Vrije Universiteit Brussel

1ste Bachelor Ingenieurswetenschappen
Academiejaar 2007-2008
1ste semester
10 januari 2008

Analyse I

1. Bewijs de stelling van Bolzano-Weierstrass: elke oneindige begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$ heeft minstens 1 verdichtingspunt.

2. We beschouwen een functie $\vec{F}\ :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gedefinieerd op een omgeving van $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. Toon aan dat
$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{F}(\vec{x}) = \vec{b} = (b_1, \cdots, b_m) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f_i(\vec{x}) = b_i,$$
voor elke $i = 1, 2, \cdots, m$. Hierbij is f_i de i-de component van de functie $\vec{F}$.

3. Formuleer en bewijs de stelling van de impliciete functie voor het oplossen van de vergelijking $f(x, y) = 0$. Leid ook een formule af voor $y'(x)$ en $y''(x)$, en schrijf de Taylorveelterm voor y op tot op orde 2.

4. Geef de definitie van differentieerbaarheid van een functie $f\ :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in het punt $\vec{a} = (a_1, \cdots, a_n)$. Bewijs dat differentieerbaarheid in $\vec{a}$ het bestaan van alle richtingsafgeleiden in $\vec{a}$ impliceert. Bewijs ook dat differentieerbaarheid in $\vec{a}$ continuïteit in $\vec{a}$ impliceert.

Tijd: 100 minuten; alle vragen worden gekwoteerd op 10 punten.

Oefeningen Analyse I

1. Ga na of de limiet
$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x+y)^3-8}{(x+y)^2-4}$$
bestaat; bereken hem indien hij bestaat.

2. Bereken de tweede differentiaal $\mathrm{d}^2 f$ van de functie
$$f(x,y,z) = \ln(x^{y^z})$$
in het punt $(1,1,1)$.

3. De vergelijking
$$\ln z + x^y - 2 = 0$$
bepaalt z als impliciete functie van x en y op een omgeving van $(1,1)$, waarbij $z(1,1) = e$. Bepaal de vergelijking van het raakvlak aan de grafiek van z in het punt $(1,1,e)$. Bereken ook
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,1).$$

4. Een fabrikant wil een zo goedkoop mogelijk cilindervomig vat produceren met een volume van 756 l. Het materiaal waaruit de bodem gemaakt is is driemaal zo duur, en het materiaal waaruit het deksel gemaakt is half zo duur als het materiaal waaruit de rest van het vat, de mantel, gemaakt is. Welke straal en hoogte moet het vat hebben opdat de prijs van het vat minimaal is.

5. Bereken de integraal
$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x.$$

Tijd: 180 minuten; alle vragen worden gekwoteerd op 10 punten.

Oplossingen

1.

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x+y)^3-8}{(x+y)^2-4} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x+y-2)((x+y)^2+2(x+y)+4)}{(x+y-2)(x+y+2)}$$
$$= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{((x+y)^2+2(x+y)+4)}{(x+y+2)} = \frac{4+4+4}{4} = 3.$$

2. Merk eerst op dat

$$f(x,y,z) = y^z \ln x$$

We berekenen dan achtereenvolgens alle partiële afgeleiden tot op orde 2:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^z}{x} \; ; \; \frac{\partial f}{\partial y} = zy^{z-1}\ln x \; ; \; \frac{\partial f}{\partial z} = y^z \ln y \ln x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{y^z}{x^2} \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1,1) = -1$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = z(z-1)y^{z-2}\ln x \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1,1) = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = y^z(\ln y)^2 \ln x \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(1,1,1) = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{z}{x}y^{z-1} \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,1,1) = 1$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\ln y}{x}y^z \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(1,1,1) = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = (z\ln y + 1)y^{z-1}\ln x \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(1,1,1) = 0$$

We besluiten dat

$$\mathrm{d}^2 f(1,1,1) = -\mathrm{d}x^2 + 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

3. $f(x,y) = \ln z + x^y - 2 = 0$. We berekenen eerst

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{yx^{y-1}}{\frac{1}{z}} = -yzx^{y-1} \; ; \; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{x^y \ln x}{\frac{1}{z}} = -zx^y \ln x$$

