

Analyse I

1. Formuleer en bewijs de formule van Leibniz voor de n -de afgeleide van het product van twee functies f en g .
2. Onderstel dat $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continu is, en dat $f(a)f(b) < 0$. Toon aan dat f minstens 1 nulpunt heeft gelegen in het interval (a, b) .
3. Formuleer en bewijs de formule van Taylor voor een functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Stel de formules op voor de resttermen van Lagrange en Liouville.
4. Formuleer en bewijs de stelling van het gemiddelde voor de integraal van een functie. Toon dan aan dat, voor een continue functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, de functie $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ afleidbaar is, en bereken de afgeleide. Leid hieruit de grondformule van de integraalrekening af.

Oefeningen Analyse I

1. Bepaal de limiet

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{p^2 x - 1}{x + 1} \right)^{\frac{x}{2p}}$$

in functie van de parameter $p > 0$.

2. Bereken de McLaurinveelterm van graad 3 van de functie

$$f(x) = e^{\operatorname{ch} x}.$$

3. De knutselsmurf weet al lang dat het ideale woonhuis de vorm moet hebben van een paddestoel met als steel een cilinder met straal R en hoogte H en als hoed een halve bol met straal $5R/4$. De grote smurf heeft een nieuw huis nodig met een totaal volume van 1 m^3 , omdat de Leerlingsmurf het vorige huis had laten ontploffen. De schildersmurf moet de buitenkant van het huis schilderen, maar wil hier zo weinig mogelijk verf voor gebruiken, m.a.w. het huis moet zo gemaakt worden dat de buitenoppervlakte minimaal is. Bepaal de straal R en de hoogte H zodanig dat de buitenoppervlakte minimaal is.

4. Bereken de oneigenlijke integraal

$$I = \int_6^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 6x + 9}}.$$

5. Bereken de lengte l van de ruimtekromme met parametervergelijkingen

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = \frac{t^{3/2}}{3} \end{cases}$$

Hierbij varieert de parameter t tussen 0 en 1.

Oplossingen

1. We berekenen

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{p^2 x - 1}{x + 1} \right)^{\frac{x}{2p}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2p} \ln \frac{p^2 x - 1}{x + 1}.$$

Omdat

$$\frac{p^2 x - 1}{x + 1} = p^2 - \frac{1 + p^2}{x + 1}$$

is

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2p} \ln \frac{p^2 x - 1}{x + 1} = \frac{\ln p^2}{2p} = \frac{\ln p}{p}.$$

Geval 1: $p > 1$. Dan is $\frac{\ln p}{p} > 0$, zodat

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2p} \ln \frac{p^2 x - 1}{x + 1} = (+\infty) \frac{\ln p}{p} = +\infty,$$

en

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{p^2 x - 1}{x + 1} \right)^{\frac{x}{2p}} = +\infty.$$

Geval 2: $0 < p < 1$. Dan is $\frac{\ln p}{p} < 0$, zodat

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2p} \ln \frac{p^2 x - 1}{x + 1} = (+\infty) \frac{\ln p}{p} = -\infty,$$

en

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{p^2 x - 1}{x + 1} \right)^{\frac{x}{2p}} = 0.$$

Geval 3: $p = 1$. Dan is $\frac{\ln p}{p} = 0$, en we passen de regel van de l'Hospital toe:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x - 1}{x + 1} \right)^{\frac{x}{2}} &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{x-1}{x+1}}{1/x} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x - 1) - \ln(x + 1)}{1/x} \\ &\stackrel{H}{=} \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(x + 1 - x + 1)}{x^2 - 1} \\ &= -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = -1, \end{aligned}$$

en dus is, voor $p = 1$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{p^2 x - 1}{x + 1} \right)^{\frac{x}{2p}} = \frac{1}{e}.$$

