b2. $\begin{cases} x = (t+1)/(t-1)^2 \\ y = (6t^3 + 3t^2 + 4t - 1)/6(t-1)^4 + c \end{cases}$

b3. $(x-2)^2 = (y+1)y^2$; singuliere oplossing : $y + 1 = 0$

b4. $(y^2 + x^2 - c_1)(yx + x^2/2 - c_2) = 0$

c1. $(y - c_1)(y - x - c_2)(y - x^2/2 - c_3)(y - c_4e^{2x}) = 0$

c2. $\Big(y - \ln|\cos x| + \ln|t-1| - \ln|t+1| - c_2\Big)\Big(y - \ln|\cos x| - \ln|t-1| + \ln|t+1| - c_1\Big) = 0$

c3. $(\sqrt{8y+1} \pm 3)^3 = ce^{-x}(\sqrt{8y+1} \pm 1)$

c4. $2cy - c^2x^2 + 1 = 0$

Oefening 11.2

a1. $y = (4 + c^2y^2)/2c$; singuliere oplossingen : $y = -2x,\ y = 2x$

a2. $3cx = c^2y^3 - 1$; singuliere oplossingen : $y = 0,\ 9x^2 + 4y^3 = 0$

a3. $\begin{cases} x = -2p + 2 + ce^{-p} \\ y = 2 - p^2 + c(1+p)e^{-p} \end{cases}$

a4. $y = cx + c - c^2$; singuliere oplossing : $y = (x+1)^2/4$

b1. $yx = 3c^2x - c$; singuliere oplossing : $y = -x^2/12$

b2. $y^4 + c(c-x) = 0$; singuliere oplossingen : $x = -2y^2,\ x = 2y^2$

b3. $\begin{cases} x = -p/3 = c/p^2 \\ y = -p^2/6 + 2c/p \end{cases}$; singuliere oplossing : $y = 0$

b4. $y = cx + \sqrt{1-c^2}$; singuliere oplossing : $\begin{cases} x = p/\sqrt{1-p^2} \\ y = 1/\sqrt{1-p^2} \end{cases}$

c1. $\begin{cases} x = c(1+p)e^p \\ y = cp^2e^p \end{cases}$

c2. $y^2 - 4cx + 32c^2 = 0$; singuliere oplossing : $8y^2 - x^2 = 0$

c3. $\begin{cases} x = \left(3p^2/2 - p^3 + c\right)/(p-1)^2 \\ y = xp^2 + p^3 \end{cases}$; singuliere oplossing : $y = x + 1$

c4. $y^2 = cx^2 - c^2$; singuliere oplossing : $4y^2 - x^4 = 0$

Oefening 11.3

a1. $y = cx^2$

a2. $\rho = c\sin\theta$

b1. $y^2 = x + c$

b2. $\rho = c(1 - \sin\theta)$

c1. $y = \ln(cx)/2$

c2. $\rho^2 = 1/(c\sin 2\theta + \cos 2\theta)$

Oefening 11.4 a. de singuliere oplossing van de vergelijking van Clairaut
b. $y = 0$; **c.** $x = 0$

Oefening 12.1

a1. $y = (x-2)e^x - \cos x + c_1 x + c_2$

a2. $y = \frac{1}{2}a(\ln|x|)^2 + c_1 \ln|x| + c_2$

a3. $x = c_2(y - \ln|y|) + c_1$; singuliere oplossing : $y = c$

a4. $y = -x + \ln(c_1 + e^{2x}) + c_2$

b1. $y = x\ln|x| + c_1 x + c_2$

b2. $y = c_1 \ln|x| - \frac{x^2}{4} + c_2$

b3. $y = c_1\sqrt{\cos 2(x+c_2)}$

b4. $y = \ln|c_1 + c_2 e^x|$; singuliere oplossing : $y = x + c$

c1. $y = (x-2)e^x - \sin x + c_1 x + c_2$

c2. $\frac{1}{2}\ln|x| \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-4c_1x^2} \mp \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{1-4c_1x^2}) \pm \frac{1}{2}\ln(2\sqrt{|c_1|x} + c_2$

singuliere oplossingen : $y = \ln|x| + c, y = c$

c3. $x = y + c_1 \ln|c_2 y|$; singuliere oplossing : $y = c$

c4. $y = x - \ln|c_2(1 - c_1 e^x)|$; singuliere oplossingen : $y = c,\ y = x + c$

c5. $y = c_3 + c_2/(x + c_1)$

Oefening 12.2

a1. $y = cx$ en $xy = c$

a2. $y = c$

a3. $y = \pm a \ln(\cos(x/a) + c_1) + c_2$

b1. $y = cxe^{\pm x}$

b2. $y = \pm x + c$ en $y = 0$

b3. $y = \pm\frac{1}{2}(1 - e^{\mp x})$

c1. $\ln\sqrt{x^2+y^2} \pm \operatorname{bgtg}(y/x) = c$

c2. 1) $y = cx + \dfrac{2ac}{(\mp 1 - c)}$ en $\begin{cases} x = \pm 2a/(-p \mp 1)^2 \\ y = xp + 2ap/(-p \mp 1) \end{cases}$

c2. 2) $y = cx - \dfrac{2ac}{(\mp 1 - c)}$ en $\begin{cases} x = \mp 2a/(-p \mp 1)^2 \\ y = xp - 2ap/(-p \mp 1) \end{cases}$

c3. $y = \pm x + \sqrt{1 - x^2}$

Oefening 13.1

a. $y = e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + e^{-x}(c_3 \cos x + c_4 \sin x)$

b. $y = (c_1 x^2 + c_2 x + c_3)e^{2x}$

c. $y = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx} + (c_3 + xc_4)\cos mx + (c_5 + xc_6)\sin mx$