Omdat $z(1,1) = e$ volgt hieruit onmiddellijk dat

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = -e \text{ en } \frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = 0$$

de vergelijking van het raakvlak in $(1,1,e)$ aan de grafiek van z is dus

$$z - e = -e(x-1) \text{ of } ex + z = 2e.$$

We berekenen nu de partiële afgeleide naar x van $\frac{\partial z}{\partial x}$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -y\frac{\partial z}{\partial x}x^{y-1} - y(y-1)zx^{y-2}$$

Als we $x = 1$, $y = 1$, $z = e$, $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = -e$ invullen, dan vinden we dat

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,1) = e$$

4. Stel R de straal van de bodem, en h de hoogte van het vat, in decimeter. Als ρ de prijs van het materiaal van de mantel van het vat is, per vierkante decimeter, dan is de totale prijs van het vat

$$\pi\rho(2Rh + \frac{7}{2}R^2).$$

We minimaliseren

$$f(R,h) = 2Rh + \frac{7}{2}R^2$$

met nevenvoorwaarde

$$R^2 h = 756/\pi.$$

<u>1) Methode van de multiplicatoren van Lagrange</u>

$$f^*(R,h,\lambda) = 2Rh + \frac{7}{2}R^2 + \lambda(R^2h - 756/\pi).$$

De stationaire punten zijn oplossingen van de volgend stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} \frac{\partial f^*}{\partial h} = 2R + \lambda R^2 = 0 \\ \frac{\partial f^*}{\partial R} = 2h + 7R + 2\lambda Rh = 0 \end{cases}$$

Uit de eerste vergelijking volgt dat $\lambda R = -2$. Als we dit substitueren in de tweede vergelijking, dan volgt dat $7R - 2h = 0$ of

$$h = \frac{7R}{2}.$$

Dit stoppen we in de nevenvoorwaarde. We vinden

$$\frac{7}{2}R^3 = \frac{756}{\pi}$$

of

$$R = \frac{6}{\sqrt[3]{\pi}} \text{ en } h = \frac{21}{\sqrt[3]{\pi}}.$$

We gaan na dat voor deze waarden een minimum bereikt wordt. We bepalen $\mathrm{d}^2 f^*$ in het stationair punt. In het stationair punt hebben we

$$\frac{\partial^2 f^*}{\partial h^2} = 0 \ ; \ \frac{\partial^2 f^*}{\partial h \partial h} = 2(1 + \lambda R) = -2;$$

$$\frac{\partial^2 f^*}{\partial R^2} = 7 + 2\lambda h = 7 + 7\lambda R = -7$$

zodat

$$d^2 f^* = -4dRdh - 7dR^2$$

Als we de nevenvoorwaarde differentiëren vinden we

$$2RhdR + R^2 dh = 0$$

of, in het stationair punt,

$$dh = -\frac{2h}{R}dR = -7dR$$

zodat

$$d^2 f^* = 28dR^2 - 7dR^2 = 21dR^2 > 0$$

<u>2) Directe methode</u>

We lossen de nevenvoorwaarde op naar h, en substitueren in f. We vinden

$$h = \frac{756}{\pi R^2},$$

zodat we volgende functie moeten minimaliseren:

$$g(R) = \frac{2 \times 756}{\pi R} + \frac{7}{2}R^2.$$

We bepalen eerst de stationaire punten:

$$g'(R) = -\frac{2 \times 756}{\pi R^2} + 7R = 0$$

als en alleen als

$$R^3 = \frac{2 \times 756}{7\pi} = \frac{216}{\pi}$$

als en alleen als

$$R = \frac{6}{\sqrt[3]{\pi}} \text{ en } h = \frac{756}{\pi R^2} = \frac{21}{\sqrt[3]{\pi}}.$$

Om te bepalen of we te doen hebben met een maximum berekenen we $g''(\frac{6}{\sqrt[3]{\pi}})$.

$$g''(R) = \frac{4 \times 756}{\pi R^3} + 7$$

en

$$g''(\frac{6}{\sqrt[3]{\pi}}) = \frac{4 \times 756}{\pi 6^3} + 7 = 14 + 7 = 21 > 0$$

zodat g een minimum bereikt in $R = 6/\sqrt[3]{\pi}$.