2. We berekenen de afgeleiden tot op orde 3 van f in het punt 0:

$$\begin{aligned}f(x) &= e^{\operatorname{ch} x} \\f(0) &= e \\f'(x) &= \operatorname{sh} x e^{\operatorname{ch} x} \\f'(0) &= 0 \\f''(x) &= (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh}^2 x) e^{\operatorname{ch} x} \\f''(0) &= e \\f'''(x) &= (\operatorname{sh} x + 3\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x + \operatorname{sh}^3 x) e^{\operatorname{ch} x} \\f'''(0) &= 0\end{aligned}$$

Bijgevolg is de McLaurin veelterm van graad ≤ 3 :

$$P_3(x) = e\left(1 + \frac{x^2}{2}\right).$$

3. We schrijven alle lengtes in meter. We berekenen de oppervlakte van het huis:

- Oppervlakte halve bol: $2\pi \frac{25}{16} R^2$;
- oppervlakte cilindermantel: $2\pi RH$;
- oppervlakte onderkant halve bol buiten de cilinder: $\frac{25}{16}\pi R^2 - \pi R^2$

De totale oppervlakte die moet geschilderd worden is dus

$$S = 2\pi RH + \pi R^2 \left(\frac{50}{16} + \frac{25}{16} - \frac{16}{16} \right) = 2\pi RH + \frac{59}{16}\pi R^2.$$

Het totale volume van het huis is

$$V = \pi R^2 H + \frac{2}{3}\pi \frac{125}{64} R^3 = 1.$$

We hebben dus

$$\pi R^2 H = 1 - \frac{125}{96}\pi R^3$$

en

$$2\pi RH = \frac{2}{R} - \frac{125}{48}\pi R^2.$$

Hiermee hebben we de totale oppervlakte S in functie van R :

$$S = \frac{2}{R} - \frac{125}{48}\pi R^2 + \frac{59}{16}\pi R^2 = \frac{2}{R} + \frac{13}{12}\pi R^2.$$

Om S te minimaliseren berekenen we de afgeleide van S naar R en stellen die gelijk aan 0:

$$\frac{dS}{dR} = -\frac{2}{R^2} + \frac{13}{6}\pi R = 0$$

als

$$R^3 = \frac{12}{13\pi} \text{ of } R = \sqrt[3]{\frac{12}{13\pi}}.$$

H vinden we dan met de formule

$$H = \frac{1}{R^2\pi} - \frac{125}{96}R = \sqrt[3]{\frac{169}{144\pi}} - \frac{125}{96}\sqrt[3]{\frac{12}{13\pi}}.$$

4.

$$\begin{aligned} I &= \int_6^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 6x + 9}} \\ &= \int_6^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{(x-3)^2}} \\ &= \int_6^{+\infty} \frac{dx}{x(x-3)}. \end{aligned}$$

Splitsing in partiële breuken geeft

$$\frac{1}{x(x-3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x}\right),$$

zodat

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3} \int_6^{+\infty} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{3} \left[\ln \frac{x-3}{x} \right]_6^{+\infty} \\ &= \frac{1}{3} \left[\ln\left(1 - \frac{3}{x}\right) \right]_6^{+\infty} = -\frac{1}{3} \ln \frac{1}{2} = \frac{\ln 2}{3} \end{aligned}$$

5.

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \sin^2 t + \cos^2 t + \left(\frac{\sqrt{t}}{2}\right)^2 = 1 + \frac{t}{4}$$

en dus

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{t}{4}} dt = 4 \frac{2}{3} \left[\left(1 + \frac{t}{4}\right)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{8}{3} \left(\left(\frac{5}{4}\right)^{3/2} - 1 \right) = \frac{1}{3} (5\sqrt{5} - 8)$$

Oefeningen Analyse II

1. Bepaal de extreme waarden van het volume van een balkvormige doos zonder deksel waarvan de oppervlakte 24 cm^2 is.
2. Bereken de volgende lijnintegraal op twee manieren:

$$\oint_{\Gamma^+} (x^2 + y^2)dx - (x + y)^2 dy$$

waarbij Γ de rand van het gebied

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq -x\}$$

is.

