

Analyse I

1. Onderstel dat $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continu is, en dat $f(a)f(b) < 0$. Toon aan dat f minstens 1 nulpunt heeft gelegen in het interval (a, b) .
2. Gegeven is een functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. We onderstellen dat f continu is en continue partiële afgeleiden heeft op een omgeving van $\vec{a} = (a, b)$. Toon aan dat f differentieerbaar is in \vec{a} .
3. Gegeven is een rationale functie $f(x) = P(x)/Q(x)$, waarbij P en Q veeltermen zijn, en $\text{gr}(P) < \text{gr}(Q)$. We onderstellen bovendien dat Q enkel reële nulpunten heeft. Toon aan dat f kan gesplitst worden in partiële breuken.
4. Formuleer en bewijs de stelling van het gemiddelde voor de integraal van een continue functie. Pas deze stelling toe om de afgeleide te berekenen van de functie

$$g(x) = \int_a^x f(x)dx,$$

waarbij $x \in [a, b]$ en $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ een continue functie. Bewijs dan de grondformule van de integraalrekening.



Oefeningen Analyse I

1. Bespreek de convergentie van de volgende rij, waarbij $a \in \mathbb{R}$:

$$u_n = \left(\frac{2n}{n+1} \right)^{-\frac{n^2 a}{2}}$$

2. Bepaal de Taylorveelterm van graad 2 van de functie

$$f(x, y, z) = x^{y+z^2}$$

in $(1, 1, 1)$ (geen restterm).

3. Toon aan dat de vergelijking

$$y^{z/x} - \ln\left(\frac{x-z}{y}\right) - \sqrt{e} - 1 = 0$$

z bepaalt als impliciete functie van x en y op een omgeving van $(2, e)$ waarbij $z(2, e) = 1$.
Bepaal dan de vergelijking van het raakvlak aan de grafiek van z in het punt $(2, e, 1)$.
Bereken tenslotte $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(2, e)$.

4. Een modern venster wordt gevormd door aan elke zijde van een rechthoek een halve cirkel, met zelfde diameter als de zijde (en naar buiten natuurlijk), aan te plakken. De totale omtrek van rechthoek en halve cirkels bedraagt $11(2\pi + 4)$ m. De vier halve cirkelschijven en de rechthoek worden ingelegd met glas waarvan de kostprijzen (in euro per m^2) zijn : van boven en onder halve cirkelschijven $K_1 = 50/\pi$, van linker en rechter halve cirkelschijven $K_2 = 100/\pi$ en van de rechthoek $K_3 = 10$. Noem de straal van boven (en onder) halve cirkels R_1 en van linker (en rechter) halve cirkels R_2 . Bepaal R_1 en R_2 zodat de kostprijs minimaal wordt, en bepaal de minimale kostprijs.

5. Bereken

$$\int \frac{15x^2 + 25x + 14}{4x^3 - 4x^2 - 20x - 12} dx$$

Oefeningen Analyse II

1. Ga na of de volgende numerieke reeks convergent of divergent is.

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1 + 2^n + 3^n}{1 + n2^n + n^2 3^n}$$

2. Voor welke $x \in \mathbb{R}$ is de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2+x)^{n/2}}{4^n n!}$$

convergent?

3. G is het gebied gelegen in het eerste kwadrant begrensd door de krommen $y = 0$, $x^2 + (y - R)^2 = R^2$ en $x = 4R^2 - y^2$. De rand van G is de gesloten kromme Γ^+ . Bereken de lijnintegraal

$$\oint_{\Gamma^+} (x - Ry)dx + (R^2x + y)dy$$

4. Bereken de naar buiten gericht flux van het vektorveld $\vec{V} = yz\vec{e}_x + (1 + y^2)\vec{e}_y$ doorheen het gesloten oppervlak S , dat het gebied $G \subset \mathbb{R}^3$ omsluit. G is gelegen in het eerste octant, en begrensd door de vlakken $x = 0$, $z = 0$, $z = y$ en de cilinder $x^2 + y^2 = 4$.

5. Integreer de volgende differentiaalvergelijking:

$$y' = x^3y + x^7 e^{x^4} y^2$$

6. Integreer de differentiaalvergelijking

$$(2x^2 + 1)y'' + xy' - y = 0$$

met behulp van machtreeksontwikkeling op een omgeving van $x = 0$.

