



Vrije Universiteit Brussel

# Analyse I

**S. Caenepeel**

**Oefeningen**



# Reeks 1 Limieten 1

## Infinum en supremum

**Oefening 1.1** Bepaal het supremum en infimum van de volgende verzamelingen:

**a1.**  $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$

**a2.**  $[0, 4]$

**a3.**  $\{1 + 0, 1^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{1 - 0, 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

**b1.**  $(7, 10)$

**b2.**  $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$

**b3.**  $\{-1 + 0, 1^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{1 - 0, 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

**c1.**  $\{2^{-m} + 3^{-n} \mid m, n \in \mathbb{N}_0\}$

**c2.**  $[\pi, \pi^2]$

**c3.**  $\{\frac{n(-1)^n}{n - (-1)^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

## Limieten van rijen

**Oefening 1.2** Ga na of de rij  $(u_n)$  convergent is, en bepaal de limiet.

**a1.**  $u_n = \frac{3n + 8}{5n - 2}$

**a2.**  $u_n = \sqrt[n]{a} \quad (a > 0)$

**a3.**  $u_n = (\sqrt{n+3} - \sqrt{n-1})\sqrt{n}$

**a4.**  $u_n = \sqrt{n^2 + 2n + 4} - \sqrt{n^2 - 3n + 7}$

$$\mathbf{a5.} \quad u_n = \left(\frac{2n-1}{n+3}\right)^n$$

$$\mathbf{a6.} \quad u_n = \sqrt{\frac{n+2}{3n+4}}$$

$$\mathbf{a7.} \quad u_n = \frac{4 \cdot 10^n - 3 \cdot 10^{2n}}{3 \cdot 10^{n-1} + 2 \cdot 10^{2n-1}}$$

$$\mathbf{b1.} \quad u_n = \frac{n^2 + 7}{n^3}$$

$$\mathbf{b2.} \quad u_n = \frac{\sin n + (-1)^n}{n^2 + 4}$$

$$\mathbf{b3.} \quad u_n = \sqrt{n^2 + n} - n$$

$$\mathbf{b4.} \quad u_n = \left(\frac{n-3}{n+4}\right)^{2n+5}$$

$$\mathbf{b5.} \quad u_n = \sqrt[n]{3^n - 2^n}$$

$$\mathbf{b6.} \quad u_n = \frac{x^n - 1}{x^n + 1} \quad (x > 1)$$

$$\mathbf{c1.} \quad u_n = \frac{\sin n}{n+1}$$

$$\mathbf{c2.} \quad u_n = \left(\frac{n+2}{n}\right)^{3n}$$

$$\mathbf{c3.} \quad u_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$$

$$\mathbf{c4.} \quad u_n = \left(\sqrt{n^2 + 2n + 4} - \sqrt{n^2 + 2n - 1}\right)n$$

$$\mathbf{c5.} \quad u_n = n^p x^n \quad (p \in \mathbb{N}, x \geq 1)$$

$$\mathbf{c6.} \quad u_n = \frac{1}{(1+a)^n} \quad (a > 0)$$

**Oefening 1.3** Ga na of de rij  $(u_n)$  convergent is, en bepaal de limiet. Herinner dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

**a1.**  $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

**a2.**  $u_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$

**b1.**  $u_n = \left(1 - \frac{2}{n^2}\right)^{n^2}$

**b2.**  $u_n = \left(\frac{2n-1}{2n-3}\right)^{2n}$

**c1.**  $u_n = \left(\frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^n$

**c2.**  $u_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{bn} \quad (a \neq 0)$

### Limieten van functies in één veranderlijke

**Oefening 1.4** Toon aan, met behulp van de definitie van limiet, dat

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a$$

Beschouw dan twee reële veeltermen  $P$  en  $Q$ , en  $a \in \mathbb{R}$  zodat  $Q(a) \neq 0$ . Toon aan dat

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

Gebruik hiervoor de eigenschappen die we gezien hebben over limiet van som en product.

**Oefening 1.5** Bereken de volgende limieten

**a1.**  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2-x-12}$

**a2.**  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-27}{x^2-9}$

$$\text{a3. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-2}{9x+7}$$

$$\text{b1. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$$

$$\text{b2. } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$\text{b3. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 + 2x + 2}{5x^2 - 3x + 4}$$

$$\text{c1. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{(x-1)x}$$

$$\text{c2. } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5(x+h)+1} - \sqrt{5x+1}}{h}$$

$$\text{c3. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 5}$$

## Reeks 2 Limieten 2

### Linker- en rechterlimiet

#### Definitie 2.1

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b \iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < x - a < \delta \implies |f(x) - b| < \epsilon$$

We noemen  $b$  de rechterlimiet van  $f$  in het punt  $a$ .

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b \iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < a - x < \delta \implies |f(x) - b| < \epsilon$$

We noemen  $b$  de linkerlimiet van  $f$  in het punt  $a$ .

De eigenschappen die we bewezen voor limieten (over limiet van som, product, enz.) gelden ook voor linker- en rechterlimieten.

**Oefening 2.1** Toon volgende eigenschap aan: de limiet van een functie in een punt bestaat dan en alleen dan als de linker- en de rechterlimiet bestaan en aan mekaar gelijk zijn, m.a.w.,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$$

**Oefening 2.2** Gebruik oefening 2.1 om na te gaan of de volgende limieten bestaan

a.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3 + 2^{1/x}}$

b.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2^{1/x}}{3 + 2^{1/x}}$

c.  $\lim_{x \rightarrow 1} 2^{-2^{1/(1-x)}}$

## Limieten van functies van twee veranderlijken

We bekijken eerst een voorbeeld:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Onderstel dat deze limiet bestaat en de waarde  $l$  aanneemt. Dan geldt duidelijk

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = l$$

Nu is

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

en

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

zodat we kunnen concluderen dat

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

niet bestaat. We hebben hier alleen de limiet genomen voor  $(x,y)$  naderend tot  $(0,0)$  langs de  $x$ -as en de  $y$ -as. Meer algemeen kunnen we de limiet beschouwen voor  $(x,y)$  naderend tot  $(0,0)$  langs eender welke kromme door  $(0,0)$ . Indien het resultaat afhangt van de gekozen kromme, kunnen we besluiten dat de limiet niet bestaat. Dikwijls is het voldoende te kijken naar alle rechten die door het gegeven punt gaan. We hebben dan ook de volgende rekenregel:

**Rekenregel 2.2** Indien

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b), y-b=m(x-a)} f(x,y)$$

afhangt van de parameter  $m$ , dan bestaat

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$$

niet.

Bovenstaande rekenregel staat alleen toe te besluiten dat een gegeven tweedimensionale limiet niet bestaat. Zelfs als de limiet hierboven niet afhangt van de parameter  $m$ , dan kan het nog zijn dat de tweedimensionale limiet niet bestaat.

**Oefening 2.3** Toon aan: voor een functie  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  hebben we

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = k$$

als en alleen als

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \begin{cases} |x - a| < \delta \\ |y - b| < \delta \\ (x,y) \neq (a,b) \end{cases} \implies |f(x,y) - k| < \varepsilon$$

**Oefening 2.4** Toon aan: als  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  een numerieke functie is waarvoor geldt

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = 0$$

en  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  begrensd is op een omgeving van  $(a,b)$ , dan is

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x)g(x,y) = 0$$

**Oefening 2.5** Ga het bestaan na van de volgende limieten:

a1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2}$

a2.  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2}$

a3.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2}$

a4.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^6 + y^2x^4 + y^4x^2 + y^6}{x^2 + y^2}$

a5.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + 2y^4}{x^2 + y^4 + y^6}$

a6.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{|x| + y^2}$

- b1.**  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{y^4 + x^6}$
- b2.**  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{y^2 + x^2}$
- b3.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^4 + 2y^2}{x^4 + y^2}$
- b4.**  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 2y^2}{x^4 + y^2}$
- b5.**  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{y^2 - 4x}{x^2 y^2 + y^3 - 4x^3 - 4xy}$
- b6.**  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + x^2 y^2 + y^4 + 2x^2}{x^4 + y^4 + x^2}$
- c1.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 + 2y^2}$
- c2.**  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 + 2y^2}$
- c3.**  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 + 2y^2}$
- c4.**  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^4} \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$
- c5.**  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x-y)^4 - x^2}{(x-y)^4 + x^2}$
- c6.**  $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{x^2 - 4y}{x^2 y^2 + x^3 - 4y^3 - 4xy}$

## Continuïteit

**Oefening 2.6** Bespreek de continuïteit van de numerieke functie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\mathbf{a1.} \quad f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{als } x \neq 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{a2.} \quad f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{als } x \leq 0 \\ x & \text{als } 0 < x < 1 \\ 2-x & \text{als } 1 \leq x \leq 2 \\ 3x-x^2 & \text{als } x > 2 \end{cases}$$

$$\mathbf{b1.} \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{als } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\mathbf{b2.} \quad f(x) = \begin{cases} \operatorname{cosec} \frac{1}{x} & \text{als } x \neq \frac{1}{k\pi} \text{ en } x \neq 0 \\ 0 & \text{als } x = \frac{1}{k\pi} \text{ of } x = 0 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

$$\mathbf{c1.} \quad f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{als } x \neq 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{c2.} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{1/x}} & \text{als } x \neq 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \end{cases}$$

**Oefening 2.7** Bespreek de continuïteit van de functie van twee veranderlijken  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\mathbf{a1.} \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{als } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{als } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\mathbf{a2.} \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2-13-4(x-2)-6(y-3)}{\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}} & \text{als } (x,y) \neq (2,3) \\ 0 & \text{als } (x,y) = (2,3) \end{cases}$$

$$\mathbf{b1.} \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x-y} & \text{als } x \neq y \\ x-y & \text{als } x = y \end{cases}$$

$$\mathbf{b2.} \quad f(x,y) = [x] + [y]$$

$$\mathbf{c1.} \quad f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{als } xy \neq 0 \\ 1 & \text{als } xy = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{c2.} \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} & \text{als } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{als } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

## Reeks 3 Afgeleiden I

**Oefening 3.1** Gebruik de definitie van afgeleide, en de eigenschappen uit §4.1 (afgeleide van som, product, constante en identieke functie enz.) om de afgeleiden te berekenen van de functies gegeven door de volgende voorschriften:

1.  $y = \cos x$

a2.  $y = \operatorname{tg} x$

b2.  $y = \operatorname{cotg} x$

c2.  $y = \sec x$

a3.  $y = \operatorname{bgcos} x \quad (x \in [-1, 1])$

b3.  $y = \operatorname{bgtg} x$

c3.  $y = \operatorname{bgcotg} x$

4.  $y = \ln x \quad (x > 0)$

5.  $y = e^x$

6.  $y = \log_a x \quad (a, x > 0)$

7.  $y = a^x \quad (a > 0)$

8.  $y = x^a \quad (x > 0)$

a9.  $y = \operatorname{sh} x$

b9.  $y = \operatorname{ch} x$

c9.  $y = \operatorname{th} x$

a10.  $y = \operatorname{argsh} x$

b10.  $y = \operatorname{argch} x \quad (x > 1)$

c10.  $y = \operatorname{argth} x \quad (x \in (-1, 1))$

**Oefening 3.2** Gebruik de rekenregels voor het berekenen van afgeleiden (§4.1) en de formules voor de afgeleiden van elementaire functies (§4.2 en oefening 3.1) om de afgeleiden te berekenen van de functies gedefinieerd via de volgende voorschriften

**a1.**  $y = e^x \ln x$

**a2.**  $y = \frac{e^{\sqrt{1+2x}}}{\sqrt{1+2x}}$

**a3.**  $y = \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \operatorname{bgtg} x$

**a4.**  $y = \sin(\sin x)$

**a5.**  $y = \operatorname{Intg} \frac{x}{2} - (\operatorname{cotg} x) \ln(1 + \sin x) - x$

**b1.**  $y = x^x$

**b2.**  $y = x^{\ln x}$

**b3.**  $y = y = 3v^2 - 4v + 5$  met  $v = 2x^5$

**b4.**  $y = \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 u - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 u + \operatorname{tg} u$  met  $u = \sqrt{x^2 + 1}$

**b5.**  $y = \sqrt[5]{\left(1 + xe^{\sqrt{x}}\right)^3}$

**c1.**  $y = \operatorname{tg} \ln(2x + 3)^2$

**c2.**  $y = x^{x^x}$

**c3.**  $y = \operatorname{bgtg} \frac{a + b \cos x}{b + a \cos x}$

**c4.**  $y = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 - \sqrt{3}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 + \sqrt{3}}$

**c5.**  $y = \operatorname{tg}^2 e^{3x}$

## Raaklijn en hoek

**Oefening 3.3 a.** Bepaal de vergelijking van de raaklijn in het punt  $(0,0)$  aan de kromme met vergelijking

$$y = \frac{x}{1+x^2}.$$

**b.** Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de kromme met vergelijking  $y = x^2 + x - 6$  die evenwijdig is met de rechte met vergelijking  $3x + y = 2$ .

