Oefeningen Wiskunde: Voortgezette Analyse

1. Beschouw de volgende afbeelding tussen de reële vectorruimten $\mathbb{R}^3$ en $\mathrm{M}_{2,2}(\mathbb{R})$:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathrm{M}_{2,2}(\mathbb{R}),\ f(a,b,c) = \begin{pmatrix} a-b & c \\ 0 & 2c \end{pmatrix}.$$

   (a) Bewijs dat f lineair is.

   (b) Bepaal de kern en het beeld van f; bepaal tevens de dimensies van deze deelruimten.

   (c) Bepaal de matrix $[f]_{F,E}$ van f ten opzichte van de standaardbasissen E van $\mathbb{R}^3$ en F van $\mathrm{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

   (d) Bepaal de matrix $[f]_{F',E'}$ van f ten opzichte van de basissen

$$E' = \{(1,-1,1), (1,2,2), (1,1,1)\}$$

   en

$$F' = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \right\}$$

   van respectievelijk $\mathbb{R}^3$ en $\mathrm{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

2. Bepaal het convergentiegebied van de volgende machtreeks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n+1)(n!)^2}(x-1)^n.$$

3. Beschouw de functie

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{als } -1 \le x \le 0 \\ e^{x} & \text{als } 0 \le x \le 1 \end{cases}.$$

   (a) Is f even, oneven of geen van beide? Verklaar je antwoord.

   (b) Ontwikkel f in een Fourierreeks met periode $T = 2$.

4. Bepaal de algemene integraal van de volgende differentiaalvergelijkingen:

   (a) $2xy'' + 4y' + x^3{y'}^2 = 0$;

   (b) $y''' - 2y'' - 3y' = 3x^2 + e^{-x}$.

Het examen duurt 3 uur 30 minuten; vraag 1: 20 punten (6 voor b) en d) en 4 voor a) en c); vraag 2: 16 punten; vraaag 3: 20 p; vraag 4 a) en c): elk 16 punten; 2 punten gratis voor iedereen; totaal: 90 punten. Veel succes!

Vrije Universiteit Brussel

2de Bachelor Ingenieurswetenschappen: Architectuur
Academiejaar 2008-2009
1ste semester
9 januari 2009

Wiskunde: Voortgezette Analyse: MATLAB

1. Voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$
Schrijf een MATLAB-functie `examen1(`x`)` die, gegeven $x \in \mathbb{R}$, als resultaat een benadering van e^x geeft gebruik makende van deze machtreeks. De manier waarop e^x benaderd wordt is door termen van de reeks op te tellen totdat de laatst opgetelde term de eerste is waarvoor de absolute waarde strikt kleiner is dan 0.0001. De functie zou zowel de benaderde waarde van e^x als het aantal gebruikte termen van de reeks moeten weergeven.

2. De *geadjungeerde* (of de *adjunctmatrix*) van een $n \times n$-matrix A is per definitie een $n \times n$-matrix $\mathrm{adj}(A)$, met op plaats (i, j) de cofactor $A_{j,i}$ van het element op plaats (j, i) in A. Herinner dat de cofactor van een element op plaats (i, j) in A gegeven wordt door $(-1)^{i+j}$ vermenigvuldigd met de determinant van de matrix die uit A verkregen wordt door de i-de rij en de j-de kolom te schrappen. Schrijf een MATLAB-functie `examen2(`A`)` die, gegeven een matrix A, als resultaat de adjunctmatrix $\mathrm{adj}(A)$ van A weergeeft.

Het examen duurt 2 uur. Elke vraag staat op 10 punten; totaal: 20 punten. Veel succes!

Vrije Universiteit Brussel

2de Bachelor Ingenieurswetenschappen: Architectuur
Academiejaar 2008-2009
2de zittijd
27 augustus 2009

Oefeningen Wiskunde: Voortgezette Analyse

1. Gegeven is de lineaire afbeelding $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ met matrix (t.o.v. de respectieve standaardbasissen van $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$
   (a) Bepaal de kern en het beeld van f, alsook hun dimensie.
   (b) Bepaal de matrix van f t.o.v. de basissen $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,-1,0)\}$ van $\mathbb{R}^3$ en $\{(1,0),(1,1)\}$ van $\mathbb{R}^2$.

2. Voor welke $x \in \mathbb{R}$ is de reeks
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-x)^{\frac{n}{2}}}{(2n)^{2n}}$$
convergent?

3. (a) Schrijf de functie $f(x) = x(\pi - x)$, met $0 \leq x < \pi$, als een Fourierreeks van de vorm $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$.
   (b) Leid hieruit de reekssom van $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ af.

4. Bepaal de algemene integraal van de volgende differentiaalvergelijkingen.
   (a) $(\sqrt{2}x + y - 3)\mathrm{d}x + (2x + \sqrt{2}y)\mathrm{d}y = 0$
   (b) $y'' - 2y' + 3y = x^3 + \sin x$

Het examen duurt 3 uur 30 minuten. Veel succes!

Vrije
Universiteit
Brussel

2de Bachelor Ingenieurswetenschappen: Architectuur
Academiejaar 2008-2009
2de zittijd
27 augustus 2009

Wiskunde: Voortgezette Analyse: MATLAB

1. Een natuurlijk getal heet een *palindroom* als diens representatie in het decimale stelsel hetzelfde is zowel wanneer gelezen van links naar rechts als wanneer gelezen van rechts naar links. Schrijf een functie `examen1(`N`)` in MATLAB die, gegeven een natuurlijk getal $N \in \mathbb{N}$ van niet meer dan 10^6 cijfers, de waarde weergeeft van het kleinste palindroom dat strikt groter is dan N. Getallen worden steeds weergegeven zonder nullen in het begin.
   Bijvoorbeeld:
   ```
   >> examen1(808)
   ans=818
   ```

2. Schrijf een MATLAB-functie `examen2(`M`,`N`)` die, gegeven twee reële matrices M en N, als resultaat het aantal reële getallen weergeeft die zowel in M als in N voorkomen. (Hierbij zijn de dimensies van M en N willekeurig.)

Het examen duurt 2 uur. Veel succes!