3. Bereken de flux van het vectorveld $\vec{v} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2$ door het gedeelte van het oppervlak

$$x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 9$$

gelegen boven het vlak $z = 2$.

4. Is de volgende reeks convergent?

$$\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+n)}{b(b+1)(b+2)\dots(b+n)}$$

$a, b > 0$ en $b \leq a + 1$.

5. Los de volgende differentiaalvergelijking op.

$$(y - 1)y'' + (y + 1)y'^2 = 0$$

6. Bepaal door middel van een reeksontwikkeling twee lineair onafhankelijke oplossingen in een omgeving van $x = 0$ van de volgende differentiaalvergelijking. Bepaal ook het convergentiegebied.

$$xy'' + (2x - \frac{1}{2})y' - 6y = 0$$

Tijd: 3 uur en 45 minuten; vragen 1 en 4: 8 punten, vraag 2: 12 punten, vragen 3,5,6: 9 punten; totaal: 55 punten.

Oplossingen

1. Zij x, y, z de ribben van de balk. Het volume is dan $V = xyz$, en de oppervlakte

$$S = 2yz + 2xz + xy = 24.$$

De hulpfunctie met multiplier van Lagrange wordt

$$V_* = xyz - \alpha(2yz + 2xz + xy - 24).$$

Voorwaarden op de stationaire punten:

$$\frac{\partial V_*}{\partial x} = yz - 2\alpha z - \alpha y = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial V_*}{\partial y} = xz - 2\alpha z - \alpha x = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial V_*}{\partial z} = xy - 2\alpha x - 2\alpha y = 0 \quad (3)$$

Als we deze drie voorwaarden substitueren in de nevenvoorwaarde vinden we

$$8\alpha z + 4\alpha y + 4\alpha x = 24,$$

of

$$\alpha(2z + x + y) = 6,$$

of

$$\alpha = \frac{6}{2z + x + y}.$$

Dit vullen we in (1,2,3):

$$yz = \frac{6(y + 2z)}{x + y + 2z}$$

$$xz = \frac{6(x + 2z)}{x + y + 2z}$$

$$xy = \frac{12(x + y)}{x + y + 2z}$$

Hieruit volgt ook:

$$x + y + 2z = 6\left(\frac{1}{z} + \frac{2}{y}\right) = 6\left(\frac{1}{z} + \frac{2}{x}\right) = 12\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right).$$

Uit de tweede gelijkheid volgt dat $x = y$. Uit de derde volgt dan dat

$$\frac{1}{z} = \frac{4}{x} - \frac{2}{x} = \frac{2}{x}, \text{ of } z = \frac{x}{2}.$$

We besluiten dat $x = y = 2z$. Als we dit in de nevenvoorwaarde stoppen vinden we

$$z = \sqrt{2}, \quad x = y = 2\sqrt{2}, \quad \alpha = \frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad V = 8\sqrt{2}.$$

We kunnen verwachten dat het volume maximaal wordt voor deze waarden. Maar dit kunnen we ook nagaan door de tweede differentiaal van V_* te berekenen.

$$\begin{aligned}
 d^2V_* &= z dx dy + y dx dz + x dy dz + z dx dy + x dy dz + y dx dz \\
 &- \alpha(2 dx dz + dx dy + 2 dy dz + dx dy + 2 dx dz + 2 dy dz) \\
 &= 2(z dx dy + y dx dz + x dy dz) - 2\alpha dx dy - 4\alpha dx dz - 4\alpha dy dz \\
 &= 2(z - \alpha) dx dy + 2(y - 2\alpha) dx dz + 2(x - 2\alpha) dy dz \\
 &= \sqrt{2}(dx dy + 2 dx dz + 2 dy dz).
 \end{aligned}$$

Differentiëren van de nevenvoorwaarden geeft

$$2y dz + 2z dy + 2x dz + 2z dx + x dy + y dx = 0$$

of

$$4dx + 4dy + 8dz = 0$$

of

$$2dz = -dx - dy,$$

zodat

$$\begin{aligned}
 d^2V_* &= \sqrt{2}(dx dy - dx^2 - dx dy - dy^2 - dy dx) \\
 &= -\sqrt{2}(dx^2 + dx dy + dy^2) < 0,
 \end{aligned}$$

omdat de discriminant van de kwadratische vorm $dx^2 + dx dy + dy^2$ gelijk is aan $D = -1 - 4 = -3 < 0$. We besluiten dat V de maximale waarde $V = 8\sqrt{2}$ bereikt voor $x = y = 2z = 2\sqrt{2}$.