**c.** Bepaal de vergelijkingen van de raaklijnen aan de kromme met vergelijking  $y = \sin x$  die evenwijdig zijn met de rechte met vergelijking  $y = x$ .

**Oefening 3.4** Bereken de hoek waaronder de volgende krommen elkaar snijden:

**a.**  $y = \frac{8}{x^2 + 4}$  en  $y^2 = \frac{x}{2}$

**b.**  $y = \sin x$  en  $y = \cos x$

**c.**  $x^2 - 4x + y^2 = 0$  en  $x^2 + y^2 = 8$

**Oefening 3.5a** Bewijs dat de uitdrukking

$$b \cos \frac{a \cos x + b}{a + b \cos x} - 2b \operatorname{tg} \left( \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)$$

onafhankelijk is van  $x$  ( $0 < b < a$  en  $0 < x < \pi$ ).

**Oefening 3.5b** De numerieke functies  $u_0, u_1, u_2, \dots$  worden recursief gedefinieerd door de volgende betrekkingen

$$u_0(x) = a$$

$$u'_n(x) = n u_{n-1}(x)$$

Toon aan dat de uitdrukking

$$u_0^2 u_3 - 3u_0 u_1 u_2 + 2u_1^3$$

onafhankelijk is van  $x$ .

**Oefening 3.5c** Zelfde vraag als in b), maar nu voor de uitdrukking

$$u_0 u_4 - 4u_1 u_3 + 3u_2^2$$

## De afgeleide als een maat voor verandering

Beschouw de rechte  $l$  met vergelijking

$$y = mx + b$$

Zoals we weten is  $m$  de richtingscoëfficiënt van  $l$ . Hoe groter  $m$ , hoe “steiler” de grafiek van de rechte  $l$ . Of nog:  $m$  geeft aan hoeveel  $y$  toeneemt als  $x$  met een eenheid toeneemt. We kunnen  $m$  dus beschouwen als een parameter die beschrijft hoe snel  $y$  toeneemt (of afneemt) als  $x$  toeneemt. Een analoge interpretatie hebben we voor een kromme  $C$  met vergelijking

$$y = f(x)$$

Onderstel dat  $f$  afleidbaar is in  $a \in \mathbb{R}$ . Zoals we gezien hebben is de vergelijking van de raaklijn in  $(a, f(a))$  aan de kromme  $C$ :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

De richtingscoëfficiënt van deze raaklijn is  $f'(a)$ , en deze geeft aan hoe snel  $y = f(x)$  verandert als  $x$  toeneemt, of hoe steil de grafiek van  $f$  is in het punt  $(a, f(a))$ .

Een eerste toepassing hiervan is de notie “snelheid”. We laten een deeltje bewegen langs een rechte lijn, en noemen  $x(t)$  de positie op tijdstip  $t$ .  $v(t) = x'(t)$  geeft dan aan hoe snel  $x$  toeneemt op tijdstip  $t$ , het is dus de snelheid van het deeltje op tijdstip  $t$ .

Er bestaan nog andere - analoge - interpretaties van de afgeleide. We bekijken een eenvoudig voorbeeld.

Neem een vierkant met zijde  $x$ . De oppervlakte is dan  $x^2$ . Als de zijde van het vierkant toeneemt van

$$x = 1 \text{ tot } x = 1.1$$

Dan neemt de oppervlakte  $S = x^2$  toe van

$$S = 1 \text{ tot } S = 1.21$$

Het verschil is 0.21. Als we nu een vierkant nemen met zijde 10, en weer de zijde met 0.1 laten toenemen, dus van

$$x = 10 \text{ tot } x = 10.1$$

dan neemt de oppervlakte toe van

$$S = 100 \text{ tot } S = 1002.01$$

Het verschil is nu dus 2.01, ongeveer tienmaal meer als daarnet. Dit kan verklaard worden aan de hand van de afgeleide:

$$S(x) = x^2$$

De snelheid waarmee  $S$  toeneemt als  $x$  toeneemt is

$$S'(x) = 2x$$

We zien

$$S'(1) = 2 \text{ en } S'(10) = 20$$

en dus is  $S'(10)$  precies tienmaal zo groot als  $S'(1)$ , zoals we hierboven al constateerden. Ook de *kettingregel* kunnen we in dit kader herinterpreteren. Onderstel dat de zijde van het vierkant steeds sneller en sneller toeneemt, bijvoorbeeld in functie van de tijd  $t$  door de volgende functie

$$x(t) = t^2$$

We kunnen dan gaan meten hoe snel de oppervlakte van het vierkant toeneemt (in functie van de tijd). We krijgen hier dus een samengestelde functie

$$\mathbb{R} \xrightarrow{x} \mathbb{R} \xrightarrow{S} \mathbb{R}$$

De oppervlakte op tijdstip  $t$  is

$$S(x(t)) = (t^2)^2 = t^4$$

en

$$\frac{dS}{dt} = 4t^3$$

**Oefening 3.6** Hoe snel verandert het volume  $V$  van een kubus in functie van

- de lengte  $w$  van een van de diagonalen van de kubus;
- de lengte  $z$  van een van de diagonalen van een zijvlak van de kubus;
- de oppervlakte  $W$  van een van de zijvlakken van de kubus.

**Oefening 3.7**  $A$  is de oppervlakte van een cirkelsector met straal  $r$  en hoek  $\vartheta$ .

- Hoe snel verandert  $A$  in functie van  $r$  als  $\vartheta$  constant blijft;
- Hoe snel verandert  $A$  in functie van  $\vartheta$  als  $r$  constant blijft.
- Hoe snel verandert  $\vartheta$  in functie van  $r$  als  $A$  constant blijft?

**Oefening 3.8a** De ribbe van een kubus neemt af met 3 cm per seconde. Hoe snel neemt het volume van de kubus af op het ogenblik dat de ribbe 5 cm lang is?

**Oefening 3.8b** De straal van een bol neemt toe met 4 cm per minuut. Hoe snel neemt het volume toe op het ogenblik dat de straal 10 cm is?

**Oefening 3.8c** De straal van een sfeer neemt toe met 4 cm per minuut. Hoe snel neemt de oppervlakte toe op het ogenblik dat de straal 10 cm is?

## Reeks 4 Afgeleiden 2

**Oefening 4.1a** Een deeltje beweegt in positieve  $x$ -richting langs de parabool met vergelijking  $y^2 = 12x$ . In welk punt van de parabool nemen de  $x$  en  $y$  coördinaten van het deeltje met dezelfde snelheid toe? Zoek in dit punt tevens de vergelijking van de raaklijn aan de parabool, en de vergelijking van de normaal op de parabool.

**Oefening 4.1b** Een punt  $P$  beweegt langs de parabool met vergelijking  $y = x^2$ , en daarbij is gegeven dat de snelheid in de  $x$ -richting constant is:

$$x = kt$$

$M$  is de orthogonale projectie van  $P$  op de  $x$ -as, en  $O$  is de oorsprong. Wat is de snelheid waarmee de oppervlakte  $S$  van de driehoek  $OPM$  toeneemt op tijdstip  $t$ ?

**Oefening 4.1c** Een zeilboot zeilt in zuidelijke richting tegen een constante snelheid van 6 km per uur; een tweede zeilboot gaat in oostelijke richting tegen 8 km per uur. Om 4 uur kruist de tweede zeilschip het pad van het eerste, precies op de plaats waar het eerste zeilschip twee uur daarvoor was. Bepaal de snelheid waarmee de afstand tussen de twee zeilboten toenam (of afnam) om 3 uur en om 5 uur. Op welk tijdstip is de onderlinge snelheid van de twee boten gelijk aan nul?

**Oefening 4.2a** Bepaal de coëfficiënten  $a$ ,  $b$  en  $c$  zodanig dat de parabool met vergelijking

$$y = ax^2 + bx + c$$

door de punten  $(1, 3)$  en  $(2, 3)$  gaat, en in  $(2, 3)$  raakt aan de rechte  $x - y + 1 = 0$

**Oefening 4.2b** Bepaal de coëfficiënten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  en  $d$  zodanig dat de kromme met vergelijking

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

in  $(1, 1)$  raakt aan de rechte  $y = 5x - 4$  en in  $(-1, -9)$  aan  $y = 9x$ .

**Oefening 4.2c** De straal van een kegel neemt toe met 3 cm per minuut, en het volume blijft constant. Tegen welke snelheid neemt de hoogte van de kegel af op het ogenblik dat de straal 40 cm is, en de hoogte 15 cm?

**Oefening 4.3a** Een spoorweg kruist een autoweg onder een hoek  $\pi/3$ . Een lokomotief bevindt zich op 1 km van de overweg, en rijdt van het kruispunt weg tegen 100 km per uur. Een auto bevindt zich ook op 1 km van de overweg, en rijdt in de richting van de overweg, tegen 50 km per uur. Hoe snel bewegen de auto en de lokomotief zich ten opzichte van elkaar?

**Oefening 4.3b** Een jongetje wandelt 's avonds langs een pad. Het pad is verlicht door een lantaarn, die op 3 meter hoogte hangt. Als je weet dat de jongen 1,5 m groot is, en tegen 5 km per uur stapt, kun je dan vertellen hoe snel de lengte van de schaduw van de jongen toeneemt?

**Oefening 4.3c** Als we de ribbe van een kubus laten variëren, dan variëren ook de oppervlakte en het volume van de kubus. Op een bepaald ogenblik neemt het volume af met  $9 \text{ cm}^3$  per minuut, en de ribbe met 4 cm per minuut. Hoe snel neemt de oppervlakte af op dit moment?

## Afgeleiden en inverse functies

**Oefening 4.4** Onderstel dat de numerieke functie  $f$  een bijjectie is op een omgeving van  $x_0$ . Stel  $f(x_0) = y_0$  en noteer  $g$  voor de inverse functie. We weten dat

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Bewijs nu dat

$$g''(y_0) = -\frac{f''(x_0)}{f'(x_0)^3}$$

$$g'''(y_0) = \frac{3f''(x_0)^2 - f'(x_0)f'''(x_0)}{f'(x_0)^5}$$

Noteren we  $f(x) = y$  en  $g(y) = x$ , dan kunnen we bovenstaande formules als volgt herschrijven

$$x' = \frac{1}{y'}$$

$$x'' = -\frac{y''}{(y')^3}$$

$$x''' = \frac{3(y'')^2 - y'y'''}{(y')^5}$$

## De middelwaardestelling

**Oefening 4.5** Gebruik stelling van Lagrange om volgende eigenschappen aan te tonen.

a.  $\frac{b-a}{1+b^2} < \text{bgtg } b - \text{bgtg } a < \frac{b-a}{1+a^2} \quad (0 < a < b)$

b.  $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \text{bgtg } \frac{4}{3} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$

c.  $1 - \frac{1}{b} < \ln b \leq b - 1 \quad (b > 1)$

## Berekenen van limieten met de regel van de l'Hospital

**Oefening 4.6** Bereken de volgende limieten met behulp van de regel van de l'Hospital.

a1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$

a2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{\frac{1}{x}}}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$

$$\text{b1. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2 \cos x}{\ln(1+x)}$$

$$\text{b2. } \lim_{x \rightarrow 1+0} (x^2 - 1) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$$

$$\text{c1. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{\cos 3x - 2 \cos 2x + \cos x}$$

$$\text{c2. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^a} \quad (a > 0)$$

## De stelling van Taylor

**Oefening 4.7** Schrijf de formule van McLaurin met restterm van Lagrange op voor de volgende functies.

- $f(x) = e^x$  (restterm van orde  $n + 1$ )
- $f(x) = \sin x$  (restterm van orde  $2n + 1$ )
- $f(x) = \cos x$  (restterm van orde  $2n + 2$ )

toon aan dat, voor een vaste  $x$ , de restterm naar 0 nadert als de orde naar oneindig gaat.