Oefening 13.2

a1. $y = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + c_1\right)e^{3x} + c_2 e^{2x}$

a2. $y = c_1 \cos x + (c_2 + 2x)\sin x - \frac{1}{2}\cos 3x$

b1. $y = \left(\frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2\right)e^{3x}$

b2. $y = (c_1 + \frac{x^3}{6})\cos x + c_2 \sin x$

c1. $y = e^x(x^2 - x) + c_1 e^x + c_2 e^{-x}$

c2. $e^{2x}\left(-\frac{1}{10}\cos 2x - \frac{1}{20}\sin 2x\right) + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$

Oefening 13.3

a. $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - e^{2x}\sin e^{-x}$

b. $y = \frac{1}{2}\cos x \ln\frac{1-\sin x}{1+\sin x} + c_1 \cos x + c_2 \sin x$

c. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \operatorname{ch} x \operatorname{bgtg} e^x - \frac{1}{2}$

Oefening 13.4

a. $y = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{3}(2x+1)^2 - (c_1 + \ln|2x+1|)(2x+1) + \frac{c_2}{2x+1} - 1\right)$

b. $y = |x|(\pm\frac{1}{6}(\ln|x|)^3 + c_1 \ln|x| + c_2)$

c. $y = \frac{(\ln|x|)^3}{6x} + \ln x^2 - 6 + \frac{c_1}{x} + c_2\frac{\ln|x|}{x} + c_3\frac{(\ln|x|)^2}{x}$

Oefening 13.5

a1. $\begin{cases} y_1 = -c_1/2 + 2c_2 e^{5x} \\ zc_1 + c_2 e^{5x} \end{cases}$

a2. $\begin{cases} x = -2/3 - t \\ y = c_1 + 4t/3 + t^2/2 \end{cases}$

b1. $\begin{cases} y = 2c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} \\ z = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} \end{cases}$

b2. $\begin{cases} y = c_1 e^{3x} + 2c_2 e^{2x} - 3e^x/2 - 2/3 \\ z = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} - e^x/2 + 1/3 \end{cases}$

c1. $\begin{cases} y = 3c_1 e^{3x} + 2c_2 e^{10x} \\ z = -2c_1 e^{3x} + c_2 e^{10x} \end{cases}$

c2. $\begin{cases} x = 2c_1\cos t + 2c_2\sin t - t^2 + t + 3 \\ y = (c_2 - 3c_1)\cos t - (c_1 + 3c_2)\sin t + 2t^2 - 3t - 4 \end{cases}$

Oefening 13.6

a. $\begin{cases} x = -Ae^t + 2Be^{2t} + Ce^{-t} \\ y = -Ae^t + Be^{2t} + Ce^{-t} \\ z = 2Ae^t - 2Be^{2t} - Ce^{-t} \end{cases}$

b. $\begin{cases} x = Ae^{2t} + Ce^t \\ y = Ae^{2t} - Be^{3t} \\ z = 2Be^{3t} + ce^t \end{cases}$

c. $\begin{cases} x = 2A + Be^{6t} \\ y = A + Ce^{6t} \\ z = A - (2B + C)e^{6t} \end{cases}$

Oefening 14.1

a. $y = c_0(1 - \frac{3}{8}x^2 - \frac{21}{128}x^4 + \ldots) + c_1(x + \frac{5}{24}x^3 + \frac{15}{128}x^5 + \ldots) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

met $c_n = \dfrac{4n^2 - 12n + 5}{4n(n-1)} c_{n-2}$

convergentiegebied : $(-1, 1)$

b. $y = c_1 x + c_0(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \ldots) = c_1 x + \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} x^{2n}$

met $c_{2n} = \dfrac{2n-3}{2n} c_{2n-2} = -\dfrac{(2n-3)!!}{(2n)!!} c_0$

convergentiegebied : $(-1, 1)$

c. $y = c_0(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{9}{10}x^5 + \ldots) + c_1(x + \frac{x^3}{3} - \frac{5}{4}x^4 - \frac{x^5}{15} + \ldots) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

met $c_2 = \dfrac{c_0}{2}, c_3 = \dfrac{c_1}{3}, c_4 = \dfrac{c_2 - 5c_1}{4}, c_n = \dfrac{(n-1)c_{n-2} - 15(n-3)c_{n-3} - 3c_{n-5}}{n(n-1)}$

convergentiegebied : $\mathbb{R}$

Oefening 14.2

a. $y_1 = x(1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{(2n+1)!!})$
$y_2 = \sqrt{x}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{2^n n!}\right)$
convergentiegebied : $\mathbb{R}$

b. $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n!} = e^{x/2}$
$y_2 = \sqrt{x}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n+1)!!}$
convergentiegebied : $\mathbb{R}$

c. $y_1 = x + \frac{6}{5}x^2 + \frac{9}{20}x^3$
$y_2 = x^{1/3} + \frac{8}{3}x^{4/3} + \frac{20}{9}x^{7/3} + \frac{40}{81}x^{10/3} + 80\sum_{n=4}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(3n-11)!!!}{3^n n!}x^{n+1/3}$
convergentiegebied : voor y_1 : $\mathbb{R}$; voor y_2 : $(-1,1)$

Oefening 14.3

a $y_1 = 1 - \frac{2}{3x}$
$y_2 = \sqrt{x}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n!(2n-1)(2n-3)x^n}\right)$
convergentiegebied : $\mathbb{R}_o$

b $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{-2n}}{(2n+1)!}$
$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{1-2n}}{(2n)!}$
convergentiegebied : $\mathbb{R}_o$

c $y_1 = 1 - \frac{1}{3x}$
De methode levert slechts één lineair onafhankelijke oplossing.