

## Analyse I

1. Formuleer en bewijs de formule van Leibniz voor de  $n$ -de afgeleide van het product van twee functies  $f$  en  $g$ .
2. Onderstel dat  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continu is, en dat  $f(a)f(b) < 0$ . Toon aan dat  $f$  minstens 1 nulpunt heeft gelegen in het interval  $(a, b)$ .
3. Gegeven is een numerieke functie  $f$  gedefinieerd tenminste op een omgeving van een stationair punt  $a$ . Toon aan dat  $f$  een minimum bereikt in  $a$  als  $f''(a) > 0$ .
4. Toon aan dat elke begrensde rij een convergente deelrij heeft. Geef de definitie van een Cauchy rij, en toon aan dat elke Cauchy rij begrensd is. Toon tenslotte aan dat een rij convergent is als en slechts als ze een Cauchy rij is.

**Tijd: 90 minuten; vragen 1, 2 en 3: 9 punten; vraag 4: 13 punten. Totaal: 40 punten. Dit examen telt mee voor 20 % van het eindcijfer.**

## Oefeningen Analyse I

1. Gegeven zijn  $a, b \in \mathbb{R}$  en  $b > 0$ . Bepaal de limiet

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{a}{x^b} + 1 \right)^{\pi x^b}.$$

2.  $a$  is een reëel getal. Bereken de integraal

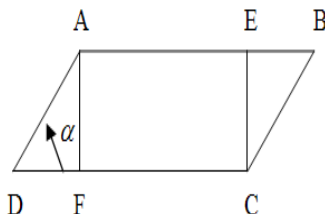
$$I = \int_1^{e^a} \ln x x^{\ln x - 1} dx.$$

3. Een deeltje beweegt langs de  $x$ -as, en de positie op tijdstip  $t$  is  $x(t) = \sqrt{mt + n}$ . Hierbij is gegeven dat  $m > 0$  en  $t > -n/m$ . Toon aan dat de versnelling negatief is en omgekeerd evenredig met de derde macht van de afgelegde weg.
4. Bepaal de cosinus en de tangens van de hoek(en) waaronder de grafieken van de functies  $f_1(x) = x^2 + 1$  en  $f_2(x) = e^x$  elkaar snijden.
5. Bereken de booglengte vande vlakke kromme met parametervergelijkingen

$$\begin{cases} x = \frac{2}{1+t^2} \\ y = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

Hierbij loopt  $t$  van 1 tot  $\sqrt{3}$ .

6. Gegeven is het parallellogram  $ABCD$  met ingeschreven rechthoek  $AECF$ , zoals in bijgaande tekening. Er is ook gegeven dat  $\|\vec{AD}\| = \|\vec{CF}\| = 2$ .  $\alpha \in [0, \pi/2]$  is de hoek tussen  $\vec{DC}$  en  $\vec{DA}$



- (a) Bepaal de functie  $f(\alpha)$  die de oppervlakte van het parallellogram geeft in functie van de hoek  $\alpha$ .
- (b) Bepaal de hoek  $\alpha$  waarvoor de oppervlakte van het parallellogram maximaal is;
- (c) Bepaal dan de maximale oppervlakte.

**Tijd: 180 minuten; vraag 1: 7 punten; vragen 2 en 3: 5 punten; vraag 4: 8 punten; vragen 5 en 6: 10 punten.**  
**Totaal: 45 punten. Dit examen telt mee voor 22,5 % van het eindcijfer.**

## Oplossingen

1.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( \frac{a}{x^b} + 1 \right)^{\pi x^b} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \pi x^b \ln \left( \frac{a}{x^b} + 1 \right) \\ &= \pi \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(a + x^b) - b \ln x}{x^{-b}} \\ &\stackrel{H}{=} \pi \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{bx^{b-1}}{a+x^b} - \frac{b}{x}}{-bx^{-b-1}} \\ &= -\pi \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1+b}(x^b - a - x^b)}{x(a + x^b)} \\ &= \pi \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{ax^{-b} + 1} = a\pi,\end{aligned}$$

en dus is

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{a}{x^b} + 1 \right)^{\pi x^b} = e^{a\pi}.$$

