Vrije Universiteit Brussel

1ste Bachelor Ingenieurswetenschappen
Academiejaar 2006-2007
1ste semester
2 februari 2007

Analyse I

1. Toon aan dat elke begrensde rij een convergente deelrij heeft. Geef de definitie van een Cauchy rij, en toon aan dat elke Cauchy rij begrensd is. Toon tenslotte aan dat een rij convergent is als en slechts als ze een Cauchy rij is.

2. Formuleer en bewijs de formule van Taylor voor een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Stel de formules op voor de resttermen van Lagrange en Liouville.

3. Gegeven is een functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. We onderstellen dat f continu is en continue partiële afgeleiden heeft op een omgeving van $\vec{a} = (a, b)$. Toon aan dat f differentieerbaar is in $\vec{a}$.

4. Een functie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is differentieerbaar in het punt $\vec{a} = (a_1, \cdots, a_n)$. Formuleer en bewijs een nodige voorwaarde opdat f een extremum bereikt in $\vec{a}$.

Tijd: 90 minuten; vraag 1: 15 punten; vragen 2 en 3: 10 punten; vraag 4: 5 punten.

1ste Bachelor Ingenieurswetenschappen
Academiejaar 2006-2007
1ste semester
2 februari 2007

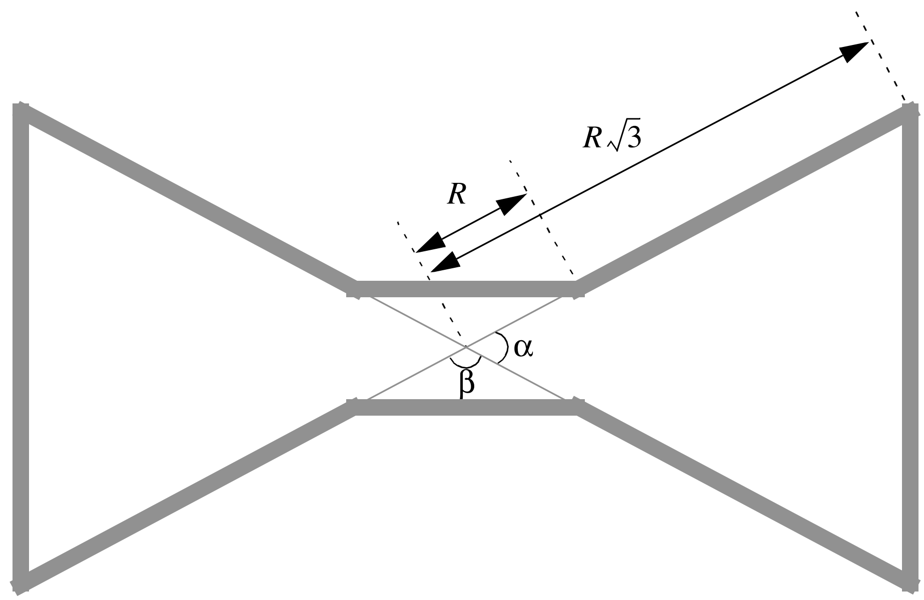
Oefeningen Analyse I

1. Bereken de volgende limiet indien deze bestaat. Indien hij niet bestaat, argumenteer dan waarom niet.
$$\lim_{x\to 0}\frac{[x]}{x}, \quad \text{met} \quad [x]=\max\{y\in\mathbb{Z}\mid y\leq x\}.$$

2. Het stelsel
$$\begin{cases} z\ln y-2x=0 \\ y\ln z-\ln x=0 \end{cases}$$
bepaalt y en z als impliciete functies van x. Hierbij is gegeven dat $y(1)=e^2$ en $z(1)=1$. Bereken de vergelijking van de raaklijn aan de kromme met parametervergelijking
$$\begin{cases} x=t \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$$
in het punt $(1,e^2,1)$.

3. Bereken de eerste differentiaal $\mathrm{d}f$ en de tweede differentiaal $\mathrm{d}^2 f$ van de functie
$$f(x,y,z)=x^{\ln(yz)}$$
in het punt $(1,1,1)$.

4. Beschouw de strik van E. Ri Dupo, zoals geschetst in onderstaande figuur. Hierin is R vast gegeven, en mogen α en β variëren. Het design van de strik is zodanig dat de totale omtrek van de strik (dikke grijze lijn) maximaal is. Wat zijn dan de waarden van α en β?