**Oefening 4.8** Gebruik de resultaten uit oefening 4.7 om volgende getallen uit te rekenen tot op vijf decimalen na de komma nauwkeurig:

- $e$ ; b.  $\sin(\pi/10)$ ; c.  $\cos(\pi/10)$ .

**Oefening 4.9** Schrijf de formule van McLaurin met restterm van Lagrange op voor de volgende functies.

- $f(x) = \ln(1+x)$  (tot op orde  $n$ ; de restterm hoeft je niet uit te rekenen)

Men kan aantonen dat de restterm naar nul nadert voor  $x \in (-1, 1]$ .

- $f(x) = (1+x)^m$  waarbij  $m \in \mathbb{R}$  (tot op orde  $n$ ; de restterm hoeft je niet uit te rekenen)

Om de formule elegant te herschrijven voeren we “veralgemeende” binomiaalcoëfficiënten in:

$$\binom{m}{i} = \frac{m(m-1)(m-2) \cdots (m-i+1)}{i!}$$

Merk op dat we de gewone binomiaalcoëfficiënten terugvinden als  $m \in \mathbb{N}$ . Men kan aantonen dat de restterm naar nul nadert voor  $x \in (-1, 1]$ .

- $f(x) = \operatorname{sh} x$  en  $f(x) = \operatorname{ch} x$ . Toon aan dat de restterm naar nul gaat als  $n$  naar oneindig gaat.

**Oefening 4.10** Schrijf de formule van McLaurin tot op orde 4 met restterm van Liouville op voor de volgende functies.

- $f(x) = \sec x$
- $f(x) = \ln \cos x$
- $f(x) = \operatorname{tg} x$

## Reeks 5 Afgeleiden 3

### Berekenen van limieten met behulp van de formule van Taylor

De formule van Taylor biedt ons een alternatieve manier om, ingeval

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

de limiet

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

uit te rekenen. We maken dit duidelijk aan de hand van het volgende voorbeeld:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2(e^x - 1)}$$

We gebruiken de formule van Taylor, met restterm van Liouville :

$$\begin{aligned}\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^3}{3!}\lambda \text{ met } \lim_{x \rightarrow 0} \lambda = 0 \\ e^x &= 1 + x + x\mu \text{ met } \lim_{x \rightarrow 0} \mu = 0\end{aligned}$$

zodat

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2(e^x - 1)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{3!} - \frac{x^3}{3!}\lambda}{x^3 + x^3\mu} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\lambda}{1 + \mu} \\ &= -\frac{1}{6}\end{aligned}$$

**Oefening 5.1** Gebruik de formule van Taylor om de volgende limieten te berekenen.

a1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$

a2.  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{\pi - 2x}$

a3.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{x}{\ln x} \right)$

a4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \cos \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^x$

$$\text{b1. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2(e^x - 1)}$$

$$\text{b2. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x + \frac{x^3}{3}}{x^5 + x^4 \sin x}$$

$$\text{b3. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}$$

$$\text{b4. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2 \cos x}{\ln(1+x)}$$

$$\text{c1. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg } x - \sin x}{x^3}$$

$$\text{c2. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - \cos x)^2}{\text{tg}^3 x - \sin^3 x}$$

$$\text{c3. } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2 + \cos x}{x^3 \sin x} - \frac{3}{x^4} \right)$$

$$\text{c4. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{x^2}{\sin x} - \frac{2x^3}{\text{sh } x \tanh x}}{x^2 (\ln(1+x))^4}$$

## Extreme waarden van een functie in 1 veranderlijke

**Oefening 5.2** Bepaal de lokale maxima en minima van de volgende functies.

$$\text{a1. } f(x) = x^2 + (1 + 2x \text{tg } x) \cos^2 x$$

$$\text{a2. } f(x) = x^2 e^{-x}$$

$$\text{a3. } f(x) = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$$

$$\text{a4. } f(x) = x - \text{bgtg } x$$

$$\text{b1. } f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$$

$$\text{b2. } f(x) = \frac{e^x}{x}$$

**b3.**  $f(x) = \cos x \cos 2x$

**b4.**  $f(x) = |x + 2| + |x^2 - 5x + 6|$

**c1.**  $f(x) = x^{\frac{4}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}} \quad (x > 0)$

**c2.**  $f(x) = \sqrt{|x|}$

**c3.**  $f(x) = \left(x^2 + \frac{1}{2e}\right)^{x^2 + \frac{1}{2e}}$

**c4.**  $f(x) = \frac{e^{-(x^2+2x)}}{x^2 + 2x - 8}$

**Oefening 5.3a** Een raaklijn in een punt van de hyperbool  $xy = 16$  snijdt de coördinaatassen in de punten  $P$  en  $Q$ . Wanneer is de afstand van  $P$  tot  $Q$  het kortst?

**Oefening 5.3b** Een raam, gevormd onderaan door een rechthoek en bovenaan door een halve cirkel, heeft een constante omtrek  $l$ . Welke zijn de afmetingen als de oppervlakte maximaal wordt?

**Oefening 5.3c** Bepaal de vergelijking van de rechte door het punt  $(3, 4)$  die in het eerste kwadrant met de assen een driehoek vormt met minimale oppervlakte.

**Oefening 5.4a** Een rivier is 5 km breed. Een man met een roeiboot bevindt zich aan de ene oever in een punt  $P$ . Hij wenst het punt  $B$  aan de overkant te bereiken.  $B$  ligt op 6 km van  $A$ , waar  $A$  de (rechthoekige) overzijde is van  $P$ . Hij roeit met een snelheid van 2 km per uur, en wandelt met een snelheid van 4 km per uur. Waar moet hij met zijn boot aankomen om dit op de kortst mogelijke tijd te doen?

**Oefening 5.4b** Om 9 uur ligt het schip “Atlantic” op 65 km ten oosten van het schip “Pacific”. De “Atlantic” vaart westwaards met een snelheid van 10 km per uur. De “Pacific” vaart zuidwaarts met een snelheid van 15 km per uur. Wanneer zullen de twee schepen het dichtst bij elkaar zijn, en hoeveel is dan de afstand?

**Oefening 5.4c** Een gelijkbenige driehoek is ingeschreven in een cirkel met straal  $r$  en heeft tophoek  $2\alpha$ . Voor welke hoek  $\alpha$  is de omtrek van de driehoek extreem.

**Oefening 5.5a** Een kantoorgebouw wordt opgetrokken. De kosten voor de gelijkvloerse verdieping bedragen 1 miljoen Euro, voor de eerste verdieping 1,1 miljoen, voor de tweede 1,2 miljoen enzovoort. Voor de aankoop en registratie van de grond moet 5 miljoen Euro neergelegd worden. De jaarlijkse opbrengst is 0,2 miljoen Euro per verdieping. Hoeveel verdiepingen moeten opgetrokken worden om de periode van afschrijving (dit is de periode waarop de investering gerecupereerd

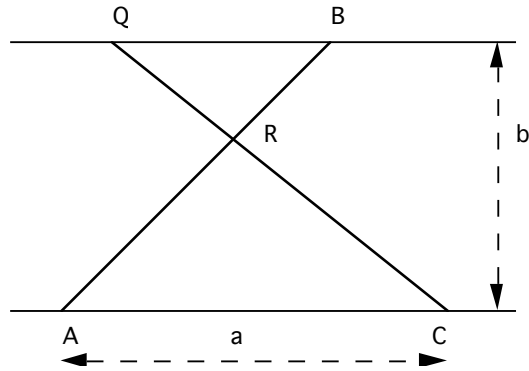


Figure 1: Het probleem van Viviani

wordt) minimaal te houden? Hoeveel bedraagt dan de afschrijvingsperiode?

**Oefening 5.5b** De intensiteit van een warmtebron is omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand tot de bron:

$$I = \frac{a}{r^2}$$

waarbij  $r$  de afstand tot de bron. We beschouwen nu twee bronnen, die op een afstand  $s$  van mekaar geplaatst worden. De bronnen zijn niet even intens: de constanten die erbij horen noemen we respectievelijk  $a$  en  $b$ . In welk punt gelegen tussen de twee bronnen zal de temperatuur het laagst zijn?

**Oefening 5.5c** (*het probleem van Viviani*) We beschouwen twee evenwijdige rechten, en een derde die de twee rechten snijdt in de punten  $A$  en  $B$ . Op de rechte door  $A$  nemen we een tweede punt  $C$  gelegen op een afstand  $a$  van  $A$ . Vanuit  $C$  trekken we een rechte die de rechte door  $B$  snijdt in een punt  $Q$ .  $R$  is het snijpunt van  $AB$  en  $CQ$  (zie Figuur 1). Hoe moeten we het punt  $Q$  kiezen opdat de som van de oppervlaktes van de driehoeken  $ACR$  en  $BQR$  minimaal zou zijn?

**Oefening 5.6a** De kabeltelevisiemaatschappij “Interbang” heeft 1000 klanten, die elk maandelijks 20 euro betalen. Elke verlaging van de prijs met 1 euro trekt 100 nieuwe klanten aan. Welke prijs zal de maatschappij aanrekenen om zo veel mogelijk inkomsten te hebben?

**Oefening 5.6b** Een boer moet een omheining aanleggen rond een rechthoekig perceel. Een zijde van zijn perceel ligt langs een rivier, en de aanliggende zijde langs een weg. De lengte van de twee rechthoekszijden  $x$  en  $y$  kan hij verder vrij kiezen, maar de oppervlakte van het perceel moet wel  $16000 \text{ m}^2$  bedragen, opdat de schapen van de boer voldoende gras zouden hebben. Aan de kant van de rivier moet geen omheining aangelegd worden, en de omheining aan de kant van de weg kost de helft meer dan die in open veld. Hoe zal de boer  $x$  en  $y$  kiezen om er zo goedkoop mogelijk vanaf te komen?

**Oefening 5.6c** Een foton beweegt van een punt  $A$  naar een punt  $B$ . Het punt  $A$  bevindt zich in een

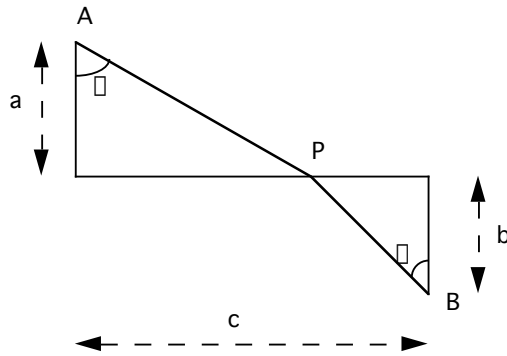


Figure 2: De wet van Snellius

bepaald medium (bijvoorbeeld vacuüm of lucht), en het punt  $B$  in een ander (bijvoorbeeld water of glas). De lichtsnelheid hangt af van het medium waarin het foton zich beweegt. Onderstel dat de twee media gescheiden worden door een vlak. Het foton volgt de baan  $APB$ , met  $P$  op het scheidingsvlak, waarvoor de reistijd minimaal is. Als  $v_1$  de snelheid in medium 1, en  $v_2$  de snelheid in medium 2, toon dan aan dat

$$(1) \quad \frac{\sin \alpha}{v_1} = \frac{\sin \beta}{v_2}$$

waarbij  $\alpha$  en  $\beta$  als Figuur 2. (1) wordt de *brekingswet van Snellius* genoemd.

