

Aanvullingen van de Wiskunde

1. Bespreek hoe een homogene lineaire partiële differentiaalvergelijking van orde 1 geïntegreerd kan worden.
2. Zij V een oneindigdimensionale Euclidische ruimte, en $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots)$ een orthonormale rij in V . Bewijs de ongelijkheid van Bessel. Geef de definitie van een orthonormale basis van V , en toon aan dat een orthonormale rij een orthonormale basis is als en slechts als de gelijkheid van Parseval geldt voor elke vector $\vec{x} \in V$.
3. Neem $f \in \mathcal{P}[0, 2\pi]$. Toon aan dat f uniform benaderd kan worden door continu differentieerbare periodische functies, m. a. w., voor elke $\varepsilon > 0$ bestaat er een continu differentieerbare $g \in \mathcal{P}[0, 2\pi]$ zodat

$$\|f - g\|_{\infty} < \varepsilon.$$

4. Toon aan dat de rij functies

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx \mid n = 1, 2, \dots \right\}$$

een orthonormale rij vormen in $\mathcal{C}[0, 2\pi]$.



Oefeningen Aanvullingen van de Wiskunde

1. Bepaal van de partiële differentiaalvergelijking:

$$xp + 2yq = \frac{x}{y} \quad \text{met } p = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{en } q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

het integraaloppervlak dat gaat door de kromme k met vergelijking:

$$\begin{cases} z = x + y \\ x = y^2 \end{cases}.$$

2. $f(x)$ is een periodieke functie met periode 2π , die voldoet aan:

$$f(x) = \pi^2 - x^2 \quad \text{voor } x \in [-\pi, \pi].$$

Stel de Fourierreeks van $f(x)$ op. Schrijf de formule van Parseval uit en haal hieruit de som van de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

3. Beschouw een elastisch touw met lengte $L = \pi$ en golfsnelheid $\alpha = 2$. Voor $t < 0$ is het touw horizontaal in ruststand. Op $t = 0$ wordt aan het touw in het midden een verticale uitwijking van $\frac{\pi}{2}$ gegeven en wordt het touw vervolgens losgelaten.

De golfvergelijking van het touw is de volgende:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

met $u(x, t)$ de uitwijking van het touw op tijdstip t en positie x .

De begin- en randvoorwaarden zijn:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= x && \text{voor } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ u(x, 0) &= \pi - x && \text{voor } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= 0 && \text{voor } 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 && \text{voor } t \geq 0 \end{aligned}.$$

Bepaal de beweging van het touw in functie van de tijd met behulp van scheiding van veranderlijken.

Tijd: 2 uur; Vraag 1: 9 punten; vraag 2: 12 punten; vraag 3: 14 punten; Dit examen telt mee voor 35 % van het totaal. Syllabus en oefeningenboek mogen gebruikt worden.

Aanvullingen van de Wiskunde

1. Gegeven is een lineaire partiële differentiaalvergelijking van orde 1:

$$a_1(x_1, \dots, x_n, y) \frac{\partial y}{\partial x_1} + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n, y) \frac{\partial y}{\partial x_n} = b(x_1, \dots, x_n, y).$$

Laat zien dat men deze tot een homogene lineaire pdv kan herleiden.

2. Zij V een oneindigdimensionale Euclidische ruimte, en $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots)$ een orthonormale rij in V . Bewijs de ongelijkheid van Bessel. Geef de definitie van een orthonormale basis van V , en toon aan dat een orthonormale rij een orthonormale basis is als en slechts als de gelijkheid van Parseval geldt voor elke vector $\vec{x} \in V$.
3. Gegeven zijn twee normen $\|\bullet\|_1$ en $\|\bullet\|_2$ op een vectorruimte V . Wanneer zegt men dat de $\|\bullet\|_1$ fijner is dan $\|\bullet\|_2$? Wat is dan het verband tussen convergentie in $\|\bullet\|_1$ -norm en in $\|\bullet\|_2$ -norm?
4. Geef de definitie van een kwadratisch sommeerbare rij. Gegeven zijn twee kwadratisch sommeerbare rijen a en b . Toon aan dat de reeks

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$$

absoluut convergent is. Toon dan aan dat de som $a + b$ kwadratisch sommeerbaar is.



Oefeningen Aanvullingen van de Wiskunde

1. Bepaal van de partiële differentiaalvergelijking:

$$(3y - 2z)p + (z - 3x)q = 2x - y,$$

met $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ en $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, het integraaloppervlak dat gaat door de kromme k met vergelijking:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10x \\ 2y = x \end{cases}.$$

2. $f(x)$ is een periodieke functie met periode 2π , die voldoet aan:

$$f(x) = x - \sin(x) \text{ voor } x \in [-\pi, \pi].$$

Stel de Fourierreeks van $f(x)$ op.

3. Los op met scheiding van veranderlijken:

$$\pi^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

voor $t > 0$ en $0 < x < 2\pi$.

De begin- en randvoorwaarden zijn:

$$\begin{cases} y(0, t) = y(\pi, t) = 0 \\ y(x, 0) = 2 \sin(x) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 8 \sin(x) \cos(x) \end{cases}.$$