5. Bereken de integraal

$$\int_0^4 \frac{5}{(16-x^2)+\frac{3x}{4}\sqrt{16-x^2}}\mathrm{d}x.$$

Tijd: 180 minuten; enkel het gebruik van de theoriecursus en het oefeningenboek (zonder opgeloste oefeningen) is toegestaan. Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.

1ste Bachelor Ingenieurswetenschappen
Academiejaar 2006-2007
2de semester
28 juni 2007

Oefeningen Analyse II

1. Onderzoek de convergentie van de numerieke reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{(n-1)}{2}} \cos(n\pi).$$

2. Bepaal voor welke $x \in \mathbb{R}$ de reeks van functies

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^5 x^{2n}}$$

convergent is.

3. Bepaal de algemene integraal van de differentiaalvergelijking

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\cos(2x).$$

4. Bepaal de algemene integraal van de differentiaalvergelijking

$$y' = \frac{7x - 3y + 2}{3x - 4y + 5}.$$

5. Bereken de oppervlakte van het gedeelte van de cilinder $y^2 + z^2 = a^2$ gelegen in het eerste octant, en begrensd door het xy-vlak, het yz-vlak en de parabolische cilinder $y^2 = ax$.

6. Gegeven is de sfeer met vergelijking

$$x^2 + y^2 + z^2 - \sqrt{2}z = \frac{1}{2}.$$

$\vec{n}$ is de naar buiten gerichte eenheidsnormaal op de sfeer. Bereken de flux

$$\iint_S (\vec{v} \cdot \vec{n})\mathrm{d}O$$

van het vectorveld

$$\vec{v} = \frac{\vec{u}_x}{x} + \frac{\vec{u}_y}{y} + \frac{\vec{u}_z}{z - \sqrt{2}/2}$$

doorheen het deel S van de sfeer dat gelegen is boven het xy-vlak. Gebruik hiervoor een gepaste parametrisatie van de sfeer.

Tijd: drie uur; vragen 1 en 2: 5 punten; vragen 3, 4, 5 en 6: 10 punten; totaal: 50 punten.

Oefeningen Analyse I en II

1. De functie $f:\ [1,4] \to \mathbb{R}$ voldoet aan de volgende voorwaarden:
   - $f(x) = ax^2 + bx + c$ voor $x \in [1,2]$;
   - $f(x) = dx^2 + ex + f$ voor $x \in [2,4]$;
   - $f(x)$ is afleidbaar in 2;
   - $f'_+(1) = 1$;
   - de punten 1, 2 en 4 zijn nulpunten van f.

   Bepaal de coëfficiënten a, b, c, d, e en f.

2. Bereken de onbepaalde integraal
$$\int x^3 \mathrm{Bgtg}(x) \mathrm{d}x.$$

3. Ga na of de betrekking
$$x^2 + 4xy + y^3 + 4 = 0$$
   y als impliciete functie van x bepaalt in een omgeving van $(1,-1)$. Bepaal dan
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \text{ en } \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}.$$
   Geef tenslotte de Taylorontwikkeling tot op orde 2 van y rond het punt $x = 1$ (zonder restterm).

4. Gegeven is het vectorveld
$$\vec{V} = yz\vec{u}_1 + xz\vec{u}_2 + xy\vec{u}_3.$$
   Bereken de contourintegraal
$$\oint_{\Gamma^+} \vec{V}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r},$$
   langs de gesloten kromme Γ die gevormd wordt door de halve cirkel met vergelijking
$$\begin{cases} x = 1 - \sqrt{2y - y^2} \\ z = 1 \end{cases}$$
   en de parabool met vergelijking
$$\begin{cases} 2 - x = (y-1)^2 \\ z = 1 \end{cases}$$

5. Bepaal voor welke $x \in \mathbb{R}$ de reeks

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-2)!(-x)^n}{2^n n!}$$

convergent is.

6. Integreer de volgende differentiaalvergelijking:

$$y'' + \frac{y'}{x-1} = x - 1.$$

Tijd: drie uur en dertig minuten; vragen 1 en 2: 15 punten; vragen 3, 4, 6: 15 punten; vraag 5: 10 punten; totaal: 100 punten. Syllabus en oefeningenboek mogen gebruikt worden; zakrekenmachine en opgeloste oefeningen mogen niet gebruikt worden.