2. Substitutie:  $s = \ln x$ ,  $ds = dx/x$ .

$$I = \int_1^{e^a} \ln x e^{(\ln x)^2} \frac{dx}{x} = \int_0^a s e^{s^2} ds = \frac{1}{2} \left[ e^{s^2} \right]_0^a = \frac{e^{a^2} - 1}{2}.$$

3. We berekenen achtereenvolgens:

$$\begin{aligned}x(t) &= (mt + n)^{1/2}; \\ v(t) = x'(t) &= \frac{m}{2}(mt + n)^{-1/2}; \\ a(t) = x''(t) &= -\frac{m^2}{4}(mt + n)^{-3/2} = -\frac{m^2}{4x^3}.\end{aligned}$$

4. We bepalen eerst de snijpunten van de twee krommen. De  $x$ -waarden van de snijpunten voldoen aan de vergelijking

$$x^2 + 1 = e^x$$

$x = 0$  is hiervan een oplossing. We gaan eerst na dat dit de enige oplossing is. Voor  $x < 0$  hebben we

$$e^x < 1 < 1 + x^2$$

Neem nu  $x > 0$ . We beweren dat

$$1 + x^2 < e^x$$

Om dit in te zien merken we eerst op, gebruik makend van de Taylorontwikkeling van  $e^x$  tot op orde 3:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}e^{\theta x} > 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}$$

Het volstaat dus om aan te tonen dat

$$1 + x^2 < 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}$$

of

$$0 < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} = \frac{x}{6}(x^2 - 3x + 6)$$

Deze ongelijkheid geldt voor elke  $x > 0$  omdat we voor elke  $x \in \mathbb{R}$  hebben we dat  $x^2 - 3x + 6 > 0$  (de discriminant is  $-15 < 0$ ).

De raaklijn aan de kromme  $C_1 : f_1(x) = x^2 + 1$  in  $(0, 1)$  is de horizontale rechte  $y = 1$ .

De raaklijn aan de kromme  $C_2 : f_2(x) = e^x$  in  $(0, 1)$  is de rechte met vergelijking  $y = 1 + x$ .

De hoek tussen deze twee rechten is  $\pi/4$ .

5. We berekenen

$$x'(t) = \frac{-4t}{(1+t^2)^2};$$

$$y'(t) = \frac{2(1+t^2) - 4t^2}{(1+t^2)^2} = 2 \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2};$$

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = \frac{4}{(1+t^2)^4}(4t^2 + 1 - 2t^2 + t^4) = \frac{4}{(1+t^2)^4}(1 + 2t^2 + t^4) = \frac{4}{(1+t^2)^2}.$$

$$\begin{aligned} l &= \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \\ &= 2 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} \\ &= 2 [\text{Bgtgt}]_1^{\sqrt{3}} = 2 \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

6. a) De oppervlakte van de driehoeken  $ADF$  en  $BEC$  zijn gelijk, en bedragen

$$\frac{1}{2} \|\vec{DF}\| \|\vec{AF}\| = \frac{1}{2} \cos \alpha \|\vec{AD}\| \sin \alpha \|\vec{AD}\| = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha.$$

De oppervlakte van de rechthoek  $AECF$  is

$$\|\vec{FC}\| \|\vec{AF}\| = \|\vec{FC}\| \|\vec{AD}\| \sin \alpha = 4 \sin \alpha.$$

Voor de totale oppervlakte van het parallellogram vinden we dus

$$f(\alpha) = 4 \sin \alpha + 2 \sin 2\alpha.$$

b) We bepalen de stationaire punten van  $f$ :

$$f'(\alpha) = 4 \cos \alpha + 4 \cos 2\alpha = 0$$

als

$$\cos 2\alpha + \cos \alpha = 2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1 = 0$$

als

$$\cos \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = -1 \text{ of } \frac{1}{2}.$$

$\cos \alpha = -1$  is onmogelijk, want  $\alpha \in [0, \pi/2]$ .

Als  $\cos \alpha = 1/2$ , dan is  $\alpha = \pi/3$ .