5. We mogen onderstellen dat $x \geq 1$.

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x = \int \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^2}{x+1-(x-1)}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int (x+1-2\sqrt{x^2-1}+x-1)\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}x - \int \sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Om de tweede integraal uit te rekenen passen we volgende substitutie toe:

$$t = \operatorname{argch}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1}), \quad x = \operatorname{ch}(t), \quad \mathrm{d}x = \operatorname{sh}(t)\mathrm{d}t.$$

$$\begin{aligned}
I &= \frac{x^2}{2} - \int \operatorname{sh}^2(t)\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\int (e^t - e^{-t})\mathrm{d}t \\
&= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\int (e^{2t} - 2 + e^{-2t})\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int (\operatorname{ch}(2t)-1)\mathrm{d}t \\
&= \frac{x^2}{2} - \frac{\operatorname{sh}(2t)}{4} + \frac{t}{2} + c = \frac{x^2}{2} - \frac{\operatorname{sh}(t)\operatorname{ch}(t)}{2} + \frac{t}{2} + c \\
&= \frac{1}{2}(x^2 - x\sqrt{x^2-1} - \ln(x+\sqrt{x^2-1}) + c.
\end{aligned}$$

Vrije Universiteit Brussel

1ste Bachelor Ingenieurswetenschappen
Academiejaar 2007-2008
1ste semester
16 juni 2008

Oefeningen Analyse II

1. Bereken de lijnintegraal
$$\oint_{\Gamma^+} xy(dx+dy)$$
op twee verschillende manieren, gebruik makend van de stelling van Green-Riemann. Hierbij is Γ de rand van het gebied
$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - y^2 \geq 1\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq \sqrt{10}\}.$$

2. Bereken de oppervlakte van het gedeelte van de sfeer $x^2+y^2+z^2 = 4$ in $\mathbb{R}^3$, gelegen in het deel van $\mathbb{R}^3$ met vergelijking $x^2+y^2 \geq 1$.

3. Beschouw de volgende reeks van functies ($x \in \mathbb{R}^+$):
$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x+1}{(n+x)(n+x+1)}$$
   - Onderzoek de uniforme convergentie op het open interval (a,b), waarbij $0 \leq a < b \in \mathbb{R}$.
   - Bereken voor $x \in \mathbb{R}^+$ de reekssom $s(x)$.

4. Bepaal het convergentiegedrag van de numerieke reeks:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\ln(n)}{5n^2+2n}\right)$$

5. In het volgende differentiaalstelsel zijn y en z zijn functies van de veranderlijke x:
$$\begin{cases} y' + 2y + z = \sin(x) \\ z' - 5y - 2z = \cos(x) \end{cases}$$
Bepaal y met behulp van de methode van afleiding en eliminatie.

6. Integreer de volgende differentiaalvergelijking (met $0 < x < \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$):
$$\ln(\cos(x))y' - \mathrm{tg}(x)y + \frac{1}{x}\sin(\ln(x)) = 0$$

Tijd: 3 uur en 45 minuten; vraag 1: 15 punten, vraag 4: 5 punten, vragen 2,3,5,6: 10 punten; totaal: 60 punten.

Oplossingen

1. Formule van Green-Riemann:

$$\oint_{\Gamma^+} xy\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y = \iint_G (y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

We berekenen eerst het linkerlid. De kromme Γ is de aaneenschakeling van de krommen C_1 en C_2, waarbij C_1 het deel is van de hyperbool met vergelijking

$$\begin{cases} x = \operatorname{ch} t \\ y = \operatorname{sh} t \end{cases}$$

waarbij t loopt van $t_2 = \ln(\sqrt{10}+3)$ tot $t_1 = \ln(\sqrt{10}-3)$.
We merken hierbij op dat $\operatorname{ch} t_1 = \operatorname{ch} t_2 = \sqrt{10}$ en $-\operatorname{sh} t_1 = \operatorname{sh} t_2 = 3$.
C_2 is het verticale lijnstuk met vergelijking $x = \sqrt{10}$, waarbij y loopt van -3 tot 3. We berekenen nu:

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} xy(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y) &= \int_{t_2}^{t_1} \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t(\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_2}^{t_1} \operatorname{sh}^2(t)\mathrm{d}\operatorname{sh} t + \int_{t_2}^{t_1} \operatorname{ch}^2(t)\mathrm{d}\operatorname{ch} t \\
&= \frac{1}{3}(\operatorname{ch}^3(t_1) - \operatorname{ch}^3(t_2) + \operatorname{sh}^3(t_1) - \operatorname{sh}^3(t_2)) = -54/3 = -18; \\
\int_{C_2} xy(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y) &= \int_{-3}^{3} \sqrt{10}y\mathrm{d}y = 0.
\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat

$$\oint_{\Gamma^+} xy\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y = -18 + 0 = -18.$$