2. We gebruiken de formule van Green-Riemann:

$$\oint_{\Gamma^+} P dx + Q dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Hierin is $P = x^2 + y^2$, $Q = -(x + y)^2$, en dus

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2x - 4y.$$

We berekenen eerst het rechterlid, door overgang naar poolcoördinaten. Het gebied G ligt binnen de eenheidscirkel, waarbij $\varphi \in [-\pi/4, 3\pi/4]$. We berekenen nu:

$$\begin{aligned}
 \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int_0^1 r dr (-2r \cos \varphi - 4r \sin \varphi) \\
 &= -2 \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \cos \varphi d\varphi \int_0^1 r^2 dr - 4 \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 r^2 dr \\
 &= -\frac{2}{3} [\sin \varphi]_{-\pi/4}^{3\pi/4} + \frac{4}{3} [\cos \varphi]_{-\pi/4}^{3\pi/4} \\
 &= -\frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{4}{3}\sqrt{2} = -2\sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

De rand Γ wordt is de unie van:

- Γ_1 , het deel van de tweede bissectrice $y = -x$ gelegen binnen de eenheidscirkel;

- Γ_2 , het deel van de eenheidscirkel gelegen boven de tweede bissectrice.

We berekenen nu

$$\oint_{\Gamma_1} (x^2 + y^2)dx - (x + y)^2 dy = \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} 2x^2 dx = \frac{2}{3} [x^3]_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Een stel parametervergelijkingen van Γ_2 is

$$\begin{cases} x = \cos \varphi \\ y = \sin \varphi \end{cases}$$

waarbij $\varphi \in [-\pi/4, 3\pi/4]$, zodat

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_2} (x^2 + y^2)dx - (x + y)^2 dy &= \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} d \cos \varphi - \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} d \sin \varphi - 2 \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \sin \varphi \cos^2 \varphi d\varphi \\ &= -\sqrt{2} - \sqrt{2} + \frac{2}{3} [\cos^3 \varphi]_{-\pi/4}^{3\pi/4} = -2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

We besluiten dat

$$\oint_{\Gamma^+} (x^2 + y^2)dx - (x + y)^2 dy = \frac{\sqrt{2}}{3} - 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} = -2\sqrt{2}.$$

3. Een stel parametervergelijkingen van het oppervlak S is

$$\begin{cases} x = 3 \cos \varphi \sin \theta \\ y = 3 \sin \varphi \sin \theta \\ z = 1 + 3 \cos \theta \end{cases}$$

waarbij $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [0, \arccos \frac{1}{3}]$. We berekenen nu

$$\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} 3 \cos \varphi \sin \theta & 3 \sin \varphi \sin \theta & 0 \\ -3 \sin \varphi \sin \theta & 3 \cos \varphi \sin \theta & 0 \\ 3 \cos \varphi \cos \theta & 3 \sin \varphi \cos \theta & -3 \sin \theta \end{vmatrix} = -27 \sin^3 \theta$$

Nu is ($\varepsilon = \pm 1$)

$$\begin{aligned} \Phi &= -27\varepsilon \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\arccos \frac{1}{3}} \sin^3 \theta d\theta \\ &= 54\pi\varepsilon \int_0^{\arccos \frac{1}{3}} (1 - \cos^2 \theta) d \cos \theta \\ &= 54\pi\varepsilon \left[\cos \theta - \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{\arccos \frac{1}{3}} \\ &= 54\pi\varepsilon \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{81} - 1 + \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

4. Aangezien $b \leq a + 1$ geldt voor alle $i \geq 1$ dat $b + i \leq a + i + 1$, en dus

$$\frac{a + i + 1}{b + i} \geq 1.$$

Hieruit volgt dat

$$\frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+n)}{b(b+1)(b+2)\dots(b+n)} \geq \frac{a}{b+n}.$$

Aangezien

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{b+n}$$

divergent is, volgt uit het vergelijkend criterium dat de gegeven reeks ook divergent is.