In  $\alpha = \pi/3$  wordt een maximum bereikt:

methode 1:

$$f''(\alpha) = -4 \sin \alpha - 8 \sin 2\alpha$$

$$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{3}}{2} - \frac{8\sqrt{3}}{2} < 0$$

methode 2: tekenonderzoek van de afgeleide:

$\alpha$	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(\alpha)$		+	0	-	
$f(\alpha)$		stijgend	maximum	dalend	

c) De maximale oppervlakte is

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin \frac{2\pi}{3} + 4 \sin \frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3}.$$



## Examen Oefeningen Analyse

1. Het stelsel

$$\begin{cases} y^{\ln z/x} = 2 \\ \ln(x - y + z) = 2 \end{cases}$$

bepaalt  $y$  en  $z$  als impliciete functies van  $x$ . Bepaal de vergelijking van de raaklijn in het punt  $(2, 2, e^2)$ .

2. Bereken de oppervlakte van het deel van de ellipsoïde

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{9} = 4$$

dat gelegen is binnen de cilinder  $x^2 + y^2 = 1$ .

3. Ga na voor welke waarden van  $a, b, c \in \mathbb{R}$  de volgende reeks convergent is.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{an + b} - \frac{c}{n} \right)$$

4. Bereken het volume van het lichaam begrensd door de cilinders  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x^2 + y^2 = 4$  en de kegels  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

5. Beschouw de volgende differentiaalvergelijking:

$$y' = -2 - y + y^2$$

- (a) Bepaal een particuliere oplossing van deze differentiaalvergelijking die van de vorm  $y = c$  met  $c \in \mathbb{R}$  is.
- (b) Gebruik de substitutie  $z = y - c$  om de algemene integraal van deze differentiaalvergelijking te bepalen.

6. Integreer de volgende differentiaalvergelijking.

$$x^3 y''' + 4x^2 y'' - 4xy' = \ln|x| + x + 1$$

**Tijd: 3u30; Puntenverdeling: vraag 2: 10 punten, vragen 1, 3, 4, 5, 6: 9 punten; totaal: 55 punten.**

**Syllabus en oefeningenboek mogen gebruikt worden; zakrekenmachine en opgeloste oefeningen mogen niet gebruikt worden.**

## Oplossingen

1. Afleiden naar  $x$  geeft

$$\begin{cases} -\frac{y^{\ln z/x} \ln y \ln z}{x^2} + \frac{\ln z}{x} y^{\ln z/x-1} y' + \frac{y^{\ln z/x} \ln y z'}{xz} = 0 \\ \frac{1-y'+z'}{x-y+z} = 0 \end{cases}$$

(2, 2,  $e^2$ ) invullen geeft:

$$\begin{cases} -\ln 2 + y'(2) + \frac{\ln 2}{e^2} z'(2) = 0 \\ 1 - y'(2) + z'(2) = 0 \end{cases}$$

Oplossen naar  $y'(2)$ ,  $z'(2)$  geeft:

$$\begin{cases} y'(2) = \frac{\ln 2(1+e^2)}{\ln 2+e^2} \\ z'(2) = \frac{e^2(\ln 2-1)}{\ln 2+e^2} \end{cases}$$

Parametervergelijking van de raaklijn:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + \frac{\ln 2(1-e^2)}{\ln 2-e^2} t \\ z = e^2 + \frac{e^2(\ln 2-1)}{\ln 2-e^2} t \end{cases}$$

2. Een stel parametervergelijkingen van het oppervlak is:

$$\begin{cases} x = 2 \sin \theta \cos \phi \\ y = 2 \sin \theta \sin \phi \\ z = 6 \cos \theta \end{cases}$$

Snijlijn van de cilinder en de ellipsoïde:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 + \frac{z^2}{9} = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \theta = \frac{1}{4}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \text{ of } \theta = \frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = 2 \cos \theta \cos \phi \vec{u}_1 + 2 \cos \theta \sin \phi \vec{u}_2 - 6 \sin \theta \vec{u}_3$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = -2 \sin \theta \sin \phi \vec{u}_1 + 2 \sin \theta \cos \phi \vec{u}_2$$

