

## Analyse I: antwoorden

1. Formuleer en bewijs de formule van Taylor voor een functie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Stel de formules op voor de resttermen van Lagrange en Liouville.
2. Gegeven is een rationale functie  $f(x) = P(x)/Q(x)$ , waarbij  $P$  en  $Q$  veeltermen zijn, en  $\text{gr}(P) < \text{gr}(Q)$ . We onderstellen bovendien dat  $Q$  enkel reële nulpunten heeft. Toon aan dat  $f$  kan gesplitst worden in partiële breuken.
3. Gegeven is een functie  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . We onderstellen dat  $f$  continue partiële afgeleiden heeft op een omgeving van  $\vec{a} = (a, b)$  en dat  $\vec{\nabla} f(\vec{a}) \neq \vec{0}$ .
  - (a) Toon aan dat de kromme met vergelijking  $f(\vec{x}) = f(\vec{a})$  op een omgeving van het punt  $\vec{a}$  kan geschreven worden in parameterform;
  - (b) laat zien dat  $\vec{\nabla} f(\vec{a})$  loodrecht staat op deze kromme in het punt  $\vec{a}$ ;
  - (c) stel de vergelijking op van de raaklijn aan de kromme in het punt  $\vec{a}$ .
4. Gegeven zijn twee numerieke functies  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f$  is differentieerbaar in  $a$  en  $g$  is differentieerbaar in  $f(a)$ . Stel de formule op die toelaat om  $(g \circ f)'(a)$  te berekenen.
5. Formuleer en bewijs de stelling van het gemiddelde en de grondformule van de integraalrekening.

# Analyse I

**1. Formuleer en bewijs de formule van Taylor voor een functie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Stel de formules op voor de resttermen van Lagrange en Liouville.**

**Stelling van Taylor.** Onderstel dat de numerieke functie  $f$  een eindige  $n + 1$ -de afgeleide bezit op een open interval  $I$  dat  $a$  en  $x$  bevat. Dan bestaat er een punt  $\xi \in (a, x)$  zodat

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x)$$

met

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x - a)^i ; \quad r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}$$

*Bewijs:* Stel  $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$ . We tonen aan dat  $r_n(x)$  in de gewenste vorm kan geschreven worden. Neem  $x \neq a$  vast, en schrijf

$$k(x) = \frac{r_n(x)}{(x - a)^{n+1}}$$

We beschouwen dan de hulpfunctie

$$F(t) = f(t) - P_n(t) - k(x)(t - a)^{n+1}$$

Voor  $i = 0, \dots, n$  geldt dat de functies

$$f^{(i)}(t) - P_n^{(i)}(t) \text{ en } \frac{d^i}{dt^i} (t - a)^{n+1}$$

in  $a$  de waarde nul aannemen. Dus is

$$F^{(i)}(a) = 0$$

voor  $i = 0, \dots, n$ . In het bijzonder is  $F(a) = 0$ . Omdat ook  $F(x) = 0$  bestaat er een  $\xi_1 \in (a, x)$  zodat  $F'(\xi_1) = 0$  (gebruik makend van de stelling van Rolle). Omdat  $F'(a) = 0$  kunnen we Rolle nogmaals toepassen, en we vinden  $\xi_2 \in (a, \xi_1) \subset (a, x)$  zodat  $F''(\xi_2) = 0$ . Dit argument kunnen we  $n + 1$  maal herhalen, en we vinden  $\xi_{n+1} = \xi \in (a, x)$  zodat  $F^{(n+1)}(\xi) = 0$ . We berekenen gemakkelijk dat

$$F^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - (n+1)!k(x)$$

Immers, de  $n + 1$ -de afgeleide van  $P_n$  verdwijnt, omdat  $P_n$  van graad hoogstens  $n$  is, en de  $n + 1$ -de afgeleiden van  $(t - a)^{n+1}$  is  $(n + 1)!$ . Als we nu  $t = \xi$  invullen, vinden we  $k(x) = f^{(n+1)}(\xi)/(n + 1)!$ , en

$$r_n(x) = k(x)(x - a)^{(n+1)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}$$

zoals gewenst. Deze formule voor  $r_n(x)$  noemen we de restterm van Lagrange.