Nu berekenen we het rechterlid.

$$\begin{aligned}
-\iint_G x\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= -\int_{-3}^{3} \mathrm{d}y \int_{\sqrt{1+y^2}}^{\sqrt{10}} x\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\int_{-3}^{3} (10 - (1+y^2))\mathrm{d}y \\
&= -\frac{1}{2}\int_{-3}^{3} (9 - y^2)\mathrm{d}y \\
&= -\frac{1}{2}\left[9y - y^3/3\right]_{-3}^{3} = -18; \\
\iint_G y\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_1^{\sqrt{10}} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{x^2-1}}^{\sqrt{x^2-1}} y\mathrm{d}y = 0,
\end{aligned}$$

zodat

$$\iint_G (y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -18 + 0 = -18.$$

2. We berekenen $1/8$ van de oppervlakte, namelijk van dat gedeelte van het oppervlak dat gelegen is in het eerste octant. De vergelijking van de sfeer is, in cilindercoördinaten:

$$z^2 = 4 - \rho^2 \text{ of } z = \sqrt{4-\rho^2}.$$

Een stel parametervergelijkingen van het oppervlak is dus

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = \sqrt{4-\rho^2} \end{cases}$$

waarbij $0 \le \theta \le \pi/2$ en $1 \le \rho \le 2$. We berekenen nu

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ \cos\theta & \sin\theta & -\frac{\rho}{\sqrt{4-\rho^2}} \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \frac{\rho^2}{\sqrt{4-\rho^2}}\cos\theta\vec{u}_1 + \frac{\rho^2}{\sqrt{4-\rho^2}}\sin\theta\vec{u}_2 + \rho\vec{u}_3$$

en

$$\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\| = \sqrt{\frac{\rho^4}{4-\rho^2} + \rho^2} = \frac{2\rho}{\sqrt{4-\rho^2}}.$$

zodat

$$\frac{S}{8} = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_1^2 \frac{2\rho\mathrm{d}\rho}{\sqrt{4-\rho^2}} = \frac{\pi}{2}\left[-2\sqrt{4-\rho^2}\right]_1^2 = \pi\sqrt{3}$$

en

$$S = 8\pi\sqrt{3}$$

3. a) Voor elke $x \in (a,b)$ geldt dat

$$\left|\frac{x+1}{(n+x)(n+x+1)}\right| \le \frac{b+1}{n^2}.$$

Omdat $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ convergent is, volgt nu uit het criterium van Weierstrass dat de reeks s uniform convergent is over (a,b).
b) Splitsing in partiële breuken levert

$$\frac{1}{(n+x)(n+x+1)} = \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+1}$$

Hiermee berekenen we gemakkelijk de partiële sommen van $s(x)$:

$$\begin{aligned} s_n(x) &= (x+1)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i+x} - \frac{1}{i+x+1}\right) \\ &= (x+1)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i+x} - \sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j+x}\right) = (x+1)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{n+1+x}\right) \end{aligned}$$

en

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}.$$

4. De reeks is divergent aangezien

$$\lim_{n\to\infty} \cos \frac{\ln n}{5n^2 + 2n} = 1 \neq 0.$$

5. Afleiden van de eerste vergelijking geeft:

$$y'' + 2y' + z' = \cos x$$

Uit de tweede vergelijking volgt dat $z' = 5y + 2z + \cos x$. Dan volgt

$$y'' + 2y' + 5y + 2z = 0$$

Uit de eerste vergelijking volgt dat $z = -y' - 2y + \sin x$. Dan volgt

$$y'' + 2y' + 5y - 2y' - 4y + 2\sin x = 0$$

en

$$y'' + y = -2\sin x$$

De algemene integraal van de geassocieerde homogene vergelijking is

$$y_h = A\cos x + B\sin x$$

Als particulier integraal van de volledige vergelijking stellen we voor

$$y_p = Cx\cos x + Dx\sin x$$

Als we dit substitueren in de differentiaalvergelijking vinden we

$$y_p'' + y_p = -2C\sin x + 2D\cos x = -2\sin x$$

Hieraan is voldaan als $C = 1$ en $D = 0$, en we hebben dus een particuliere integraal