5. We nemen y als onafhankelijke variabele en zoeken x in functie van y . Dan is

$$y = \frac{1}{x}; \quad y' = \frac{1}{x'}; \quad y'' = -\frac{x''}{x'^3}.$$

De differentiaalvergelijking wordt nu

$$-(y-1)\frac{x''}{x'^3} + \frac{y+1}{x'^2} = 0$$

Stel $z = x'$. Dan vinden we

$$-(y+1)z' + (y+1)z = 0$$

of

$$\frac{dz}{z} = \frac{y+1}{y-1} dy = \left(1 + \frac{2}{y-1}\right) dy.$$

Integreren geeft

$$\ln z = y + 2 \ln(y-1)$$

en

$$x' = z = c(y-1)^2 e^y$$

Nogmaals integreren geeft nu

$$\begin{aligned} x &= c \int (y-1)^2 de^y = c(y-1)^2 e^y - 2c \int (y-1)e^y dy \\ &= c(y-1)^2 e^y - 2c(y-1)e^y + 2c \int e^y dy \\ &= c((y-1)^2 - 2(y-1) + 2)e^y + d \\ &= c((y-2)^2 + 1)e^y + d \end{aligned}$$

Ook $y = c$ is een oplossing van de differentiaalvergelijking.

6. We herschrijven de differentiaalvergelijking als

$$x^2 y'' + \left(2x^2 - \frac{x}{2}\right) y' - 6xy = 0.$$

We zien dat $x = 0$ een regelmatig singulier punt is, en stellen als oplossing voor

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\rho}$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + \rho) c_n x^{n+\rho-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + \rho)(n + \rho - 1) c_n x^{n+\rho-2}$$

We substitueren dit in de differentiaalvergelijking

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n + \rho)(n + \rho - 1) c_n x^{n+\rho} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n + \rho) c_n x^{n+\rho+1} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n + \rho) c_n x^{n+\rho} - 6 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\rho+1} = 0.$$

of

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n + \rho)(n + \rho - 1) c_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n + \rho) c_n x^{n+1} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n + \rho) c_n x^n - 6 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0.$$

of

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n + \rho)(n + \rho - 1) c_n x^n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (n + \rho - 1) c_{n-1} x^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n + \rho) c_n x^n - 6 \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n = 0.$$

Als we kijken naar de constante coëfficiënten:

$$\rho(\rho - 1) - \frac{\rho}{2} = 0$$

$$\rho\left(\rho - \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$\rho = 0 \text{ of } \rho = \frac{3}{2}.$$

Als we kijken naar de coëfficiënten in x^n vinden we

$$\left((n + \rho)(n + \rho - 1) - \frac{1}{2}(n + \rho)\right) c_n = (-2(n + \rho - 1) + 6) c_{n-1}.$$

of

$$c_n = \frac{4(4 - n - \rho)}{(n + \rho)(2n + 2\rho - 3)} c_{n-1}.$$

Eerste geval: $\rho = 0$. De recursiebetrekking wordt:

$$c_n = \frac{4(4 - n)}{n(2n - 3)} c_{n-1}.$$

Merk op dat $c_4 = 0$, zodat de oplossing een veelterm van graad 3 is, namelijk

$$y_1 = 1 - 12x - 48x^2 - \frac{64}{3}x^3.$$

Convergentiegebied: \mathbb{R} (uiteraard, we hebben een veelterm).