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{(4 \cos^2 \theta + 36 \sin^2 \theta)4 \sin^2 \theta}$$

$$\begin{aligned} \text{Oppervlakte} &= 2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{6}} 4 \sin \theta \sqrt{\cos^2 \theta + 9 \sin^2 \theta} d\theta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{6}} 4 \sin \theta \sqrt{9 - 8 \cos^2 \theta} d\theta \\ &= -16\pi \int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{9 - 8u^2} du \quad (u = \cos \theta) \\ &= -32\sqrt{2}\pi \left[ \frac{u}{2} \sqrt{\frac{9}{8} - u^2} + \frac{9}{16} \text{Bgsin} \frac{2\sqrt{2}u}{3} \right]_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= -4\pi + 18\sqrt{2}\pi \text{Bgsin} \frac{2\sqrt{2}}{3} - 18\sqrt{2}\pi \text{Bgsin} \frac{\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

3. 
$$u_n = \frac{1}{an + b} - \frac{c}{n} = \frac{(1 - ac)n - bc}{an^2 + bn}$$

Voor  $a = 0$  en  $b = 0$  is deze reeks divergent.

Afhankelijk van de waarden van  $a, b, c$  is dit een positieve reeks of een negatieve reeks, we kunnen in alle gevallen de vergelijkingstest toepassen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_n|}{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(1 - ac)n - bc}{an + b} \right| = \begin{cases} \left| \frac{1-ac}{a} \right| & a \neq 0 \\ +\infty & a = 0 \end{cases}$$

Vermits

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergent is volgt hieruit dat voor  $1 - ac \neq 0$ , de gegeven reeks divergent is. Als  $1 - ac = 0$  vergelijken we met de reeks  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_n|}{1/n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{-bcn^2}{an^2 + bn} \right| = \left| \frac{-bc}{a} \right| \neq \infty$$

Hieruit volgt dat de gegeven reeks convergent is voor  $c = \frac{1}{a}$ ,  $a \neq 0$  en  $b$  willekeurig.

4. We stellen de integraal op in cilindercoördinaten.

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 dr \int_{-r}^r rdz = 2\pi \int_1^2 2r^2 dr = \frac{28\pi}{3}$$

5. a)  $y = c$  invullen in de differentiaalvergelijking geeft:

$$-2 - c + c^2 = 0$$

De oplossingen van deze vergelijking zijn:  $c = 2$  en  $c = -1$ .

b) Stel  $z = y - 2$ , de differentiaalvergelijking wordt:

$$z' - 3z = z^2$$

Dit is een vergelijking van Bernoulli, we stellen  $u = 1/z$ ;  $u' = -z'/z^2$

$$u' + 3u = -1$$

De oplossing van de geassocieerde homogene vergelijking is

$$u_h = Ce^{-3x}$$

We zoeken een particuliere oplossing van de vorm  $u_p = B$ . Invullen in de differentiaalvergelijking geeft  $u_p = -1/3$ .

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{z} = -\frac{1}{3} + Ce^{-3x} = \frac{C - e^{3x}}{3e^{3x}} \\ \Rightarrow z &= \frac{3e^{3x}}{C - e^{3x}} \\ \Rightarrow y &= z + 2 = \frac{3e^{3x}}{C - e^{3x}} + 2 = \frac{e^{3x} + 2C}{C - e^{3x}} \end{aligned}$$

6. Dit is een vergelijking van Euler, stel  $u = \ln|x|$ ;  $x = \epsilon e^u$ . Dan is

$$y' = \frac{\dot{y}}{x}; \quad y'' = -\frac{\dot{y}}{x^2} + \frac{\ddot{y}}{x^2}; \quad y''' = \frac{2\dot{y}}{x^3} - \frac{3\ddot{y}}{x^3} + \frac{\dddot{y}}{x^3}$$

De differentiaalvergelijking wordt nu

$$\ddot{y} + \dot{y} - 6y = u + \epsilon e^u + 1$$

De karakteristieke vergelijking is  $\lambda^3 + \lambda^2 - 6\lambda = 0$ . De oplossing van de geassocieerde homogene vergelijking is

$$y_h = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-3x}$$

We zoeken een particuliere oplossing van de vorm  $y_p = Au^2 + Bu + Ce^u$ . Invullen in de differentiaalvergelijking geeft

$$-4Ce^u - 12Au + 2A - 6B = u + \epsilon e^u + 1$$

Hieruit volgt:

$$\begin{cases} A &= \frac{-1}{12} \\ B &= -\frac{7}{36} \\ C &= -\frac{\epsilon}{4} \end{cases}$$

