Vrije Universiteit Brussel

1ste Kandidatuur Burgerlijk Ingenieur
Academiejaar 2003-2004
1ste semester
13 januari 2004

Analyse I

1. Geven is een continue functie $f:\ [a,b] \to \mathbb{R}$.
   (a) Toon aan dat f begrensd is;
   (b) toon aan dat het supremum van f bereikt wordt;
   (c) als $f(a)f(b) < 0$, dan bereikt f tenminste 1 nulpunt tussen a en b; toon aan.

2. Gegeven is een numerieke functie f gedefinieerd tenminste op een omgeving van een stationair punt a. Toon aan dat f een minimum bereikt in a als $f''(a) > 0$.

3. Gegeven is een rationale functie $f(x) = P(x)/Q(x)$, waarbij P en Q veeltermen zijn, en $\mathrm{gr}(P) < \mathrm{gr}(Q)$. We onderstellen bovendien dat Q enkel reële nulpunten heeft. Toon aan dat f kan gesplitst worden in partiële breuken.

4. Gegeven is een functie $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. We onderstellen dat f continu is en continue partiële afgeleiden heeft op een omgeving van $\vec{a} = (a,b)$. Toon aan dat f differentieerbaar is in $\vec{a}$.

5. Beschouw een continue functie $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, en $c \in [a,b]$. Toon aan dat

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

Tijd: 90 minuten; elke vraag wordt gekwoteerd op 8 punten

Oefeningen Analyse I

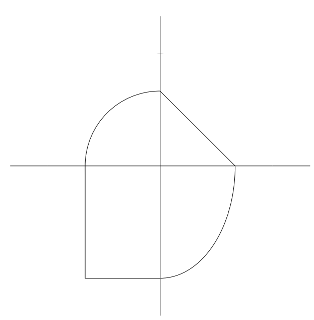
1. Bepaal de hoek(en) waaronder de grafieken van de functies y_1 en y_2 elkaar snijden.
$$y_1(x) = \operatorname{tg} x \;\; ; \;\; y_2(x) = \operatorname{cotg} x$$
met $\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

2. Bepaal de volgende limiet
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

3. Bereken de eerste orde totale differentiaal van de volgende functie
$$f(x,y,z) = \sqrt[z]{\ln x + e^y}$$

4. Het stelsel
$$\begin{cases} xe^y + u - \cos v = 2 \\ u\cos y + x^2\cos v - y = 1 \end{cases}$$
bepaalt u en v als impliciete functie van x en y. Hierbij is gegeven dat $u(1,0) = 1$ en $v(1,0) = \frac{\pi}{2}$. Bepaal
$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,0) \;\text{ en }\; \frac{\partial v}{\partial x}(1,0).$$

5. Het logo-vraagstuk.
Een logo moet binnen een speciale figuur komen. (zie tekening) In het eerste, tweede, derde en vierde kwadrant hebben we respectievelijk een driehoek, cirkel, rechthoek en ellips. Als we weten dat de totale breedte 10 cm moet zijn en de totale hoogte 20 cm moet zijn, bereken dan de afmetingen van de figuur opdat het oppervlak zo groot mogelijk is.



6. Bereken de integraal
$$\int \frac{\sin(\ln 4x^2)}{x}\,dx$$

puntenverdeling : vragen 1,2,3,4,5,6 op resp.4,4,3,5,6,3 ptn.

Oefeningen Analyse II

1. Bepaal de lengte van de gesloten kromme met vergelijking in poolcoördinaten
$$\rho = a^2 \sin^4 \frac{\theta}{6}$$

2. Bereken op 2 manieren de flux van het vectorveld $\vec{v} = (z - y)\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3$ doorheen het oppervlakt dat we verkrijgen door de grafiek van de functie $y = 4 - (x-1)^2$ te laten wentelen rond de x-as, begrensd door de vlakken $x = 0$ en $x = 2$.

3. Bepaal het convergentiegebied van de reeks
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{2^{n-1}}(1-x^2)^{\frac{n}{2}}.$$

4. Gegeven is de reeks
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n^2}.$$
   (a) Voor welke waarden van x convergeert de reeks puntsgewijs?
   (b) Toon aan de reeks uniform convergeert over elk interval $(a, 1]$ met $a > 0$.

5. Bepaal de algemene integraal van de differentiaalvergelijking
$$(x+2)y' + y(x + 1 - xy) = 0.$$

6. Bepaal, met behulp van reeksontwikkeling, voor grote waarden van $|x|$ de algemene integraal van de differentiaalvergelijking
$$x(x^2-1)y'' + (x^2-2)y' - 4xy = 0.$$

Oefeningen Analyse

1. Bereken de volgende limiet, indien hij bestaat

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^5-x^6}{x^4+y^5+x^6}$$

2. Bepaal de extreme waarden van de functie $f(x,y) = 2xy?yz$, onder de nevenvoorwaarde $x+y-z=10$. Bepaal ook de aard van deze extrema.

3. Bereken de oppervlakte van het gebied $G \subset \mathbb{R}^2$ begrensd door de kromme

$$\rho = |\sin\theta\cos\theta|, \quad \text{met} \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

4. Bereken $\oint_{C^+} \vec{v}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, waarbij

$$\vec{v}(\vec{r}) = \sqrt{x^2+y^2}(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) + (x^2+y^2+z^2)\vec{u}_3.$$

en C de kromme

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ z = \frac{y}{x} + \sqrt{3} \end{cases}$$

5. Bepaal het convergentiegebied van de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+\cos n)(1-x)^n}$$

6. Bepaal de algemene integraal van de differentiaalvergelijking

$$y' + y + xy^3e^{-2x} = 0$$

7. Bepaal de algemene integraal van de differentiaalvergelijking

$$y''' - 3y'' + 12y' - 10y = x^2 + e^x + 3.$$