## Reeks 6 De integraal van een continue functie 1

### Primitieve functies

**Oefening 6.1** Bewijs de volgende formules

- a.  $\int \sec x dx = \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + c$   
 $= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + c$
- b.  $\int \sec x dx = \ln |\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x| + c$   
 $= -\ln |\operatorname{cosec} x + \operatorname{cotg} x| + c$   
 $= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right| + c$   
 $= \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + c$
- c.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + c$

## Substitutie

**Oefening 6.2** Bereken de volgende onbepaalde integralen

**a1.**  $\int \frac{dx}{2x^2 + 2x + 5}$

**a2.**  $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 - 25}}$

**a3.**  $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}$

**a4.**  $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{x^2 + 6x}}$

**a5.**  $\int \frac{\sec \sqrt{x} dx}{\sqrt{x}}$

**a6.**  $\int (\sec 4x - 1)^2 dx$

**a7.**  $\int \frac{3x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 + 1} dx$

**a8.**  $\int \frac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}} dx$

**a9.**  $\int \sqrt{3x^2 + 5} dx$

**a10.**  $\int x \sqrt[3]{1-x^2} dx$

**a11.**  $\int x \cot x^2 dx$

**a12.**  $\int \frac{dx}{\operatorname{cosec} 2x - \cot 2x}$

**a13.**  $\int \frac{dx}{\sqrt{28 - 12x - x^2}}$

$$\mathbf{a14.} \int \frac{dx}{x^2 - 1}$$

$$\mathbf{a15.} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\mathbf{b1.} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^6}}$$

$$\mathbf{b2.} \int \frac{(x + 3)dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\mathbf{b3.} \int \frac{(x + 1)dx}{x^2 - 4x + 8}$$

$$\mathbf{b4.} \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 8}$$

$$\mathbf{b5.} \int \frac{(2 - x)dx}{4x^2 + 4x - 3}$$

$$\mathbf{b6.} \int \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2} dx$$

$$\mathbf{b7.} \int (1 + \operatorname{tg} x)^2 dx$$

$$\mathbf{b8.} \int \frac{\sec x \operatorname{tg} x}{a + b \sec x} dx$$

$$\mathbf{b9.} \int \frac{\sec x \operatorname{tg} x}{9 + 4 \sec^2 x} dx$$

$$\mathbf{b10.} \int \sqrt{25 - x^2} dx$$

$$\mathbf{b11.} \int \sqrt{3 - 2x - x^2} dx$$

$$\mathbf{b12.} \int \cos^2 x \sin x dx$$

$$\mathbf{b13.} \int \frac{dx}{4x^2 + 9}$$

$$\mathbf{b14.} \int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$$

$$\mathbf{b15.} \int \frac{dx}{x^2 - 4}$$

$$\mathbf{c1.} \int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}} dx$$

$$\mathbf{c2.} \int e^x \cos e^x dx$$

$$\mathbf{c3.} \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 9}}$$

$$\mathbf{c4.} \int \frac{2x-3}{4x^2-11} dx$$

$$\mathbf{c5.} \int x^2 \sqrt{x^3+2} dx$$

$$\mathbf{c6.} \int x^{-2} e^{1/x} dx$$

$$\mathbf{c7.} \int \frac{dx}{1 + \cos x}$$

$$\mathbf{c8.} \int \frac{xdx}{x^4+3}$$

$$\mathbf{c9.} \int \frac{(x+1)dx}{x^2-4x+8}$$

$$\mathbf{c10.} \int \sqrt{x^2-36} dx$$

$$\mathbf{c11.} \int \sqrt{4x^2-4x+5} dx$$

$$\mathbf{c12.} \int \frac{x^2 dx}{1-2x^3}$$

$$\mathbf{c13.} \int \frac{2x-7}{x^2+9} dx$$

$$\mathbf{c14.} \int \frac{(2x+3)dx}{9x^2-12x+8}$$

$$\mathbf{c15.} \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

### Partiële integratie

**Oefening 6.3** Bereken de volgende onbepaalde integralen

$$\mathbf{a1.} \int x \sin x dx$$

$$\mathbf{a2.} \int x \sqrt{1+x} dx$$

$$\mathbf{a3.} \int \sin^2 x dx$$

$$\mathbf{a4.} \int x^3 e^{2x} dx$$

$$\mathbf{a5.} \int \operatorname{bgtg} x dx$$

$$\mathbf{a6.} \int x^2 \ln(1-x) dx$$

$$\mathbf{b1.} \int x e^x dx$$

$$\mathbf{b2.} \int \operatorname{bgsin} x dx$$

$$\mathbf{b3.} \int \sec^3 x dx$$

**b4.**  $\int (x^2 + 7x - 5) \cos 2x dx$

**b5.**  $\int x^2 e^x dx$

**b6.**  $\int e^{ax} \sin bxdx$

**c1.**  $\int x^2 \ln x dx$

**c2.**  $\int x b g \sin x^2 dx$

**c3.**  $\int x^2 \sin x dx$

**c4.**  $\int e^{ax} \cos bxdx$

**c5.**  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$

**c6.**  $\int (x^2 + 1)(x^2 + 4)e^{2x} dx$

### De bepaalde integraal

**Oefening 6.4** Bereken de volgende bepaalde integralen

**a1.**  $\int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2 + 4}$

**a2.**  $\int_0^{2\pi/3} \frac{d\theta}{5 + 4 \cos \theta}$

**a3.**  $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos^2 t dt$

**a4.**  $\int_0^1 \frac{x^{3/2}}{1+x} dx$

**b1.**  $\int_1^8 (1 + \sqrt[3]{x}) dx$

**b2.**  $\int_1^e \ln x dx$

**b3.**  $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{2 + 3 \operatorname{tg} x}$

**b4.**  $\int_0^{16} \frac{x^{1/4}}{1 + x^{1/2}} dx$

**c1.**  $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

**c2.**  $\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{1 - \sin x}$

**c3.**  $\int_0^1 (1 - e^{-2x})^{-1/2} dx$

**c4.**  $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^5 \theta}{\cos^2 \theta} d\theta$

## Oppervlakte

**Oefening 6.5a** Bereken de oppervlakte van het vlak deel gelegen onder de parabool  $y = 6x - x^2$  en boven de parabool  $y = x^2 - 2x$ .

**Oefening 6.5b** Bereken de oppervlakte van het vlak deel gelegen boven de kromme  $y^3 = x^2$  en onder de parabool  $y = 2 - x^2$ .

**Oefening 6.5c** Bereken de oppervlakte van het begrensde vlak deel begrensd door de krommen  $y = 2x^2 e^x$  en  $y = -x^3 e^x$ .

**Oefening 6.6a** Bereken de oppervlakte ingesloten door de kromme  $y^2 = x^2 - x^4$ .

**Oefening 6.6b** Bepaal de oppervlakte van het domein begrensd door de  $y$ -as, de rechten  $y = -1$ ,  $y = 3$ , en de parabool  $x = 8 + 2y - y^2$ .

**Oefening 6.6c** Bepaal de oppervlakte van het gebied gelegen tussen de  $y$ -as en de parabool  $x = 4 - y^2$ .

**Oefening 6.7a** Bereken de oppervlakte van het gebied gelegen tussen de  $x$ -as en een boog van de cycloïde

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$

**Oefening 6.7b** Bereken de oppervlakte van het gebied begrensd door de gesloten kromme

$$\begin{cases} x = 2 + \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases}$$

**Oefening 6.7c** Bereken de oppervlakte van het gebied begrensd door de cardioïde

$$\begin{cases} x = a(2 \cos t - \cos 2t) \\ y = a(2 \sin t - \sin 2t) \end{cases}$$

## Reeks 7 De integraal van een continue functie 2

### Rationale functies

**Oefening 7.1** Bereken de volgende onbepaalde integralen

a1.  $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$

a2.  $\int \frac{3x + 5}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$

a3.  $\int \frac{x^2 + 2}{x^3 - 1} dx$

a4.  $\int \frac{\sin^4 x \cos x - \frac{1}{2} \sin 2x}{\sin^3 x + \cos^2 x - 4 \sin x + 3} dx$

a5.  $\int \frac{x^7 + x^5 + x^3 + x}{(x^2 + 2)^2 (x^2 + 3)^2} dx$

b1.  $\int \frac{dx}{a^2 - x^2}$

b2.  $\int \frac{x^4 - x^3 - 3x^2 - 2x + 2}{x^3 + x^2 - 2x} dx$

$$\text{b3. } \int \frac{2x^2 + 3}{(x^2 + 1)^2} dx$$

$$\text{b4. } \int \frac{x^2 + x + 2}{(x^2 + 2x + 3)^2} dx$$

$$\text{b5. } \int \frac{x^3 + x + 1}{(x^2 + 1)^2} dx$$

$$\text{c1. } \int \frac{x + 1}{x^3 + x^2 - 6x} dx$$

$$\text{c2. } \int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} dx$$

$$\text{c3. } \int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2} dx$$

$$\text{c4. } \int \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2 + 2)^3} dx$$

$$\text{c5. } \int \frac{3x^5 + 5x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 7x - 1}{x^3 + x^2 + x} dx$$

## Rationale functies van $\sin x$ en $\cos x$

**Oefening 7.2** Bereken de volgende onbepaalde integralen

$$\text{a1. } \int \sin^3 3x \cos^5 3x dx$$

$$\text{a2. } \int \sqrt{1 - \cos x} dx$$

$$\text{a3. } \int \cotg 3x \operatorname{cosec}^4 3x dx$$

$$\text{a4. } \int \frac{dx}{5 + 4 \sin x}$$

$$\text{a5. } \int \sin^2 x \cos^2 x dx$$

$$\mathbf{a6.} \int (\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^4 x) dx$$

$$\mathbf{b1.} \int \cos^5 x dx$$

$$\mathbf{b2.} \int \sin^4 x dx$$

$$\mathbf{b3.} \int \frac{dx}{1 + \sin x - \cos x}$$

$$\mathbf{b4.} \int \sin 3x \sin 2x dx$$

$$\mathbf{b5.} \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$\mathbf{b6.} \int \frac{dx}{3 + \cos 2x}$$

$$\mathbf{c1.} \int \sin^2 x \cos^3 x dx$$

$$\mathbf{c2.} \int \sin 3x \cos 5x dx$$

$$\mathbf{c3.} \int \operatorname{tg}^3 2x \sec^3 2x dx$$

$$\mathbf{c4.} \int \frac{dx}{2 + \cos x}$$

$$\mathbf{c5.} \int \frac{dx}{\operatorname{cosec} 2x - \operatorname{cotg} 2x}$$

$$\mathbf{c6.} \int \frac{\cos^2 2x}{1 + \cos 2x} dx$$

## Rationalisatie van irrationale functies

Oefening 7.3 Bereken de volgende onbepaalde integralen

a1.  $\int \frac{dx}{(1 + \sqrt[3]{x})^2 \sqrt{x}}$

a2.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}}$

a3.  $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2 + 2x - 1}}$

a4.  $\int \frac{\sqrt{9 - 4x^2}}{x} dx$

a5.  $\int \frac{x^2}{\sqrt{2x - x^2}} dx$

a6.  $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$

b1.  $\int \frac{x^3}{\sqrt{2x - x^2}} dx$

b2.  $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4 + x^2}}$

b3.  $\int \frac{\sqrt{4 + x^2}}{x^6} dx$

b4.  $\int \frac{dx}{(1 + x^2)^{5/2}}$

b5.  $\int \frac{dx}{(4x - 3)\sqrt{x^2 + 1}}$

b6.  $\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$

$$\text{c1. } \int \frac{\sqrt{x}}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} dx$$

$$\text{c2. } \int \frac{dx}{(1 + x^2)^{3/2}}$$

$$\text{c3. } \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

$$\text{c4. } \int \frac{(16 - 9x^2)^{3/2}}{x^6} dx$$

$$\text{c5. } \int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$$

$$\text{c6. } \int \frac{x dx}{\sqrt{(5 - 4x - x^2)^3}}$$

### Kracht, arbeid en energie

**Oefening 7.4** De lengte van een veer in evenwichtstoestand is  $x_0$ . Als we de veer uitrekken of inkrimpen tot een lengte  $x = x_0 + h$ , dan werkt op de veer een kracht  $F$  die de veer terugroept naar de evenwichtstoestand.  $F$  hangt af van  $h$ . Als we voor  $F$  de formule van Taylor opschrijven tot op orde 1, en hogere orde termen verwaarlozen, dan vinden we

$$F(h) = -kh$$

Dit is de *wet van Hooke*. Deze is in goede benadering geldig voor  $h$  klein. De constante  $k$  noemen we de veer constante.