De oplossing van de differentiaalvergelijking is

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{12}u^2 - \frac{7}{36}u - \frac{\epsilon}{4}e^u + C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-3x} \\ &= -\frac{1}{12} \ln^2|x| - \frac{7}{36} \ln|x| - \frac{x}{4} + C_1 + C_2 x^2 + \frac{C_3}{x^3} \end{aligned}$$

## Oefeningen Analyse I en II

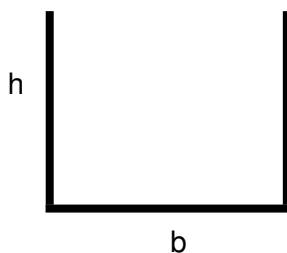
1. Bepaal de afgeleide van de functie

$$f(x) = \sin(x^{\ln x}).$$

2. Bepaal de volgende limiet met behulp van de stelling van Taylor:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \cos 2x - 2x}{\ln(1 + x^2)}$$

3. Met een plaat van 1 meter breed wil je een goot maken. Hiervoor plooi je ze langs beide kanten over  $90^\circ$  (zie figuur). Bij welke afmetingen  $h$  en  $b$  kan door de goot een maximale hoeveelheid water stromen?



4. Bereken de bepaalde integraal

$$I = \int_a^{2a} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 2a + 2a^2}}.$$

Hierbij is gegeven dat  $a > 0$ . Je mag de volgende gekende formule gebruiken:

$$\int \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \left( x\sqrt{x^2 + 1} + \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right) + c.$$

5. Bereken het volume van het lichaam begrensd door de cilinders  $x^2 + y^2 - y = 0$ ,  $x^2 + y^2 - 2y = 0$ , het vlak  $z = 2 + x$  en het  $xy$ -vlak.

6. Onderstel dat de reeks  $\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n$  convergent is. Onderzoek de convergentie van de volgende reeks.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 + \sin(a_n)}{2} \right)^n$$

7. Bepaal de algemene integraal van de volgende differentiaalvergelijking:

$$y''' - 4y'' + 4y' = -x + e^{2x}.$$

8. Gegeven is de functie  $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , gegeven door de formules

$$\begin{cases} u = f(x, y) = x^2 + 3y \\ v = g(x, y) = x^3 + y^4 + 1 \end{cases}$$

- (a) Bereken  $(a, b) = F(1, 1)$ .
- (b) Gebruik de stelling van de inverse functie om aan te tonen dat er open delen  $V, W \subset \mathbb{R}^2$  bestaan met  $(1, 1) \in V$ ,  $(a, b) \in W$  en  $F : V \rightarrow W$  bijectief.
- (c) De inverse functie  $F^{-1}$  heeft twee componentfuncties, en die noemen we  $\varphi$  en  $\psi$ . Bereken de partiële afgeleiden tot op orde 1 op van  $\varphi$  en  $\psi$  in het punt  $(a, b)$ .
- (d) Schrijf de Taylorveelterm  $P_1$  en  $Q_1$  van graad 1 op voor de functies  $\varphi$  en  $\psi$  rond het punt  $(a, b)$ .

**Tijd: 4 uur en 30 minuten;**

**Analyse I: vragen 1, 2 en 3 (elk 10 punten) en vraag 4 (15 punten); totaal: 45 punten. Dit deel telt mee voor 22,5 % van het eindcijfer; tijd: 2 uur.**

**Analyse II: vragen 5, 7 en 8 (elk 15 punten) en vraag 6 (10 punten); totaal: 55 punten. Dit deel telt mee voor 27,5 % van het eindcijfer; tijd: 2 uur 30 minuten.**

**Antwoorden voor Analyse I en II moeten op aparte bladen worden afgegeven.**

## Oplossingen

1.