- Bepaal de recursieformule.
- Bewijs dat de oplossing y_2 die voldoet aan de beginvoorwaarden $y_2(0) = 0$ en $y_2'(0) = 1$ een veelterm is;
- Bepaal de algemene term van de machtreeks van de oplossing y_1 die voldoet aan de beginvoorwaarden $y_1(0) = 1$ en $y_1'(0) = 0$.
- Bepaal de convergentiestraal van deze machtreeks.

Tijd: drie uur; vragen 1 en 2: 5 punten; vragen 3, 4, 5 en 6: 10 punten.

Oefeningen Analyse I en II

1. Bereken de volgende limiet met behulp van reeksontwikkeling

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x \sin x}{\operatorname{bgtg} x \operatorname{bgsin} x}$$

2. De vergelijking

$$xye^z - xz - yz = 2$$

bepaalt z als impliciete functie van x en y , waarbij $z(2, 0) = -1$. Bepaal de vergelijking van het raakvlak aan het oppervlak met vergelijking $xye^z - xz - yz = 2$ in het punt $(2, 0, -1)$. Bepaal ook een stel parametervergelijkingen van de loodlijn op het oppervlak in het punt $(2, 0, -1)$.

3. Bereken de extreme waarden van de functie $f(x) = x^2yz$, met nevenvoorwaarde $x + y + z = 20$.
4. Een cijfer zes wordt geprogrammeerd om getekend te worden als de aaneensluiting van de krommen C_1 en C_2 met vergelijking

$$C_1 : x^2 + y^2 = 9$$

$$C_2 : (x - 6)^2 + y^2 = 81 \text{ waarbij } -3 \leq x \leq 3 \text{ en } y \geq 0$$

Bereken de totale lengte van het cijfer zes op twee manieren.

5. Bepaal het convergentiegebied van de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n(x-1)^{n/2}}{(n-1)!}$$

6. Bereken de flux van het vectorveld $\vec{v} = x^2\vec{e}_x - y^2\vec{e}_y + z^2\vec{e}_z$ doorheen het oppervlak dat het gesloten gebied, begrensd door $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ en de sfeer $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ en gelegen in het eerste octant, omsluit. De normaal op het oppervlak is hierbij naar buiten gericht.
7. Bepaal de algemene integraal van de differentiaalvergelijking

$$2y'' - 7y' + 3 = (1 - 4x^2)e^{3x}$$



Inleiding tot Wiskundige Software: Matlab

Sla je oefeningen op op de diskette die je gekregen heb. Schrijf je naam, je voornaam en je groep in POTLOOD op de diskette. Vermeld deze gegevens ook bovenaan elke m-file die je aanmaakt, evenals het nummer van de oefening waarvoor ze dient.

1. Schrijf een functie `matrix(v, m, n)` die, gegeven een rij elementen v en niet nulle natuurlijke getallen m en n , een $m \times n$ -matrix weergeeft waarin de elementen van v als volgt voorkomen. De elementen in v op oneven positie komen bovenaan in de matrix, van links naar rechts, en de elementen op even positie komen onderaan, van rechts naar links. Als de rij te weinig of te veel elementen bevat om een $m \times n$ -matrix te vullen, dient er een foutmelding te verschijnen.

```
>> matrix([1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15], 5, 3)
```

```
ans=
```

```
    1     3     5
    7     9    11
   13    15    14
   12    10     8
    6     4     2
```

```
>> spiraal([7 2 5 4 5 5 1], 3, 3)
```

```
??? Error using ==> matrix
```

```
Te weinig elementen!
```

2. (a) Stel dat de populatie goudvissen, resp. koivissen, in een vijver op tijdstip t_0 x_0 , resp. y_0 , bedraagt. Schrijf een functie `vis(x0, y0, n)` die beide populaties n maanden later weergeeft, als je weet dat de populatie goudvissen maandelijks met 5 procent toeneemt, en die van koivissen met 1 procent.
(b) Een vijver is net gevuld met $x_0 = 23$ goudvissen en $y_0 = 12$ koivissen. De verkoper wist te vertellen dat deze vijver te klein is om meer dan 60 vissen te bevatten. Als de reiger maandelijks 5 goudvissen uit de vijver opeet, na ten laatste hoeveel maanden zal de eigenaar dan met zijn vissen moeten uitwijken naar een grotere vijver? Schrijf een programmaatje om dit na te gaan.
(c) Schrijf tenslotte een functie `plotvis(n)` die als output een plot geeft van het aantal koivissen y_k , k maanden na t_0 ($y_0 = 12$), uitgezet t.o.v. het aantal maanden k na t_0 ($k \in \{0, 1, \dots, n\}$).