$$y_p = x\cos x$$

We besluiten dat

$$y = (x + A)\cos x + B\sin x$$

6. We integreren eerst de geassocieerde homogene vergelijking

$$\ln(\cos x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y\mathrm{tg}\, x$$

of

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{tg}\, x}{\ln(\cos x)} = -\frac{\mathrm{d}\ln(\cos x)}{\ln(\cos x)}$$

$$\ln y = -\ln(\ln(\cos x)) + \ln c$$

$$y_h = \frac{c}{\ln(\cos x)}$$

We zoeken nu een particuliere integraal met de methode van de variatie van de constante:

$$y_p = \frac{c(x)}{\ln(\cos x)}$$

We vinden

$$c'(x) = -\frac{\sin(\ln x)}{x}$$

en

$$c(x) = -\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\mathrm{d}x$$

Substitutie: $u = \ln x$, $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x/x$:

$$c(x) = -\int \sin u \mathrm{d}u = \cos u = \cos(\ln x)$$

We vinden

$$y_p = \frac{\cos(\ln x)}{\ln(\cos x)}$$

en

$$y = y_h + y_p = \frac{c + \cos(\ln x)}{\ln(\cos x)}$$

Oefeningen Analyse I en II

1. Bereken, zo hij bestaat, de volgende limiet:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(x)} - e^x}{x\cos(x) - \sin(x)}.$$

2. De betrekking

$$yx^2 + \ln(xy) = 1.$$

bepaalt y als impliciete functie van x op een omgeving van $x = 1$, waarbij $y(1) = 1$. Bepaal de vergelijking van de raaklijn in het punt $(1, 1)$ aan de kromme met vergelijking $y = y(x)$.

3. Bereken de onbepaalde integraal:

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx.$$

4. Wat is het maximale volume van een kegel ingeschreven in een boloppervlak met straal R? (Het volume van een kegel is de oppervlakte van de basis maal de hoogte gedeeld door 3).

5. S is het deel van het vlak met vergelijking

$$15x + 10y + 6z = 30$$

dat gelegen is in het eerste octant. Bereken

$$I = \iint_S y \mathrm{d}O.$$

6. Ga na of de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + 2^n + 3^n}{1 + n2^n + n^2 3^n}$$

convergeert of divergeert.

7. Voor welke $x \in \mathbb{R}$ is de machtreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{(2n+1)} x^n$$

convergent?

8. Los het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen op met behulp van de methode van eigenwaarden en eigenvectoren (x,y en z stellen functies in een veranderlijke t voor):

$$\begin{cases} x' = 2x - 2y + 3z \\ y' = 3y - 2z \\ z' = -y + 2z \end{cases}$$

Tijd: vier uur ; vragen 1, 3, 6 en 7: 10 punten; vragen 2, 4, 5 en 8: 15 punten; totaal: 100 punten. Syllabus en oefeningenboek mogen gebruikt worden; zakrekenmachine en opgeloste oefeningen mogen niet gebruikt worden.

Oplossingen

1. We berekenen de limiet met behulp van de stelling van Taylor.

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \alpha_1(x)x^3 \\ e^{\sin x} &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \alpha_2(x)x^3 \\ x\cos x &= x - \frac{x^3}{2} + \alpha_3(x)x^3 \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \alpha_4(x)x^3 \end{aligned}$$

met

$$\lim_{x\to 0} \alpha_i(x) = 0.$$

We krijgen dan

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(x)} - e^x}{x\cos(x) - \sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + (\alpha_2(x) - \alpha_1(x))x^3}{-\frac{x^3}{3} + (\alpha_3(x) - \alpha_4(x))x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6} + (\alpha_2(x) - \alpha_1(x))}{-\frac{1}{3} + (\alpha_3(x) - \alpha_4(x))} = \frac{1}{2}.$$

2.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{2xy + 1/x}{x^2 + 1/y};$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(1) = -\frac{3}{2}.$$