$$\begin{aligned}f(x) &= \sin(x^{\ln x}) = \sin(e^{(\ln x)^2}) \\f'(x) &= \cos(e^{(\ln x)^2})e^{(\ln x)^2} \frac{2 \ln x}{x} \\&= 2x^{\ln x - 1} \cos(x^{\ln x}) \ln x.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}e^{2x} &= 1 + 2x + \frac{4x^2}{2} + \lambda_1(x)x^2 \\ \cos 2x &= 1 - \frac{4x^2}{2} + \lambda_2(x)x^2 \\ \ln(1 + x^2) &= x^2 + \lambda_3(x)x^2\end{aligned}$$

met

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lambda_i(x) = 0.$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \cos 2x - 2x}{\ln(1 + x^2)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 + (\lambda_1(x) - \lambda_2(x))x^2}{x^2 + \lambda_3(x)x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 + (\lambda_1(x) - \lambda_2(x))}{1 + \lambda_3(x)} = 4.\end{aligned}$$

3. We schrijven onze lengtes in meter. Dan is  $b + 2h = 1$ , en dus is de de oppervlakte van de dwarsdoorsnede van de goot gelijk aan

$$S = bh = (1 - 2h)h = h - 2h^2.$$

Deze dwarsdoorsnede moet maximaal zijn opdat er door de goot zoveel mogelijk water zou kunnen lopen. Stationaire punten:

$$\frac{dS}{dh} = 1 - 4h = 0 \text{ als } h = 1/4.$$

Omdat

$$\frac{d^2S}{dh^2} = -4 < 0$$

wordt een maximum bereikt. Als  $h = 1/4$ , dan is  $b = 1/2$ .

Besluit: de hoogte van de goot is 25 cm, en de breedte is 50 cm.

4. We beginnen met volgende substitutie:

$$u = \frac{x - a}{a}; \quad x = a(u + 1); \quad dx = a du;$$

$$x^2 - 2a + 2a^2 = (x - a)^2 + a^2 = a^2(u^2 + 1); \quad x^2 = a^2(u^2 + 2u + 1)$$

$$\begin{aligned} I &= \int_a^{2a} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 2a + 2a^2}} \\ &= \int_0^1 \frac{a^2(u^2 + 2u + 1)adu}{\sqrt{a^2(u^2 + 1)}} \\ &= a^2 \int_0^1 \sqrt{u^2 + 1} du + a^2 \int_0^1 \frac{2udu}{\sqrt{u^2 + 1}} \\ &= \frac{a^2}{2} \left[ u\sqrt{u^2 + 1} + \ln(u + \sqrt{u^2 + 1}) \right]_0^1 + 2a^2 \left[ \sqrt{u^2 + 1} \right]_0^1 \\ &= \frac{a^2}{2} (\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})) + 2a^2(\sqrt{2} - 1) \\ &= \frac{a^2}{2} (5\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}) - 4). \end{aligned}$$

5. We gaan over op cilindercoördinaten. De vergelijking van de cilinder  $x^2 + y^2 - y = 0$  in cilindercoördinaten is

$$r = \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

De vergelijking van de cilinder  $x^2 + y^2 - 2y = 0$  in cilindercoördinaten is

$$r = 2 \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^\pi d\theta \int_{\sin \theta}^{2 \sin \theta} dr \int_0^{2+r \cos \theta} r dz \\ &= \int_0^\pi d\theta \int_{\sin \theta}^{2 \sin \theta} (2r + r^2 \cos \theta) dr \\ &= \int_0^\pi (3 \sin^2 \theta + \frac{7}{3} \sin^3 \theta \cos \theta) d\theta = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

6. Vermits  $\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n$  convergent is, weten we dat  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . We passen het wortelkenmerk van Cauchy toe:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sin(a_n)}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

Hieruit volgt dat de reeks convergent is.

7. We bepalen eerst de algemene integraal  $y_h$  van de geassocieerde homogene vergelijking  $y''' - 4y'' + 4y' = 0$ . De wortels van de karakteristieke vergelijking  $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda = 0$  zijn  $\lambda = 0$  (enkelvoudig) en  $\lambda = 2$  (dubbel).

$$y_h = (Ax + B)e^{2x} + C.$$

We bepalen een particuliere integraal  $y_{p1}$  van de differentiaalvergelijking

$$y''' - 4y'' + 4y' = -x.$$

We weten dat er zulk een integraal bestaat van de vorm  $y_{p_1} = Ax^2 + Bx$ . We vinden dan

$$\begin{aligned}y_{p_1} &= Ax^2 + Bx \\y'_{p_1} &= 2Ax + B \\y''_{p_1} &= 2A \\y'''_{p_1} &= 0\end{aligned}$$