Tweede geval: $\rho = 3/2$. De recursiebetrekking wordt:

$$c_n = \frac{2(5 - 2n)}{n(2n + 3)} c_{n-1}.$$

De convergentiestraal van de machtreeks is

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n-1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n(2n + 3)}{2(5 - 2n)} \right| = +\infty.$$

Het convergentiegebied is dus weer \mathbb{R} .



Oefeningen Analyse I en II

1. Bereken de volgende limiet, indien hij bestaat

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \sin y}{y^2 + |x^{1/3}|}$$

2. Bepaal de cosinus en de tangens van de hoek(en) waaronder de grafieken van de functies $f_1(x) = x^2 - x + 1$ en $f_2(x) = x^3$ elkaar snijden.
3. Een reisbureau richt een busreis in. Het minimum aantal deelnemers is 50. In dat geval kost een ticket voor de reis 200€ per persoon. Als er meer dan 50 deelnemers zijn, daalt de prijs per deelnemer met 2€ per extra deelnemer boven de 50 deelnemers (bij 51 deelnemers betaalt iedereen 198€, bij 52 deelnemers betaalt iedereen 196€,...). Het maximum aantal deelnemers is 80. De reis kost aan het reisbureau 6000€ plus 32€ per deelnemer. Bij hoeveel reizigers is de winst maximaal?
4. Ga na voor welke waarden van $a \in \mathbb{R}$ de integraal

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^a}{(x+1)^{5/2}} dx$$

convergent is.

5. Bepaal de algemene integraal van de volgende differentiaalvergelijking

$$y' \sqrt{x} - y + (x + 2\sqrt{x}) \sqrt{y} = 0.$$

6. Bepaal de algemene integraal van de volgende differentiaalvergelijking

$$y'' - 2y' + y = 2\text{sh } x.$$

7. Onderzoek de convergentie van volgende positieve reeks

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}.$$

8. S is het deel van het oppervlak met vergelijking $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ waarvoor $z \leq 4$, en \vec{v} is het vectorveld

$$\vec{v} = y\vec{u}_1 + x^2\vec{u}_2 + (2xz + 3y)\vec{u}_3.$$

Gebruik de formule van Stokes om de integraal

$$\iint_S \text{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} dO$$

op twee manieren te berekenen.

Tijd: vier uur ; vragen 1, 2, 3, 6 en 7: 10 punten; vraag 4: 15 punten; vraag 5: 17 punten; vraag 8: 18 punten; totaal: 100 punten. Syllabus en oefeningenboek mogen gebruikt worden; zakrekenmachine en opgeloste oefeningen mogen niet gebruikt worden.

Oplossingen

1. Voor elke $(x, y) \neq (0, 0)$ hebben we

$$\left| \frac{x \sin y}{y^2 + |x^{\frac{1}{3}}|} \right| = |x^{2/3}| \left| \frac{x^{1/3}}{y^2 + |x^{\frac{1}{3}}|} \right| |\sin y| \leq |x^{2/3}|,$$

aangezien $|x^{1/3}| \leq y^2 + |x^{\frac{1}{3}}|$ en $|\sin y| \leq 1$. Aangezien

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |x^{2/3}| = 0$$

volgt uit de sandwichstelling dat

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \sin y}{y^2 + |x^{1/3}|} = 0$$

2. We bepalen eerst de snijpunten van de krommen C_1 en C_2 :

$$x^3 = x^2 - x + 1$$

$$x^3 - x^2 + x - 1 = 0$$

$$x^2(x - 1) + (x - 1) = 0$$

$$(x^2 + 1)(x - 1) = 0$$

$$x = 0, \quad y = 1$$

Methode 1

Raaklijn l_1 in $(1, 1)$ aan C_1 : $x - y = 0$

Raaklijn l_2 in $(1, 1)$ aan C_2 : $3x - y - 2 = 0$

Richtingsvector van l_1 : $\vec{r}_1 = (\vec{u}_1 - \vec{u}_2)/\sqrt{2}$

Richtingsvector van l_2 : $\vec{r}_2 = (3\vec{u}_1 - \vec{u}_2)/\sqrt{10}$

Als α de hoek tussen l_1 en l_2 is, dan is

$$\cos \alpha = \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Methode 2

Zij α_i de hoek tussen l_i en de x -as. Dan is

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = f'_1(1) = 1 \quad ; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = f'_2(1) = 3.$$

