

## Aanvullingen van de Wiskunde

1. Gegeven zijn twee normen  $\|\bullet\|_1$  en  $\|\bullet\|_2$  op een vectorruimte  $V$ . Wanneer zegt men dat de  $\|\bullet\|_1$  fijner is dan  $\|\bullet\|_2$ ? Wat is dan het verband tussen convergentie in  $\|\bullet\|_1$ -norm en in  $\|\bullet\|_2$ -norm?
2. Geef de definitie van een kwadratisch sommeerbare rij. Gegeven zijn twee kwadratisch sommeerbare rijen  $a$  en  $b$ . Toon aan dat de reeks

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$$

absoluut convergent is. Toon dan aan dat de som  $a + b$  kwadratisch sommeerbaar is.

3. Gegeven is een lineaire partiële differentiaalvergelijking van orde 1:

$$a_1(x_1, \dots, x_n, y) \frac{\partial y}{\partial x_1} + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n, y) \frac{\partial y}{\partial x_n} = b(x_1, \dots, x_n, y).$$

Laat zien dat men deze tot een homogene lineaire pdv kan herleiden.

4. Onderstel dat  $\{p_0, p_1, \dots\}$  een orthogonale rij veeltermen is over  $[a, b]$  ten opzichte van een gewichtsfunctie  $r$ . Bewijs dat  $p_n$   $n$  enkelvoudige nulpunten heeft, allemaal gelegen in het interval  $(a, b)$ .

## Oefeningen Aanvullingen van de Wiskunde

1. Bepaal van de partiële differentiaalvergelijking

$$z^2 p - 2(x + y)q = z$$

het integraaloppervlak waarop de kromme  $k$  ligt met vergelijking

$$\begin{cases} z^2 = x \\ xy = 1 \end{cases}$$

2. De veeltermen van Legendre  $P_n$  vormen over een orthogonale basis over het interval  $[-1, 1]$ . De eerste vier veeltermen zijn

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= (3x^2 - 1)/2 \\ P_3(x) &= (5x^3 - 3x)/2 \end{aligned}$$

We weten ook dat

$$\|P_n\|_2^2 = \frac{2}{2n + 1} \quad (1)$$

- (a) Neem  $a > 0$ . Toon aan dat de veeltermen

$$Q_n(x) = P_n(x/a)$$

orthogonaal zijn over het interval  $[-a, a]$ . De veeltermen  $Q_n$  vormen dus een orthogonale basis over het interval  $[-a, a]$ .

- (a) Gebruik (1) om  $\|P_n\|_2$  te bepalen.  
(b) Toon aan hoe men, gebruik makende van de hierboven verkregen resultaten, de veelterm van derde graad kan bepalen die de functie  $f(x) = \sin x$  binnen het interval  $[-\pi, \pi]$  het best benadert in 2-norm.

3. Beschouw een buis met lengte  $L = 10$  cm en thermische diffusiviteit  $\alpha = 0.5 \text{ cm}^2/\text{s}$ . Voor  $t < 0$  is de volledige buis op  $0^\circ$  Celsius. Op  $t = 0$  wordt een warmtebron aangesloten die één van de uiteindes op  $10^\circ$  Celsius houdt. Het ander uiteinde wordt op  $0^\circ$  Celsius gehouden. Dit fysisch probleem wordt als volgt wiskundig uitgedrukt:  
De warmtevergelijking in de buis is

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t}$$

met  $u(x, t)$  de temperatuur op tijdstip  $t$  en positie  $x$ .

De begin- en randvoorwaarden zijn:

$$u(x, 0) = 0 \quad (0 \leq x < L)$$

$$u(0, t) = 0; \quad u(L, t) = 10 \quad (t \geq 0)$$

Bepaal het temperatuursverloop in de buis met behulp van de methode van scheiding der veranderlijken.

## Aanvullingen van de Wiskunde

1. Gegeven zijn twee normen  $\|\bullet\|_1$  en  $\|\bullet\|_2$  op een vectorruimte  $V$ . Wanneer zegt men dat de  $\|\bullet\|_1$  fijner is dan  $\|\bullet\|_2$ ? Wat is dan het verband tussen convergentie in  $\|\bullet\|_1$ -norm en in  $\|\bullet\|_2$ -norm?
2. Geef de definitie van een kwadratisch sommeerbare rij. Gegeven zijn twee kwadratisch sommeerbare rijen  $a$  en  $b$ . Toon aan dat de reeks

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$$

absoluut convergent is. Toon dan aan dat de som  $a + b$  kwadratisch sommeerbaar is.

3. Bespreek hoe we een homogene lineaire partiële differentiaalvergelijking van orde 1 kunnen integreren.

$$a_1(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial y}{\partial x_1} + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial y}{\partial x_n} = 0.$$

4. Onderstel dat  $\{p_0, p_1, \dots\}$  een orthogonale rij veeltermen is over  $[a, b]$  ten opzichte van een gewichtsfunctie  $r$ . Bewijs dat  $p_n$   $n$  enkelvoudige nulpunten heeft, allemaal gelegen in het interval  $(a, b)$ .

## Oefeningen Aanvullingen van de Wiskunde

1. Bepaal een volledige integraal en de eventuele overeenkomstige singuliere integraal van de volgende partiële differentiaalvergelijking.

$$y^2 q^2 - x^2 p + 1 = x^2$$

2. Los volgende partiële differentiaalvergelijking op met de methode van scheiding der veranderlijken.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 2y = 0$$

voor  $t > 0$ ,  $0 < x < 2\pi$ , met als rand- en beginvoorwaarden

$$y(x, 0) = \sin \frac{x}{2} + 2 \sin x \quad y(x, 2) = \sin \frac{x}{2} \quad (0 < x < 2\pi)$$

$$y(0, t) = 0 \quad y(2\pi, t) = 0 \quad (t > 0)$$

3. Gegeven is de functie

$$f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = (\pi - x)^2$$

- (a) Bepaal reële getallen  $a_n$  zodat de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$$

puntsgewijs convergeert naar  $f(x)$ .

- (b) Geef de gelijkheid van Parseval voor deze functie.  
(c) Gebruik uw resultaten om de volgende reeks te berekenen.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$