Schrijf nu de restterm op tot orde  $n - 1$ .

$$r_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - a)^n$$

Aangezien  $f^{(n)}$  differentieerbaar en dus continu is geldt

$$\lim_{x \rightarrow a} f^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(a)$$

zodat we kunnen schrijven dat

$$f^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(a) + \lambda(x)$$

met

$$\lim_{x \rightarrow a} \lambda(x) = 0$$

Derhalve is

$$r_n(x) = \frac{(x - a)^n}{n!} \lambda(x)$$

met

$$\lim_{x \rightarrow a} \lambda(x) = 0$$

De restterm in deze vorm geschreven noemen we de *restterm van Liouville*.

**2. Gegeven is een rationale functie  $f(x) = P(x)/Q(x)$ , waarbij  $P$  en  $Q$  veeltermen zijn, en  $\text{gr}(P) < \text{gr}(Q)$ . We onderstellen bovendien dat  $Q$  enkel reële nulpunten heeft. Toon aan dat  $f$  kan gesplitst worden in partiële breuken.**

Onderstel dat  $\alpha \in \mathbb{R}$  een nulpunt is van  $Q$ , met multipliciteit  $m$ . Dan is

$$Q(x) = (x - \alpha)^m Q_1(x), \text{ met } Q_1(\alpha) \neq 0$$

Stel  $a = P(\alpha)/Q_1(\alpha)$ . Dan is  $\alpha$  een nulpunt van de veelterm  $P(x) - aQ_1(x)$ , en dus kunnen we schrijven

$$P(x) = aQ_1(x) + (x - \alpha)P_1(x)$$

en tenslotte

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = a \frac{Q_1(x)}{Q(x)} + \frac{(x - \alpha)P_1(x)}{Q(x)} = \frac{a}{(x - \alpha)^m} + \frac{P_1(x)}{(x - \alpha)^{m-1}Q_1(x)}$$

De eerste term is van de gewenste vorm, en in de tweede is de graad van de noemer gelijk aan de graad van  $Q$  min een. Op de tweede term passen we dezelfde procedure toe. Dit kunnen we doen tot de graad van de noemer in de tweede term 1 is, omdat gegeven is dat  $Q$  enkel reële wortels heeft. We hebben daarmee bewezen dat  $f(x)$  kan geschreven worden als een som van termen van de vorm

$$\frac{a}{(x - \alpha)^i}$$

waarbij  $\alpha$  een nulpunt is van  $Q$  met multipliciteit tenminste  $i$ .

3. Gegeven is een functie  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . We onderstellen dat  $f$  continue partiële afgeleiden heeft op een omgeving van  $\vec{a} = (a, b)$  en dat  $\vec{\nabla} f(\vec{a}) \neq \vec{0}$ .

1. Toon aan dat de kromme met vergelijking  $f(\vec{x}) = f(\vec{a})$  op een omgeving van het punt  $\vec{a}$  kan geschreven worden in parametervorm;
2. laat zien dat  $\vec{\nabla} f(\vec{a})$  loodrecht staat op deze kromme in het punt  $\vec{a}$ ;
3. stel de vergelijking op van de raaklijn aan de kromme in het punt  $\vec{a}$ .

Bewijs 1. Als  $\vec{\nabla} f(\vec{a}) \neq \vec{0}$ , dan is  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \neq 0$  of  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$ . Onderstel dat  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$  (het andere geval is analoog). Vanwege de stelling van de impliciete functies bestaat er een open lijnstuk  $I$  dat  $a$  bevat en een functie  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  zodat

1.  $g(a) = b$ ;
2.  $f(x, g(x)) = f(a, b)$ , voor elke  $x \in I$ .