Dan is

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_2 \operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{3 - 1}{1 + 3} = \frac{1}{2}$$

en dan is

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

3. Stel x het aantal deelnemers aan de reis. Het reisbureau heeft volgende inkomsten uit de verkoop van de ticketten

$$x(200 - 2(x - 50))$$

De uitgaven bedragen

$$6000 + 32x$$

De winst die geboekt wordt is dus (in €):

$$f(x) = x(200 - 2(x - 50)) - 32x - 6000 = 168x - 2x^2 - 6000$$

Stationaire punten:

$$f'(x) = 268 - 4x = 0, \text{ of } x = 67.$$

Omdat $f''(x) = -4 < 0$ bereikt f een maximum in $x = 67$. Merk tenslotte op dat x een natuurlijk getal tussen 50 en 80 is.

4. We onderzoeken eerst de convergentie van de oneigenlijke integraal van de tweede soort

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x^a}{(x+1)^{5/2}} dx.$$

Zolang $a \geq 0$ is dit een gewone integraal van een continue functie op $[0, 1]$, en stelt het probleem van convergentie zich niet. We bekijken het geval $a < 0$. Aangezien

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(x+1)^{5/2}} = 1$$

bestaat er een $\delta > 0$ zodat

$$0 < x < \delta \implies \frac{1}{2} < \frac{1}{(x+1)^{5/2}} < \frac{3}{2}.$$

Eerste geval: $a \in (-1, 0)$.

$$0 < x < \delta \implies \frac{x^a}{(x+1)^{5/2}} < \frac{3}{2}x^a.$$

Omdat $\int_0^1 x^a dx$ convergent is, convergeert dus ook I_1 . Tweede geval: $a \in (-\infty, -1)$.

$$0 < x < \delta \implies \frac{x^a}{(x+1)^{5/2}} > \frac{1}{2}x^a.$$

Omdat $\int_0^1 x^a dx$ divergent is, divergeert dus ook I_1 .

Nu onderzoeken we de convergentie van de oneigenlijke integraal van de eerste soort

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{x^a}{(x+1)^{5/2}} dx.$$

Eerste geval: $\alpha = 5/2 - a > 1$ of $a < 3/2$. Voor elke $x > 1$ hebben we

$$\frac{x^a}{(x+1)^{5/2}} < \frac{x^a}{x^{5/2}} = \frac{1}{x^\alpha}.$$

Omdat

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

convergent is, vinden we dat ook I_2 convergent is.

Tweede geval: $\alpha = 5/2 - a < 1$ of $a > 3/2$. Voor elke $x > 1$ hebben we

$$\frac{x^a}{(x+1)^{5/2}} > \frac{x^a}{(2x)^{5/2}} = 2^{-5/2} \frac{1}{x^\alpha}.$$

Omdat

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

divergent is, vinden we dat ook I_2 divergent is.

De gegeven integraal

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^a}{(x+1)^{5/2}} dx$$

convergeert als en alleen als I_1 en I_2 convergeren. Uit bovenstaande berekeningen volgt dat dit het geval is als en alleen als $a \in (-1, 3/2)$.

5. Dit is een vergelijking van Bernoulli. Substitutie:

$$z = \sqrt{y}, \quad z' = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

De vergelijking wordt:

$$2z'\sqrt{x} - z = -x - 2\sqrt{x}.$$

We integreren eerst de homogene vergelijking:

$$\frac{z'}{z} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\ln z = \sqrt{x} + \ln c$$

$$z_h = ce^{\sqrt{x}}.$$

Om een particuliere integraal te vinden passen we de methode van de variatie van de constante toe:

$$z_p = c(x)e^{\sqrt{x}}.$$

Substitutie in de vergelijking levert:

$$2\sqrt{x}c'(x)e^{\sqrt{x}} = -x - 2\sqrt{x}$$

$$c(x) = - \int \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{2}\right) e^{-\sqrt{x}} dx$$