Invullen in de vergelijking levert  $8Ax + 4B - 8A = -x$ . Hieruit halen we dat  $A = -1/8$  en  $B = 2A = -1/4$ , zodat

$$y_{p_1} = -\frac{x^2 + 2x}{8}$$

We bepalen nu een particuliere integraal  $y_{p_2}$  van de differentiaalvergelijking

$$y''' - 4y'' + 4y' = e^{2x}$$

We weten dat er zulk een integraal bestaat van de vorm  $y_{p_2} = Ax^2e^{2x}$ . We hebben nu

$$\begin{aligned}y_{p_2} &= Ax^2e^{2x} \\y'_{p_2} &= 2A(x^2 + x)e^{2x} \\y''_{p_2} &= 2A(2x^2 + 4x + 1)e^{2x} \\y'''_{p_2} &= 2A(4x^2 + 12x + 6)e^{2x}\end{aligned}$$

Invullen in de vergelijking geeft  $4A = 1$ , zodat  $y_{p_2} = \frac{x^2e^{2x}}{4}$ . We besluiten dat de algemene integraal van de volledige vergelijking gegeven wordt door de formule

$$y = \left(\frac{x^2}{4} + Ax + B\right)e^{2x} - \frac{x^2 + 2x}{8} + C.$$

8. 1)  $F(1, 1) = (4, 3)$ .

2) De functies  $f$  en  $g$  zijn overal continu en hebben overal continue partiële afgeleiden. We berekenen nu:

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 2x & 3 \\ 3x^2 & 4y^3 \end{vmatrix} = 8xy^3 - 9x^2$$

Aangezien

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}(1, 1) = -1 \neq 0$$

kunnen we de stelling van de inverse functie toepassen, en het resultaat volgt.

3) Neem  $(u, v) \in W$ , en stel  $x = \varphi(u, v)$ ,  $y = \psi(u, v)$ . Dan is

$$\begin{cases} u = x^2 + 3y \\ v = x^3 + y^4 + 1 \end{cases}$$

Afleidings naar  $u$  geeft

$$\begin{cases} 1 = 2x \frac{\partial x}{\partial u} + 3 \frac{\partial y}{\partial u} \\ 0 = 3x^2 \frac{\partial x}{\partial u} + 4y^3 \frac{\partial y}{\partial u} \end{cases}$$

Oplossen van dit lineair stelsel geeft

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{4y^3}{8xy^3 - 9x^2}; \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{-3x^2}{8xy^3 - 9x^2}$$

Afleidings naar  $v$  geeft

$$\begin{cases} 0 = 2x \frac{\partial x}{\partial v} + 3 \frac{\partial y}{\partial v} \\ 1 = 3x^2 \frac{\partial x}{\partial v} + 4y^3 \frac{\partial y}{\partial v} \end{cases}$$

Oplossen van dit lineair stelsel geeft

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{-3}{8xy^3 - 9x^2} ; \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{2x}{8xy^3 - 9x^2}$$

In het punt  $(a, b) = (4, 3)$  vinden we

$$\frac{\partial x}{\partial u}(4, 3) = -4; \quad \frac{\partial x}{\partial v}(4, 3) = 3; \quad \frac{\partial y}{\partial u}(4, 3) = 3; \quad \frac{\partial y}{\partial v}(4, 3) = -2.$$

4)

$$\begin{cases} P_1(u, v) = 1 - 4(u - 4) + 3(v - 3) = 8 - 4u + 3v \\ Q_1(u, v) = 1 + 3(u - 4) - 2(v - 3) = -5 + 3u - 2v \end{cases}$$

## Analyse: MATLAB

1. Schrijf een MATLAB-functie `examen1(M)` die als resultaat "1" weergeeft indien de reële matrix  $M$  twee gelijke rijen heeft en "0" in het andere geval. (Hierbij zijn het aantal rijen en kolommen van  $M$  willekeurig.)
2. Schrijf een MATLAB-functie `examen2(v)` die als resultaat het aantal gehele getallen uit een reële rijmatrix  $v$  weergeeft.

**Het MATLAB-gedeelte telt mee voor 5% van het eindresultaat.**