1) Bepaal een formule voor  $E(h)$ , de energie die nodig is om de veer vanuit evenwichtslengte  $x_0$  uit te rekken (of in te krimpen) tot lengte  $x_0 + h$ .

2) Als gegeven is dat de energie die nodig is om de lengte van de veer uit te rekken van 21 naar 22 cm het dubbele is van de energie die nodig is om ze uit te rekken van 20 naar 21 cm, bepaal dan de lengte van de veer in evenwichtsstand.

3) De energie die nodig is om de veer vanuit evenwichtstoestand 10 cm langer te maken is 10 Joule. Bepaal de veerconstante  $k$ . Wat is de extra energie die nodig is om de veer nog 10 cm langer te maken?

Herhaal dat kracht gegeven wordt in Newton,  $1 \text{ N} = 1 \text{ kg m/sec}^2$ , en energie in Joule,  $1 \text{ J} = 1 \text{ N m} = 1 \text{ kg m}^2/\text{sec}^2$ .

**Oefening 7.5** Kracht wordt soms ook in kg uitgedrukt. 1 kilogram wordt dan geïdentificeerd met de kracht die het zwaartekrachtveld van de aarde uitoefent, m.a.w. 1 kg wordt geïdentificeerd met

9,81 Newton (de valversnelling is immers  $9,81 \text{ m/sec}^2$ ). Energie en arbeid kunnen dan worden uitgedrukt in kg m.

1) Een vat heeft hoogte  $h$ , en is gevuld met een vloeistof met dichtheid  $\sigma$ . De doorsnede van het vat met het horizontaal vlak op hoogte  $x$  heeft oppervlakte  $A(x)$ . Stel een formule op die toelaat om te berekenen hoeveel energie er nodig is om het vat vanbovenuit leeg te pompen, (m.a.w. om al de vloeistof op te tillen tot hoogte  $h$ ).

2) Ons vat is nu een cilindervormig biervat, met een inhoud van 50 liter en hoogte 50 cm. Het vat staat rechtop, en bier heeft dezelfde dichtheid als water (niet dezelfde smaak). Hoeveel energie is er nodig om het vat van bovenuit leeg te pompen. Schrijf het resultaat in kg m.

3) Zelfde vraag als het vat op zijn kant ligt.

4) Zelfde vraag, maar nu is heeft het vat de vorm van een omwentelingskegel, met hoogte 50 cm.

**Oefening 7.6** In een bassin bevindt zich een vloeistof met dichtheid  $\sigma$ . De druk op diepte  $x$  is dan  $x\sigma$ ; dit wil zeggen dat op een voorwerp dat zich op diepte  $x$  bevindt een kracht  $x\sigma$  per oppervlakteëenheid wordt uitgeoefend. Als we  $x$  in meter uitdrukken, en  $\sigma$  in kilogram per kubieke meter, dan staat  $x\sigma$  maal de oppervlakte in kilogram.

1) Aan een uiteinde wordt het bassin afgebakend door een stuwdam. Stel  $w(x)$  de breedte van de stuwdam op diepte  $x$ , en onderstel dat het bassin een diepte  $h$  heeft. Stel een formule op die toelaat om de kracht  $F$  uitgeoefend op de stuwdam te berekenen.

2) Bepaal  $F$  als de stuwdam trapeziumvormig is, met aan de onderkant basis  $b = 45$  meter, en aan de bovenkant basis  $B = 60$  meter, en de diepte van het bassin 10 meter is. Het bassin is gevuld met water.

3) Een zwembad is 25 meter lang en 10 meter breed. Aan de ene kant is de diepte 3 meter, en aan de andere 1 meter. De bodem heeft een lineaire helling. Bereken de kracht die het water uitoefent op de vier zijwanden.

## Reeks 8 Oneigenlijke integralen en booglengte

### Oneigenlijke integralen van de eerste soort

**Oefening 8.1** Bereken de volgende oneigenlijke integralen van de eerste soort

a1. 
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4}$$

a2. 
$$\int_{-\infty}^6 \frac{dx}{(4 + x^2)^2}$$

a3. 
$$\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{x^2 - 3}{e^x} dx$$

b1. 
$$\int_{-\infty}^0 e^{2x} dx$$

$$\mathbf{b2.} \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx$$

$$\mathbf{b3.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+4x^2}$$

$$\mathbf{c1.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

$$\mathbf{c2.} \int_1^{+\infty} 2^{-\ln x} dx$$

$$\mathbf{c3.} \int_{-\infty}^{+\infty} x 2^{-x^2} dx$$

## Oneigenlijke integralen van de tweede soort

**Oefening 8.2** Bereken de volgende oneigenlijke integralen van de tweede soort

$$\mathbf{a1.} \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$\mathbf{a2.} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{\sqrt{1-\sin x}}$$

$$\mathbf{a3.} \int_{-1}^1 \ln \frac{1+x}{1-x} \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\mathbf{b1.} \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$$

$$\mathbf{b2.} \int_0^1 x^2 \ln(1-x) dx$$

$$\mathbf{b3.} \int_{-\infty}^{12} \frac{dx}{(4-x)^2}$$

$$\mathbf{c1.} \int_0^2 \frac{dx}{2-x}$$

$$\mathbf{c2.} \int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2}$$

$$\mathbf{c3.} \int_0^{+\infty} \frac{\ln x dx}{(x+1)^2}$$

## Booglengte

**Oefening 8.3a** Bepaal de lengte van de boog met parametervergelijkingen

$$\begin{cases} x = \ln \sqrt{1+t^2} \\ y = \operatorname{bgtg} t \end{cases}$$

waarbij  $t \in [0, 1]$ .

**Oefening 8.3b** Bepaal de lengte van de boog met parametervergelijkingen

$$\begin{cases} x = 2 \cos t + \cos 2t + 1 \\ y = 2 \sin t + \sin 2t \end{cases}$$

waarbij  $t \in [0, 2\pi]$ .

**Oefening 8.3c** Bepaal de lengte van de cardioïde met parametervergelijkingen

$$\begin{cases} x = a(2 \cos t - \cos 2t) \\ y = a(2 \sin t - \sin 2t) \end{cases}$$

**Oefening 8.4** Bepaal de lengte van de boog met vergelijking

a.  $x = 3y^{3/2} - 1$ , waarbij  $y \in [0, 4]$

b.  $24xy = x^4 + 48$ , waarbij  $x \in [2, 4]$

c.  $y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$ , waarbij  $x \in [0, a]$

**Oefening 8.5** Bepaal de lengte van de boog met vergelijking in poolcoördinaten

a.  $\rho = e^{2\theta}$ , waarbij  $\theta \in [0, 2\pi]$

b.  $\rho = a \cos^4 \frac{\theta}{4}$ , geslotenkromme

c.  $\rho = a \sin^3 \frac{\theta}{3}$ , geslotenkromme

**Oefening 8.6a** Bepaal de lengte van de ruimtekromme met parametervergelijkingen

$$\begin{cases} x = t^4 \\ y = \frac{4}{3}t^3 \\ z = t^2 \end{cases}$$

waarbij  $t \in [-1, 1]$ .

**Oefening 8.6b** Bepaal de lengte van de ruimtekromme met parametervergelijkingen

$$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \\ z = e^t \end{cases}$$

waarbij  $t \in [0, T]$ .

**Oefening 8.6c** Bepaal de lengte van de ruimtekromme met parametervergelijkingen

$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \\ z = \frac{3t}{\pi} \end{cases}$$

waarbij  $t \in [0, \pi]$ .

**Oefening 8.7a** Bepaal de lengte van de ruimtekromme met vergelijkingen

$$\begin{cases} y = \sqrt{2ax} \\ z = \sqrt{2ax - x^2} + abg \cos \frac{a-x}{a} \end{cases}$$

tussen de punten  $(0, 0, 0)$  en  $(2a, 2a, \pi a)$ .

**Oefening 8.7b** Bepaal de lengte van de ruimtekromme met vergelijkingen

$$\begin{cases} x^2 = 3y \\ 2xy = 9z \end{cases}$$

tussen de punten  $(0, 0, 0)$  en  $(3, 3, 2)$ .

**Oefening 8.7c** Bepaal de lengte van de ruimtekromme met vergelijkingen

$$\begin{cases} y = abg \sin \frac{x}{a} \\ z = \frac{a}{4} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| \end{cases}$$

tussen de punten  $(0, 0, 0)$  en  $(x_0, y_0, z_0)$ .

## Reeks 9 Partiële afgeleiden, differentieerbaarheid, gradient en extreme waarden

**Oefening 9.1** Bepaal de matrix van de afgeleide van de functie  $\vec{F}$  in het punt  $\vec{x}$ .

$$\text{a) } \vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3; \vec{F} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + 2x + \cos y \\ y^2 + 2x + \sin x \\ \operatorname{tg} y \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2; \vec{F} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xyz \\ x^2 y^2 z^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; \vec{F} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x + e^y + e^z \\ e^{-x} + e^{-y} + e^{-z} \\ \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y \end{pmatrix}$$

**Oefening 9.2** Bereken de richtingsafgeleide  $D_{\vec{u}}f(\vec{a})$ .

$$\text{a1) } f(x,y,z) = xyz; \vec{a} = (-4, 2, 2); \vec{u} = (-1, 4, 7)$$

$$\text{a2) } f(x,y) = \operatorname{bgtg} \frac{x}{y}; \vec{a} = (1, 1); \vec{u} = (-1, 3)$$

$$\text{b1) } f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2; \vec{a} = (-1, 2, 3); \vec{u} = (0, 1, -3)$$

$$\text{b2) } f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}; \vec{a} = (0, 0); \vec{u} = (1, 2)$$

$$\text{c1) } f(x,y) = x \sin y; \vec{a} = (0, \pi/2); \vec{u} = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$$\text{c2) } f(x,y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}; \vec{a} = (1, 1); \vec{u} = (-1, 3)$$

**Oefening 9.3** Bereken de totale differentiaal van volgende functies

$$\text{a) } f(x,y) = \operatorname{Intg} \frac{x}{y}$$

$$\text{b) } f(x,y) = x \ln y + y \ln \frac{\sin x}{\sin y}$$

$$\text{c) } f(x,y,z) = \ln(e^x + e^y + e^z)$$

**Oefening 9.4** Bepaal de vergelijking van het raakvlak aan het oppervlak met vergelijking  $z = f(x, y)$  in het punt  $\vec{a}$ .

a)  $z = x^2 - y^2$ ,  $\vec{a} = (1, 1, 0)$

b)  $z = \sin x \sin y$ ,  $\vec{a} = (\pi/2, 0, 0)$

c)  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\vec{a} = (1, 1, \sqrt{2})$

**Oefening 9.5a** De algemene gaswet stelt dat de druk  $p$ , de temperatuur  $T$ , en het volume  $V$  van een gas voldoen aan de betrekking

$$pV = kT$$

waarbij  $k$  een constante is. Toon aan dat

$$V \frac{\partial p}{\partial V} = -p \text{ en } V \frac{\partial p}{\partial V} + T \frac{\partial p}{\partial T} = 0$$

**Oefening 9.5b** Bekijk een driehoek met zijden  $a$ ,  $b$  en  $c$ , en  $\theta$  de hoek ingesloten tussen de zijden met lengtes  $b$  en  $c$ . De cosinusregel stelt dat

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta$$

De lengtes van de zijden en de hoek  $\theta$  veranderen met de tijd. Op een tijdstip  $t_0$  hebben we  $b_0 = 10$  cm,  $c_0 = 15$  cm en  $\theta_0 = \pi/3$ .