Dit betekent dat de kromme  $f(x, y) = f(a, b)$  op een omgeving van  $\vec{a}$  kan geschreven worden in de parametervorm

$$\begin{cases} x = t \\ y = g(t) \end{cases}$$

2. We weten uit deel 1. dat de kromme kan geschreven worden in parametervorm:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Voor een bepaalde waarde van de parameter  $t_0$  wordt het punt  $\vec{a}$  bereikt:  $x(t_0) = a$  en  $y(t_0) = b$ . Voor elke  $t$  op een omgeving van  $t_0$  geldt:

$$f(x(t), y(t)) = f(a, b)$$

Afleiden naar  $t$  geeft, met behulp van de kettingregel:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t) = 0$$

en dus

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0))x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), y(t_0))y'(t_0) = 0$$

of het scalair product van  $\vec{\nabla} f(\vec{a})$  en  $(x'(t_0), y'(t_0))$  is nul. De vector  $(x'(t_0), y'(t_0))$  raakt aan de kromme in  $(x(t_0), y(t_0)) = (a, b)$ , en dus staat  $\vec{\nabla} f(\vec{a})$  loodrecht op de kromme.

3. De raaklijn staat loodrecht op  $\vec{\nabla} f(\vec{a})$ , en gaat door het punt  $(a, b)$ . Derhalve is de vergelijking van de raaklijn

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) = 0$$

**4. Gegeven zijn twee numerieke functies  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f$  is differentieerbaar in  $a$  en  $g$  is differentieerbaar in  $f(a)$ . Stel de formule op die toelaat om  $(g \circ f)'(a)$  te berekenen.**

**Stelling** Onderstel dat de functie  $f$  een eindige afgeleide bezit in  $a$  en dat  $g$  een eindige afgeleide bezit in  $f(a)$ . Dan geldt

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

*Bewijs* We beschouwen de volgende hulpfunctie  $G$ , gedefinieerd op een omgeving van  $f(a)$ :

$$G(y) = \begin{cases} \frac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)} & \text{als } y \neq f(a); \\ g'(f(a)) & \text{als } y = f(a). \end{cases}$$

$G$  is continu in  $f(a)$ , en voor  $x \neq a$  hebben we

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = G(f(x)) \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Inderdaad, voor  $f(x) \neq f(a)$  wordt dit

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Voor  $f(x) = f(a)$  zijn beide leden nul, zodat de gelijkheid in het algemeen geldt. Na het nemen van de limiet voor  $x$  naderend tot  $a$  krijgen we:

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} G(f(x)) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= G(\lim_{x \rightarrow a} f(x)) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= g'(f(a))f'(a) \end{aligned}$$

**5. Formuleer en bewijs de stelling van het gemiddelde en de grondformule van de integraalrekening.**

**Stelling van het gemiddelde** Neem twee continue functies  $f, w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , en onderstel dat  $w(x) \geq 0$  voor elke  $x \in [a, b]$ , en  $w \neq 0$ . Dan bestaat er een  $\xi \in [a, b]$  zodat

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = f(\xi) \int_a^b w(x)dx$$

*Bewijs.* Omdat  $f$  continu is over  $[a, b]$  bereikt  $f$  een maximale waarde  $M$  en een minimale waarde  $m$ . Voor elke  $x \in [a, b]$  geldt dus

$$m \leq f(x) \leq M$$

en, gebruik makend van  $w(x) \geq 0$ ,

$$mw(x) \leq f(x)w(x) \leq Mw(x)$$

en dus,

$$\int_a^b mw(x)dx \leq \int_a^b w(x)f(x)dx \leq \int_a^b Mw(x)dx$$

en

$$m \int_a^b w(x)dx \leq \int_a^b w(x)f(x)dx \leq M \int_a^b w(x)dx$$

Omdat  $w$  continu is, niet-negatief, en niet identiek nul, weten we dat  $\int_a^b w(x)dx > 0$ . We krijgen dus

$$m \leq \frac{\int_a^b w(x)f(x)dx}{\int_a^b w(x)dx} \leq M$$

Omdat  $f$  continu is over  $[a, b]$  bereikt  $f$  elke waarde tussen  $m$  en  $M$ , en dus bestaat er een  $\xi \in [a, b]$  zodat

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b w(x)f(x)dx}{\int_a^b w(x)dx}$$

en hieruit volgt de gezochte formule.