Substitutie: $u = \sqrt{x}, x = u^2, dx = 2udu$.

$$\begin{aligned}c(x) &= - \int (1 + \frac{u}{2})e^{-u}2udu \\ &= \int (2u + u^2)de^{-u} \\ &= (2u + u^2)e^{-u} - \int (2 + 2u)e^{-u} du \\ &= (2u + u^2)e^{-u} + (2 + 2u)e^{-u} - \int 2e^{-u}du \\ &= (u^2 + 4u + 4)e^{-u}\end{aligned}$$

$$z_p = x + 4\sqrt{x} + 4$$

$$y = (x + 4\sqrt{x} + 4 + Ce^{\sqrt{x}})^2$$

6. We integreren eerst de homogene vergelijking. De karakteristieke vergelijking is $(\lambda - 1)^2 = 0$. $\lambda = 1$ is een dubbele wortel en de integraal van de homogene vergelijking is

$$y_h = (Ax + B)e^x.$$

We zoeken een particuliere integraal van de vorm

$$y_p = Ax^2e^x + Be^{-x}$$

$$y'_p = (2Ax + Ax^2)e^x - Be^{-x}$$

$$y''_p = ((2A + 4Ax + Ax^2)e^x + Be^{-x})$$

Invullen in de vergelijking geeft

$$2Ae^x + 4Be^{-x} = e^x - e^{-x}$$

of

$$A = \frac{1}{2} ; B = -\frac{1}{4}$$

Tenslotte

$$y = (\frac{x^2}{2} + Ax + B)e^x - \frac{1}{4}e^{-x}$$

7. We passen het vergelijkend criterium toe. De harmonische reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ is divergent, en

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e \in (0, +\infty).$$

We besluiten dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$$

divergent is.

8. De vergelijking van de rand C van S is

$$\begin{cases} x = 4 \cos \theta \\ y = 4 \sin \theta \\ z = 4 \end{cases}$$

waarbij θ loopt van 0 tot 2π . Uit de kurketrekkerregel volgt dan dat de eenheidsnormaal \vec{n} op S naar boven gericht moet zijn. De formule van Stokes luidt dan als volgt:

$$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} dO$$

We berekenen eerst het linkerlid:

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} &= \int_{\theta=0}^{2\pi} y dx + x^2 dy \\ &= -16 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta + 64 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d \sin \theta \\ &= -16\pi + 64 \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 \theta) d \sin \theta = -16\pi \end{aligned}$$

De vergelijking van S is, in parametervorm,

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = r \end{cases}$$

waarbij θ loopt van 0 tot 2π , en r van 0 tot 4. We berekenen

$$\text{rot} \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x^2 & 2xz + 3y \end{vmatrix} = 3\vec{u}_1 - 2z\vec{u}_2 + (2x - 1)\vec{u}_3$$

en

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} &= \begin{vmatrix} 3 & -2z & 2x - 1 \\ \cos \theta & \sin \theta & 1 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= r(2x - 1) + (2rz \sin \theta - 3r \cos \theta) \\ &= 2r^2 \cos \theta - r + 2r^2 \sin \theta - 3r \cos \theta \end{aligned}$$

Uit de rechterhandregel volgt dat de normaal

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}$$

naar boven gericht is, en dus

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} dO &= \int_0^4 dr \int_0^{2\pi} d\theta \text{rot} \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \\ &= \int_0^4 dr \int_0^{2\pi} d\theta (2r^2 \cos \theta - r + 2r^2 \sin \theta - 3r \cos \theta) \end{aligned}$$

We splitsen de integraal op in de som van vier integralen. Omdat $\int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0$ zijn drie van de vier integralen gelijk aan 0, en vinden we

$$\iint_S \text{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} dO = - \int_0^4 r dr \int_0^{2\pi} d\theta = -16\pi.$$