1. Bepaal  $a_0$ ;
2. als gegeven is dat  $c$  en  $\theta$  constant blijven, bepaal dan de snelheid waarmee  $a$  verandert in functie van  $b$  op het tijdstip  $t_0$ ;
3. gebruik dit om in benadering te bepalen hoeveel  $a$  verandert als  $b$  met 1 cm afneemt;
4. als gegeven is dat  $b$  en  $c$  constant blijven, bepaal dan de snelheid waarmee  $a$  verandert in functie van  $\theta$  op het tijdstip  $t_0$ ;
5. als gegeven is dat  $a$  en  $b$  constant blijven, bepaal dan de snelheid waarmee  $c$  verandert in functie van  $\theta$  op het tijdstip  $t_0$ .

**Oefening 9.5c** Bekijk een driehoek met zijden  $a$ ,  $b$  en  $c$ , en  $\theta$  de hoek ingesloten tussen de zijden met lengtes  $b$  en  $c$ . De oppervlakte  $S$  van de driehoek wordt gegeven door de formule

$$S = \frac{1}{2}bc \sin \theta$$

Op een tijdstip  $t_0$  hebben we  $b_0 = 20$  cm,  $c_0 = 15$  cm en  $\theta_0 = \pi/3$ .

1. Bepaal de oppervlakte  $S_0$  op tijdstip  $t_0$ ;
2. als gegeven is dat  $c$  en  $\vartheta$  constant blijven, bepaal dan de snelheid waarmee  $S$  verandert in functie van  $b$  op het tijdstip  $t_0$ ;
3. als gegeven is dat  $b$  en  $c$  constant blijven, bepaal dan de snelheid waarmee  $S$  verandert in functie van  $\theta$  op het tijdstip  $t_0$ ;
4. gebruik dit om in benadering te bepalen hoeveel  $S$  verandert als  $\theta$  verminderd wordt met  $1^\circ$ ;
5. als gegeven is dat  $S$  en  $\theta$  constant blijven, bepaal dan de snelheid waarmee  $c$  verandert in functie van  $b$  op het tijdstip  $t_0$ .

**Oefening 9.6** Een harmonische functie  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  is een functie die voldoet aan de vergelijking van Laplace:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Bewijs dat de volgende functies harmonische functies zijn

- a)  $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$
- b)  $f(x,y) = e^{-y} \cos x$
- c)  $f(x,y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

**Oefening 9.7** Toon aan dat volgende functies oplossingen zijn van de golfvergelijking

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

- a)  $f(x,t) = (Ax + B)(Ct + D)$
- b)  $f(x,t) = (Ae^{kx} + Be^{-kx})(Ce^{ckt} + De^{-ckt})$  ( $k$  constant)
- c)  $f(x,t) = g(x - ct)$  ( $g$  tweemaal differentieerbaar)

**Oefening 9.8** Schrijf de formule van Taylor (zonder restterm) op voor de volgende functies

- a)  $f(x,y) = x^y$ , rond  $(1,1)$ , tot op orde 3
- b)  $f(x,y,z) = \sin(x^2 + 2y^2 + z)$ , rond  $(0,0,0)$ , tot op orde 3
- c)  $f(x,y,z) = \sin x \sin y \cos z$ , rond  $(0,0,0)$ , tot op orde 4

## Extreme waarden van functies in $n$ veranderlijken

**Oefening 9.9** Onderzoek de extreme waarden van de volgende functies

a)  $f(x, y) = 2x^4 + 4x^3y + 3y^2$

b)  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 25$

c)  $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$

**Oefening 9.10a** Bepaal het punt in het vlak waarvoor de som van de kwadraten van de afstanden tot de rechten  $x = 0$ ,  $y = 0$  en  $x + 2y - 16$  minimaal is.

**Oefening 9.10b** Bepaal het punt in het vlak met vergelijking  $2x - y + 2z = 16$  dat het dichtst bij de oorsprong ligt.

**Oefening 9.10c** Verdeel 120 in drie delen zodat de som van de produkten van twee verschillende delen maximaal is.

# Antwoorden

**Oefening 1.2** a.  $3/5$ ;  $1$ ;  $2$ ;  $5/2$ ;  $+\infty$ ;  $\sqrt{1/3}$ ;  $-15$   
b.  $0$ ;  $0$ ;  $1/2$ ;  $e^{-14}$ ;  $3$ ;  $1$ ;  
c.  $0$ ;  $e^6$ ;  $3$ ;  $5/2$ ;  $+\infty$  als  $x \geq 1$ ,  $0$  als  $0 < x < 1$ ;  $0$ .

**Oefening 1.3** a.  $e^{-1}$ ;  $e^2$ ; b.  $e^{-2}$ ;  $e^2$ ; c.  $e^{-2}$ ;  $e^{ab}$ .

## Oefening 1.5

a  $1/7$ ;  $9/2$ ;  $1/3$

b  $6$ ;  $2x$ ;  $6/5$

c  $3$ ;  $5/2\sqrt{5x+1}$ ;  $0$

## Oefening 2.2

a linkerlimiet :  $1/3$ ; rechterlimiet :  $0$

b linkerlimiet :  $1/3$ ; rechterlimiet :  $1$

c linkerlimiet :  $0$ ; rechterlimiet :  $1$

**Oefening 2.5** a. 1)  $1$ ; 2)  $2$  3) limiet bestaat niet: stel  $y = mx$ ; 4)  $0$ ;  
5) limiet bestaat niet: stel  $y = mx$  en  $x = 0$ ;  
6)

$$\left| \frac{y^3}{|x|+y^2} \right| \leq |y| \left| \frac{y^2}{(|x|+y^2)} \right| \leq |y| \rightarrow 0$$

b. 1) limiet bestaat niet: stel  $y = mx$ ;  
2)  $0$ ; 3)  $1$ ; 4)  $2$  5)  $1/3$ ;  
6) limiet bestaat niet: stel  $y = mx$  en  $y = 0$ ;  
c. 1)  $1$ ; 2)  $1/2$ ; 3) limiet bestaat niet: stel  $y = mx$ ;  
4)

$$0 \leq \left| \frac{x^3}{x^2+y^4} \sin \frac{1}{x^2+y^2} \right| \leq |x| \rightarrow 0$$

5) limiet bestaat niet: stel  $y = mx$  en  $y^3 = -x^2$ ; 6)  $1/3$

**Oefening 2.6 a1.** overal continu;

**a2.** linkscontinu, maar niet rechtscontinu in 0 en 2; overal elders continu;

**b1.** nergens continu;

**b2.** niet continu in  $x = \frac{1}{k\pi}$  met  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ; niet continu in  $x = 0$ ;

**c1.** niet continu in 0;

**c2.** overal continu

**Oefening 2.7 a1.** overal continu, behalve in  $(0,0)$ ;

**a2.** overal continu;

**b1.** overal continu, behalve in  $\{(x,x) \mid x \neq 0\}$ ;

**b2.** overal continu, behalve in  $\{(x,y) \mid x \in \mathbb{Z} \text{ of } y \in \mathbb{Z}\}$ ;

**c1.** overal continu, behalve in  $\{(x,y) \mid x = 0 \text{ of } y = 0\}$ ;

**c2.** overal continu, behalve in  $(0,0)$

**Oefening 3.2**

**a1.**  $y' = e^x \left( \frac{1}{x} + \ln x \right)$

**a2.**  $y' = \frac{e^{\sqrt{1+2x}}}{1+2x} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1+2x}} \right)$

**a3.**  $y' = \frac{x^2}{(1-x^4)}$

**a4.**  $y' = \cos x \cos(\sin x)$

**a5.**  $y' = \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin^2 x}$

**b1.**  $y' = x^x(1+\ln x)$

**b2.**  $y' = 2x^{\ln x} \frac{\ln x}{x}$

**b3.**  $y' = 10(6v-4)x^4$

**b4.**  $y' = \left( \operatorname{tg}^4 \sqrt{x^2+1} - \operatorname{tg}^2 \sqrt{x^2+1} + 1 \right) \left( \sec^2 \sqrt{x^2+1} \right) \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

**b5.**  $y' = \frac{3}{5} \left( 1 + xe^{\sqrt{x}} \right)^{-\frac{2}{5}} e^{\sqrt{x}} \left( 1 + \frac{\sqrt{x}}{2} \right)$

$$\text{c1. } y' = \frac{4}{2x+3} \sec^2 \ln(2x+3)^2$$

$$\text{c2. } y' = \left( \frac{1}{x} + (\ln x)^2 + \ln x \right) x^x x^{x^x}$$

$$\text{c3. } y' = \frac{(a^2 - b^2) \sin x}{(b + a \cos x)^2 + (a + b \cos x)^2}$$

$$\text{c4. } y' = \frac{\sec^2 \frac{x}{2}}{\left(2 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)^2 - 3}$$

$$\text{c5. } y' = 6e^{3x} \operatorname{tge}^{3x} \sec^2 e^{3x}$$

**Oefening 3.3** a  $y = x$ ; b  $y = -3x - 10$ ; c  $y = x - 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

**Oefening 3.4** a bgtg  $6/7$ ; b bgtg  $2\sqrt{2}$ ; c  $\pi/4$

**Oefening 3.6**

$$\text{a } \frac{dV}{dw} = \frac{w^2}{\sqrt{3}}; \text{ b } \frac{dV}{dz} = \frac{3z^2}{2\sqrt{2}}; \text{ c } \frac{dV}{dW} = \frac{3}{2} \sqrt{W}$$

**Oefening 3.7**

$$\text{a } \frac{\partial A}{\partial r} = \theta r; \text{ b } \frac{\partial A}{\partial \theta} = \frac{r^2}{2}; \text{ c } \frac{\partial \theta}{\partial r} = -\frac{4A}{r^3}$$

**Oefening 3.8**

$$\text{a } \frac{dV}{dt} = -225 \text{ cm}^3/\text{sec}; \text{ b } \frac{dV}{dt} = 1600\pi \text{ cm}^3/\text{min}; \text{ c } \frac{dS}{dt} = 320\pi \text{ cm}^2/\text{min}$$

**Oefening 4.1** a In het punt  $(3, 6)$ . De raaklijn heeft vergelijking  $x - y + 3 = 0$ , en de normaal  $x + y - 9 = 0$ .

$$\text{b } dS/dt = 3k^3 t^2/2$$

c  $v(3) = -2,8$  km/uur;  $v(5) = 86/\sqrt{97}$  km/uur;  $v = 0$  om 3 uur 16 minuten 48 seconden.

**Oefening 4.2** a  $a = 1$ ,  $b = -3$ ,  $c = 5$

b  $a = 1$ ,  $b = -1$ ,  $c = 4$ ,  $d = -3$

c  $dh/dt = -9/4$  cm/min

**Oefening 4.3 a** Wanneer de hoek tussen de halve rechten waarop de trein en de wagen zich bevinden scherp is: snelheid 25 km/uur; wanneer deze hoek stomp is: snelheid  $25\sqrt{3}$  km/uur.

**b** 5 km/uur.

**c**  $dS/dt = -24\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>/min.

**Oefening 4.6 a** 1; -1; **b** 0;  $-4/\pi$ ; **c** -1; 0.

### Oefening 4.7

$$\text{a. } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + e^{\theta x} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\text{b. } \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos(\theta x)$$

$$\text{c. } \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos(\theta x)$$

### Oefening 4.9

$$\text{a. } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + r_n$$

$$\text{b. } (1+x)^m = 1 + mx + \binom{m}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + \dots + \binom{m}{n}x^n + r_n(x)$$

$$\text{c. } \sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cosh(\theta x)$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cosh(\theta x)$$

### Oefening 4.10

$$\text{a. } \sec x = 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{35}{6}x^4 + \dots$$

$$\text{b. } \ln \cos x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \dots$$

$$\text{c. } \operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \dots$$

- Oefening 5.1 a.** 2;  $1/2$ ;  $-3/2$ ;  $1/\sqrt{e}$ .  
**b.**  $-1/6$ ;  $1/60$ ;  $1/3$ ; 0.  
**c.**  $1/2$ ;  $1/3$ ;  $1/60$ ;  $-1/6$ .