**Stelling** Als  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continu is, dan is de functie

$$g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto g(x) = \int_a^x f(t) dt$$

afleidbaar over  $[a, b]$  en bovendien is

$$g'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

*Bewijs.* Kies  $x, x + h \in [a, b]$ . Uit de stelling van het gemiddelde (met  $w = 1$ ) volgt nu dat

$$g(x + h) - g(x) = \int_x^{x+h} f(t) dt = f(x + \theta h)h$$

met  $\theta \in [0, 1]$ . Aangezien  $f$  continu is in  $x$ , volgt nu

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(x + \theta h) = f(x)$$

en dit bewijst onze stelling.

**Grondformule van de integraalrekening** Onderstel dat  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continu is, en dat  $F$  een primitieve is van  $f$  (dit wil zeggen dat  $F' = f$ ). Dan is

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

*Bewijs.* Definieer de functie  $g$  zoals hierboven. Uit de vorige stelling volgt dan dat

$$g'(x) = F'(x) = f(x)$$

voor alle  $x \in [a, b]$ . Dit impliceert dat er een constante  $c$  bestaat zodat

$$g(x) = F(x) + c$$

Stellen we hierin  $x = a$ , dan volgt

$$g(a) = \int_a^a f(x) dx = 0 = F(a) + c$$

zodat  $c = -F(a)$  en

$$g(x) = F(x) - F(a)$$

Als we nu  $x = b$  stellen dan verkrijgen we het gewenste resultaat.



## Oefeningen Analyse I

1. Bereken de volgende limiet

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3 + yx^3}{x^3 + y^3}$$

2. Ga na of de volgende functie  $f$  continu en afleidbaar is :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \operatorname{tg}x & \text{als } x < 0 \\ x & \text{als } 0 \leq x < 1 \\ 1 + \ln x & \text{als } 1 \leq x \end{cases}$$

3. Bereken de eerste orde totale differentiaal van de volgende functie :

$$f(x, y) = \ln(y \operatorname{Bgt} x)$$

4. De volgende betrekking bepaalt  $y$  als impliciete functie van  $x$  in  $(1, 1)$ .

$$yx^2 + \ln(xy) = 1$$

Bepaal de vergelijking van de raaklijn in het punt  $(1, 1)$  aan de hierboven gegeven kromme.

5. Bepaal het maximale volume van een balk ingeschreven in de ellipsoïde

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{36} = 1$$

Gebruik de methode van de multiplicatoren van Lagrange.

6. Bereken het oppervlak van het deel van het vlak gelegen onder  $f(x) = \frac{x^2}{9}$  en boven  $g(x) = -x^3 + \frac{x^2}{9} + 9x$



## Oefeningen Analyse

1. Bepaal de parameters  $a$  en  $b$  zodat de functie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gedefinieerd door de formules

$$f(x) = \begin{cases} a + \cos bx & \text{als } x \leq 0 \\ b + \operatorname{tg} ax & \text{als } x > 0 \end{cases}$$

overall afleidbaar is.

2. Bepaal de ruit met minimale oppervlakte, waarvan de hoekpunten op de assen liggen, en die raakt aan de ellips met vergelijking

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Hint: de ellips is ingeschreven in de ruit.

3. De betrekking

$$z + \ln z + xy = 0$$

bepaalt  $z$  als impliciete functie van  $x$  en  $y$ . Bereken

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

4. Beschouw het oppervlak  $S$  dat bestaat uit de halve cirkelschijven

$$\begin{cases} 0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - y^2} \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} 0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - y^2} \\ x = a \end{cases}$$

en het gedeelte van de cilindermantel  $y^2 + z^2 = R^2$  waarvoor  $z \geq 0$  en  $0 \leq x \leq a$ . Gegeven is ook het vectorveld

$$\vec{v} = z^2 \vec{u}_1 + (y^3 + xz) \vec{u}_2 - 3x^2 y \vec{u}_3.$$

Bereken beide leden van de stelling van Stokes.

5. Bepaal het convergentiegebied van de machtreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sin e^{-\sqrt{n}}}.$$

6. Bepaal de algemene integraal van de differentiaalvergelijking

$$yy'' - (y')^2 = y^2 \ln y.$$

7. Bepaal de algemene integraal van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} z' - 3z + 2y = -2e^{2x} \\ y' - 5y + \frac{35}{2}z = -4e^{2x} \end{cases}$$