Vergelijking van de raaklijn:

$$y - 1 = -\frac{3}{2}(x-1), \text{ of } 3x + 2y - 5 = 0.$$

3.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^3} e^{1/x} \mathrm{d}x &= -\int \frac{1}{x} \mathrm{d}e^{1/x} = -\frac{1}{x} e^{1/x} - \int \frac{1}{x^2} e^{1/x} \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{x} e^{1/x} + e^{1/x} + c = (1 - \frac{1}{x}) e^{1/x} + c \end{aligned}$$

4. Neem de as van de kegel verticaal. De top van de kegel ligt dan op de noordpool van de bol. We stellen de hoogte h van de kegel gelijk aan $h = R + z$. z is dan de afstand van het middelpunt van de bol tot het grondvlak van de kegel. De straal van het grondvlak is dan

$$r = \sqrt{R^2 - z^2},$$

en het volume V van de kegel is

$$V = \frac{\pi}{3}(R^2 - z^2)h = \frac{\pi}{3}(R^2 - z^2)(R + z) = \frac{\pi}{3}(R^3 + zR^2 - z^2R - z^3).$$

Dan is
$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z} = \frac{\pi}{3}(R^2 - 2zR - 3z^2).$$
De nulpunten hiervan zijn $z = -R$ en $z = R/3$. Voor $z = -R$ is $h = 0$ zodat de kegel herleid wordt tot een punt op het boloppervlak, met volume nul. Aangezien

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}z^2} = -\frac{2\pi}{3}(R + 3z)$$

en dus
$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}z^2}(R/3) < 0$$
wordt een maximum bereikt voor $z = R/3$ en $h = 4h/3$. Het maximale volume is dus

$$V_{\max} = \frac{\pi}{3}\frac{8}{9}R^2\frac{4}{3}R = \frac{32\pi R^3}{81}.$$

5. De vergelijking van het vlak herschrijven we als

$$z = 5 - \frac{5}{2}x - \frac{5}{3}y.$$

Hierbij loopt (x, y) over het gebied g in het xy-vlak begrensd door de rechten met vergelijking $x = 0$, $y = 0$ en $x/2 + y/3 = 1$.
We berekenen nu
$$p = -\frac{5}{2},\ \ q = -\frac{5}{3} \text{ en } \sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{19}{6},$$
en

$$\begin{aligned} I &= \iint_S y\mathrm{d}O = \iint_g y\sqrt{1 + p^2 + q^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{19}{6}\int_0^3 y\mathrm{d}y\int_0^{(6-2y)/3}\mathrm{d}x \\ &= \frac{19}{18}\int_0^3 (6y - 2y^2)\mathrm{d}y = \frac{19}{18}\left[3y^2 - 2y^3/3\right]_0^3 = \frac{19}{18}(27 - 18) = \frac{19}{2}. \end{aligned}$$

6. We vergelijken met de convergente reeks $\sum 1/n^2$:

$$\lim_{n\to\infty} n^2\frac{1 + 2^n + 3^n}{1 + n2^n + n^23^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3^n} + \frac{2^n}{3^n} + 1}{\frac{1}{n^23^n} + \frac{2^n}{n3^n} + 1} = 1$$

zodat we kunnen besluiten dat onze reeks convergent is.

7. De convergentiestraal van de machtreeks is

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^5}{2n+1}\frac{2n+3}{(n+2)^5} = 1$$

In de randpunten $x = \pm 1$ is de machtreeks divergent: voor $x = \pm 1$ wordt de machtreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^5}{(2n+1)}(-1)^n,$$

en de limiet van de algemene term van deze reeks is niet nul. De machtreeks convergeert dus voor $x \in (-1, 1)$.

8. We moeten de eigenwaarden en eigenvectoren bepalen van de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Het is duidelijk dat $\lambda_1 = 2$ een eigenwaarde is, met bijhorende eigenvector

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De overige eigenwaarden zijn de wortels van de vergelijking

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - 0.$$

of

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0.$$

De nulpunten zijn $\lambda_2 = 1$ en $\lambda_3 = 4$. De bijhorende eigenvectoren zijn

$$V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en } V_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

De algemene integraal van het differentiaalstelsel is dus

$$X = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + B \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + C \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t}$$

of

$$\begin{cases} x = Ae^{2t} - Be^t + 7Ce^{4t} \\ y = Be^t - 4Ce^{4t} \\ z = Be^t + 2Ce^{4t} \end{cases}$$