**Oefening 5.2 a1.**  $x = 0$ : minimum

**a2.**  $x = 0$ : minimum;  $x = 2$ : maximum

**a3.**  $x = 0$ : minimum;  $x = -1$ : maximum

**a4.** geen extremum

**b1.**  $x = 1$  en  $x = -2$ : minimum;  $x = -1/2$ : maximum

**b2.**  $x = 1$ : minimum

**b3.**  $x = 2k\pi$  en  $x = \pm\phi + (2k+1)\pi$ : maxima

$$x = (2k+1)\pi \text{ en } x = \pm\phi + 2k\pi: \text{ minima } (k \in \mathbb{Z} \text{ en } \phi = b\text{g}\cos\sqrt{\frac{1}{6}})$$

**b4.**  $x = 2$ : minimum

**c1.**  $x = 0$ : minimum;  $x = 4/5$ : maximum

**c2.**  $x = 0$ : minimum

**c3.**  $x = \pm 1/\sqrt{2e}$ : minimum;  $x = 0$ : maximum

**c4.**  $x = -1$ : minimum;  $x = -1 \pm 2\sqrt{2}$ : maximum

**Oefening 5.3 a.** in de punten  $(4, 4)$  en  $(-4, -4)$

**b.** lengte  $2l/(\pi+4)$  en breedte  $l/(\pi+4)$

**c.**  $y - 4 = -\frac{4}{3}(x - 3)$

**Oefening 5.4 a.** op  $5/\sqrt{3}$  km van A

**b.** te 11 uur

**c.** maximum voor  $\alpha = \pi/6$

**Oefening 5.5 a.** 10 verdiepingen (de gelijkvloerse inbegrepen); de afschrijvingsperiode bedraagt dan 10 jaar en 3 maanden.

**b.** op afstand  $\sqrt[3]{as}/(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})$  van de bron met bijhorende constante  $a$ .

**c.**  $Q$  wordt gekozen op afstand  $a(\sqrt{2} - 1)$  van  $B$ .

**Oefening 5.6 a.** 15 euro **b.** 80 m bij 200 m.

**Oefening 6.2**

**a1.**  $\frac{1}{3}\text{bgtg}\frac{2x+1}{3} + c$

**a2.**  $\frac{1}{3}\ln|3x + \sqrt{9x^2 - 25}| + c$

**a3.**  $\sqrt{x^2 + 2x - 3} + \ln|x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x - 3}| + c$

$$\mathbf{a4.} \quad \sqrt{x^2 + 6x} + c$$

$$\mathbf{a5.} \quad \ln \left| \frac{1 + \sin \sqrt{x}}{1 - \sin \sqrt{x}} \right| + c$$

$$\mathbf{a6.} \quad \frac{1}{4} \operatorname{tg} 4x - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 + \sin 4x}{1 - \sin 4x} \right| + x + c$$

$$\mathbf{a7.} \quad \frac{3}{2} x^2 - 4x + 4 \operatorname{bgtg} x + c$$

$$\mathbf{a8.} \quad 4 \operatorname{bgsin} \frac{x-2}{2} - \sqrt{4x-x^2} + c$$

$$\mathbf{a9.} \quad \frac{x}{2} \sqrt{3x^2+5} + \frac{5}{2\sqrt{3}} \ln |x + \sqrt{x^2+5/3}|$$

$$\mathbf{a10.} \quad -\frac{3}{8} (1-x^2)^{4/3} + c$$

$$\mathbf{a11.} \quad \frac{1}{2} \ln |\sin x^2| + c$$

$$\mathbf{a12.} \quad \ln |\sin x| + c$$

$$\mathbf{a13.} \quad \operatorname{bgsin} \frac{x+6}{8} + c$$

$$\mathbf{a14.} \quad \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + c$$

$$\mathbf{a15.} \quad \operatorname{bgsec} x + c$$

$$\mathbf{b1.} \quad \frac{1}{3} \operatorname{bgsin} x^3 + c$$

$$\mathbf{b2.} \quad -\sqrt{1-x^2} + 3 \operatorname{bgsin} x + c$$

$$\mathbf{b3.} \quad \frac{1}{2} \ln |x^2 - 4x + 8| + \frac{3}{2} \operatorname{bgtg} \frac{x-2}{2} + c$$

$$\mathbf{b4.} \quad \ln \sqrt{\left| \frac{x+2}{x+4} \right|} + c$$

$$\mathbf{b5.} \quad \frac{1}{16} \ln \frac{|2x-1|^3}{|2x+3|^7} + c$$

$$\mathbf{b6.} \quad \frac{x^2+x+1}{x+1} + c$$

$$\mathbf{b7.} \quad \operatorname{tg} x - 2 \ln |\cos x| + c$$

$$\mathbf{b8.} \quad \frac{1}{b} \ln |a + b \sec x| + c$$

$$\mathbf{b9.} \quad \frac{1}{6} b \operatorname{tg} \frac{2 \sec x}{3} + c$$

$$\mathbf{b10.} \quad \frac{1}{2} x \sqrt{25-x^2} + \frac{25}{2} b \operatorname{g} \sin \frac{x}{5} + c$$

$$\mathbf{b11.} \quad \frac{1}{2} (x+1) \sqrt{3-2x-x^2} + 2b \operatorname{g} \sin \frac{x+1}{2} + c$$

$$\mathbf{b12.} \quad -\frac{1}{3} \cos^3 x + c$$

$$\mathbf{b13.} \quad \frac{1}{6} b \operatorname{tg} \frac{2x}{3} + c$$

$$\mathbf{b14.} \quad -\sqrt{5-4x-x^2} + b \operatorname{tg} \frac{x+2}{3} + c$$

$$\mathbf{b15.} \quad \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c$$

$$\mathbf{c1.} \quad 2\sqrt{x} \left( 1 + \frac{2x}{3} + \frac{x^2}{5} \right) + c$$

$$\mathbf{c2.} \quad \sin e^x + c$$

$$\mathbf{c3.} \quad \frac{1}{2} \ln |2x + \sqrt{4x^2+9}| + c$$

$$\mathbf{c4.} \quad \frac{1}{4} \ln |4x^2 - 11| - \frac{3}{4\sqrt{11}} \ln \left| \frac{2x - \sqrt{11}}{2x + \sqrt{11}} \right| + c$$

$$\mathbf{c5.} \quad \frac{2}{9} \sqrt{(x^3 + 2)^3} + c$$

$$\mathbf{c6.} \quad -e^{1/x} + c$$

$$\mathbf{c7.} \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} + c$$

$$\mathbf{c8.} \quad \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{bgtg} \frac{x^2}{\sqrt{3}} + c$$

$$\mathbf{c9.} \quad \frac{1}{2} \ln |x^2 - 4x + 8| + \frac{3}{2} \operatorname{bgtg} \frac{x-2}{2} + c$$

$$\mathbf{c10.} \quad \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 36} - 18 \ln |x + \sqrt{x^2 - 36}| + c$$

$$\mathbf{c11.} \quad \frac{1}{4} (2x - 1) \sqrt{4x^2 - 4x + 5} + \ln |(2x - 1) + \sqrt{4x^2 - 4x + 5}| + c$$

$$\mathbf{c12.} \quad -\frac{1}{6} \ln |1 - 2x^3| + c$$

$$\mathbf{c13.} \quad \ln(x^2 + 9) - \frac{7}{3} \operatorname{bgtg} \frac{x}{3} + c$$

$$\mathbf{c14.} \quad \frac{1}{9} \ln |9x^2 - 12x + 8| + \frac{13}{18} \operatorname{bgtg} \frac{3x-2}{2} + c$$

$$\mathbf{c15.} \quad \ln |x + \sqrt{x^2 + 1}| + c$$

### Oefening 6.3

$$\mathbf{a1.} \quad -x \cos x + \sin x + c$$

$$\mathbf{a2.} \quad -\frac{4}{15} (1+x)^{5/2} + \frac{2}{3} x (1+x)^{3/2} + c$$

$$\mathbf{a3.} \quad \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + c$$

$$\mathbf{a4.} \quad e^{2x} \left( \frac{x^3}{2} - \frac{3x^2}{4} + \frac{3x}{4} - \frac{3}{8} \right) + c$$

$$\mathbf{a5.} \quad x \operatorname{bgtg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

$$\mathbf{a6.} \quad \frac{x^3}{3} \ln|1-x| - \frac{1}{3} \left( \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln|1-x| \right) + c$$

$$\mathbf{b1.} \quad (x-1)e^x + c$$

$$\mathbf{b2.} \quad x \operatorname{bgsin} x + \sqrt{1-x^2} + c$$

$$\mathbf{b3.} \quad \frac{1}{2} \sec x \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + c$$

$$\mathbf{b4.} \quad \frac{1}{2} (x^2 + 7x - 5) \sin 2x + \frac{1}{4} (2x + 7) \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + c$$

$$\mathbf{b5.} \quad (x^2 - 2x + 2)e^x + c$$

$$\mathbf{b6.} \quad \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + c$$

$$\mathbf{c1.} \quad \frac{x^3}{3} \ln|x| - \frac{x^3}{9} + c$$

$$\mathbf{c2.} \quad \frac{1}{2} x^2 \operatorname{bgsin} x^2 + \frac{1}{2} \sqrt{1-x^4} + c$$

$$\mathbf{c3.} \quad -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c$$

$$\mathbf{c4.} \quad \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + c$$

$$\mathbf{c5.} \quad \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{bgsin} \frac{x}{a} + c$$

$$\mathbf{c6.} \quad \left( \frac{1}{2} x^4 - x^3 + 4x^2 - 4x + 4 \right) e^{2x} + c$$

### Oefening 6.4

$$\mathbf{a1.} \frac{\pi}{4} ; \mathbf{a2.} \frac{\pi}{9} ; \mathbf{a3.} \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} ; \mathbf{a4.} -\frac{4}{3} + \frac{\pi}{2}$$

$$\mathbf{b1.} \frac{73}{4} ; \mathbf{b2.} 1 ; \mathbf{b3.} \frac{\pi}{26} + \frac{3}{26} \ln \frac{25}{8} ; \mathbf{b4.} 4 \left( \frac{2}{3} + \text{bgtg } 2 \right)$$

$$\mathbf{c1.} 2 ; \mathbf{c2.} 1 + \sqrt{3} ; \mathbf{c3.} \ln(e + \sqrt{e^2 - 1}) ; \mathbf{c4.} \frac{23\sqrt{2}}{12} - \frac{8}{3}$$

### Oefening 6.5

$$\mathbf{a.} \frac{64}{3} ; \mathbf{b.} \frac{32}{15} ; \mathbf{c.} \frac{18}{e^2} - 2$$

### Oefening 6.6

$$\mathbf{a.} \frac{4}{3} ; \mathbf{b.} 30 + \frac{2}{3} ; \mathbf{c.} \frac{32}{3}$$

### Oefening 6.7

$$\mathbf{a.} 3\pi ; \mathbf{b.} 4\pi ; \mathbf{c.} 6\pi a^2$$

### Oefening 7.1

$$\mathbf{a1.} \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c \text{ als } a \neq 0; \quad -\frac{1}{x} + c \text{ als } a = 0$$

$$\mathbf{a2.} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{4}{x-1} + c$$

$$\mathbf{a3.} \ln|x-1| - \frac{2}{\sqrt{3}} \text{bgtg} \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2}\right) + c$$

$$\mathbf{a4.} \frac{1}{2} (1 + \sin x)^2 + \ln(2 + \sin x)^{3/2} (\sin x - 2)^{7/2} + c$$

$$\mathbf{a5.} \frac{5}{2(x^2+2)} + \frac{10}{x^2+3} + \ln \frac{(x^2+2)^{19/2}}{(x^2+3)^9} + c$$

$$\mathbf{b1.} \quad \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + c \text{ als } a \neq 0; \quad \frac{1}{x} + c \text{ als } a = 0$$

$$\mathbf{b2.} \quad \ln \left| \frac{(x+2)^3}{x(x-1)} \right| + \frac{x^2}{2} - 2x + c$$

$$\mathbf{b3.} \quad \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} + \frac{5}{2} \operatorname{bgtg} x + c$$

$$\mathbf{b4.} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{bgtg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2(x^2+2x+3)} + c$$

$$\mathbf{b5.} \quad \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \operatorname{bgtg} x + c$$

$$\mathbf{c1.} \quad -\frac{1}{6} \ln|x| - \frac{2}{15} \ln|x+3| + \frac{3}{10} \ln|x-2| + c$$

$$\mathbf{c2.} \quad \frac{x^2}{2} + 2 \ln|x| - \frac{1}{x} - 2 \ln|x-1| + c$$

$$\mathbf{c3.} \quad \operatorname{bgtg} x + \frac{1}{2} \ln(x^2+2) + c$$

$$\mathbf{c4.} \quad \frac{1}{2} \ln(x^2+2) - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{bgtg} \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{(x^2+2)^2} + c$$

$$\mathbf{c5.} \quad x^3 + x^2 + x - \ln|x| + \frac{3}{2} \ln(x^2+x+1) + \frac{11}{\sqrt{3}} \operatorname{bgtg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$$

### Oefening 7.2

$$\mathbf{a1.} \quad -\frac{1}{18} \cos^6 3x + \frac{1}{24} \cos^8 3x + c$$

$$\mathbf{a2.} \quad -2\sqrt{2} \cos \frac{x}{2} + c$$

$$\mathbf{a3.} \quad -\frac{1}{12} \operatorname{cosec}^4 3x + c$$

$$\mathbf{a4.} \quad \frac{2}{3} \operatorname{bgtg} \left( \frac{5}{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{4}{3} \right) + c$$

$$\mathbf{a5.} \quad \frac{x}{8} - \frac{1}{32} \sin 4x + c$$

$$\mathbf{a6.} \quad 2 \operatorname{tg} x - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - 2x + c$$

$$\mathbf{b1.} \quad \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + c$$

$$\mathbf{b2.} \quad \frac{3x}{8} - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c$$

$$\mathbf{b3.} \quad \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - \ln \left| 1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + c$$

$$\mathbf{b4.} \quad \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{10} \sin 5x + c$$

$$\mathbf{b5.} \quad \sec x + c$$

$$\mathbf{b6.} \quad \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{bgtg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + c$$

$$\mathbf{c1.} \quad \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + c$$

$$\mathbf{c2.} \quad \frac{5}{16} \sin 3x \sin 5x + \frac{3}{16} \cos 3x \cos 5x + c$$

$$\mathbf{c3.} \quad \frac{1}{10} \sec^5 2x - \frac{1}{6} \sec^3 2x + c$$

$$\mathbf{c4.} \quad \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{bgtg} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + c$$

$$\mathbf{c5.} \quad \ln |\sin x| + c$$

$$\mathbf{c6.} \quad \frac{1}{2} (\sin 2x + \operatorname{tg} x - 2x) + c$$

### Oefening 7.3

$$\mathbf{a1.} \quad -\frac{3\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} + 3 \operatorname{bgtg} \sqrt[6]{x} + c$$

$$\mathbf{a2.} \quad 2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} + 4\ln|\sqrt[4]{x} - 1| + c$$

$$\mathbf{a3.} \quad -\operatorname{bgsin} \frac{1-x}{2x} + c = \operatorname{bgtg}(\sqrt{3x} + \sqrt{3x^2 + 2x - 1}) + c_1$$

$$\mathbf{a4.} \quad \frac{3}{2}\ln(3 - \sqrt{9 - 4x^2}) - \frac{3}{2}\ln(3 + \sqrt{9 + 4x^2}) + \sqrt{9 - 4x^2} + c$$

$$\mathbf{a5.} \quad \frac{3}{2}\operatorname{bgsin}(x-1) - \frac{x+3}{2}\sqrt{2x-x^2} + c$$

$$\mathbf{a6.} \quad 2\ln(\sqrt{x} + 1) + c$$

$$\mathbf{b1.} \quad \frac{5}{2}\operatorname{bgsin}(x-1) - 4\sqrt{2x-x^2} + \frac{1}{3}\sqrt{(2x-x^2)^3} - \frac{3}{2}(x-1)\sqrt{(2x-x^2)^3}$$

$$\mathbf{b2.} \quad -\frac{1}{4x}\sqrt{x^2+4} + c$$

$$\mathbf{b3.} \quad \frac{1}{48x^3}\sqrt{(x^2+4)^3} - \frac{1}{5x^5}\sqrt{(x^2+4)^5} + c$$

$$\mathbf{b4.} \quad \frac{x(2x^2+3)}{3\sqrt{(x^2+1)^3}} + c$$

$$\mathbf{b5.} \quad \frac{1}{5}\ln \left| \frac{x + \sqrt{1+x^2} - 2}{1 + 2\sqrt{1+x^2} + 2x} \right| + c$$

$$\mathbf{b6.} \quad \frac{12}{7}\left(1 + \sqrt[4]{x}\right)^{7/3} - 3\left(1 + \sqrt[4]{x}\right)^{4/3} + c$$

$$\mathbf{c1.} \quad \frac{6}{5}x^{5/6} - 4\sqrt{x} + 18x^{1/6} + \frac{3x^{1/6}}{1+x^{1/3}} - 21\operatorname{bgtg}x^{1/6} + c$$

$$\mathbf{c2.} \quad \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} + c$$

$$\mathbf{c3.} \quad \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-4} + 2\ln|x + \sqrt{x^2-4}| + c$$

$$\text{c4. } -\frac{1}{80} \left( \frac{16-9x^2}{x^2} \right)^{5/2} + c$$

$$\text{c5. } 2\sqrt{x+4} - 2\ln \left| \frac{2+\sqrt{x+4}}{2-\sqrt{x+4}} \right| + c$$

$$\text{c6. } \frac{5-2x}{9\sqrt{5-4x-x^2}} + c$$

**Oefening 7.4** 1)  $E(h) = kh^2/2$ ; 2)  $x_0 = 19,5$  cm; 3)  $k = 2000$  kg/sec<sup>2</sup>,  $E(0,2) - E(0,1) = 30$ J.

**Oefening 7.5**

$$1) E = \sigma \int_0^h A(x)(h-x)dx$$

2) 0,0125 kg m; 3)  $20\sqrt{10\pi}/\pi^2 \cdot 10^{-3} = 11,36 \cdot 10^{-3}$  kg m; 4)  $\frac{\pi}{192}$  kg m.

**Oefening 7.6**

$$1) F = \sigma \int_0^h xw(x)dx$$

$$2) F = 2500 \text{ ton}$$

3) Stel  $a = 25$  meter,  $b = 10$  meter,  $d = 1$  meter,  $D = 3$  meter. De krachten  $F_1, F_2, F_3, F_4$  op de vier zijwanden zijn respectievelijk

$$F_1 = \frac{1}{2}\sigma b d^2 = 5 \text{ ton}$$

$$F_2 = \frac{1}{2}\sigma b D^2 = 45 \text{ ton}$$

$$F_3 = F_4 = \frac{1225}{6} \text{ ton}$$

Totaal:  $\frac{1375}{3}$  ton.

**Oefening 8.1**

a1 $\frac{\pi}{4}$	a2 $\frac{1}{16}(\text{bgtg } 3 + \frac{\pi}{2} + \frac{3}{10})$	a3 $2(\sqrt{3}+1)e^{-\sqrt{3}}$
b1 $\frac{1}{2}$	b2 $\frac{1}{2}$	b3 $\frac{\pi}{2}$
c1 $\frac{\pi}{2}$	c2 $+\infty$	c3 0

### Oefening 8.2

$$\begin{array}{lll} \text{a1 } \frac{\pi}{2} & \text{a2 } 2 & \text{a3 } \frac{5\pi}{3} \\ \text{b1 } \frac{3}{2}(\sqrt[3]{9}-1) & \text{b2 } -\frac{11}{18} & \text{b3 } +\infty \\ \text{c1 } +\infty & \text{c2 } +\infty & \text{c3 } 0 \end{array}$$

### Oefening 8.3

$$\text{a } \ln(1+\sqrt{2}) \quad \text{b } 16 \quad \text{c } 16a$$

### Oefening 8.4

$$\text{a } \frac{8}{243}(82\sqrt{82}-1) \quad \text{b } \frac{17}{6} \quad \text{c } \frac{a}{2}(e-\frac{1}{e})$$

### Oefening 8.5

$$\text{a } \frac{\sqrt{5}}{2}(e^{4\pi}-1) \quad \text{b } \frac{16a}{3} \quad \text{c } \frac{3\pi a}{2}$$

### Oefening 8.6

$$\text{a } 4 \quad \text{b } \sqrt{3}(e^T-1) \quad \text{c } \sqrt{9+4\pi^2}$$

### Oefening 8.7

$$\text{a } 2a\sqrt{5} \quad \text{b } 5 \quad \text{c } x_0+z_0$$

### Oefening 9.1

$$\text{a. } D\vec{F} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+2 & -\sin y \\ 2+\cos x & 2y \\ 0 & \sec^2 y \end{pmatrix}$$

$$\text{b. } D\vec{F} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 2xy^2z^2 & 2x^2yz^2 & 2x^2y^2z \end{pmatrix}$$

$$\text{c. } D\vec{F} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & e^y & e^z \\ -e^x & -e^y & -e^z \\ \text{sh}x & \text{sh}y & 0 \end{pmatrix}$$

### Oefening 9.2

a.  $-92$ ;  $-2$    b.  $-14$ ;  $0$    c.  $\sqrt{2}$ ;  $1$

### Oefening 9.3

a.  $df = \frac{2}{y} \operatorname{cosec} \frac{2x}{y} \left( dx - \frac{x}{y} dy \right)$

b.  $df = \left( \ln y + y \cot g x \right) dx + \left( \frac{x}{y} + \ln \frac{\sin x}{\sin y} - y \cot g y \right) dy$

c.  $df = \frac{e^x dx + e^y dy + e^z dz}{e^x + e^y + e^z}$

### Oefening 9.4

a.  $z = 2x - 2y$    b.  $z = y$    c.  $x + y - \sqrt{2}z = 0$

### Oefening 9.8

a.  $x^y = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2(y-1) + \dots$

b.  $\sin(x^2 + 2y^2 + z) = z + x^2 + 2y^2 - \frac{z^3}{6} + \dots$

c.  $\sin x \sin y \cos z = xy - \frac{x^3 y}{6} - \frac{y^3 x}{6} - \frac{xyz^2}{2} + \dots$

**Oefening 9.9 a.**  $(-1, 2/3)$  en  $(1, -2/3)$  zijn stationaire punten en zadelpunten.  $(0, 0)$  is ook een stationaire punt. De test met tweede partiële afgeleiden levert geen resultaat op, want  $s^2 - rt = 0$ .  $f$  bereikt een minimum in  $(0, 0)$ , omdat

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 2x^2(x^2 + 2xy + y^2) - 2x^2y^2 + 3y^2 \\ &= 2x^2(x+y)^2 + y^2(3 - 2x^2) \\ &\geq 0 = f(0, 0) \text{ als } |x| \leq \sqrt{3/2} \end{aligned}$$

b.  $(2, -3)$ : minimum

c.  $(0, 0)$ : zadelpunt;  $(-1, -1)$ : maximum

**Oefening 9.10 a.**  $(8/5, 16/5)$ ;   b.  $(32/9, -16/9, 32/9)$ ;   c.  $(40, 40, 40)$ .