

Oefeningenexamen Complexe Analyse 1ste Zittijd

Het examen duurt 2u30. Het oefeningenexamen is volledig gesloten boek en het gebruik van elk rekenmachine is niet toegelaten. Alleen het gebruik van het formularium wordt toegestaan. Gelieve elke oefening op een nieuw blad te beginnen.

Wees duidelijk en volledig, ga de voorwaarden na van de stellingen die je gebruikt.

Veel succes,

Lieve Lauwers en Kurt Barbé.

1 Vraag (6p)

Vind alle oplossingen van volgende vergelijkingen in \mathbb{C} :

(i) $e^z = -2$

(ii) $z = i^i$

(iii) $z^2 - (1 - i)z + 4i = 0$

2 Vraag (7p)

Bepaal getallen $a, b \in \mathbb{C}$ zodat volgende gelijkheid geldt:

$$\oint_{C^+} \frac{1}{(z-a)^2(z-b)} dz = 2008$$

waarbij C het vierkant is rond 0 met hoekpunten $(\pm 1 \pm i)$.

3 Vraag (7p)

Beschouw de functie $f(z) = e^{\frac{1}{z^2-4}} \operatorname{tg}(\pi z) + \frac{\sin(z-1)}{z-1}$

(a) Bepaal de singulariteiten en hun aard van de functie $f(z)$.

(b) Bepaal de convergentiestraal van de Laurentreeks van de functie $f(z)$ rond het punt $z = 0$.

4 Vraag (10p)

(a) Bereken de Laplacegetransformeerde van de functie $y(t) = \frac{\sin(2t)}{t}$.

(b) Bereken via de Laplacegetransformeerde de oplossing van volgende differentiaalvergelijking

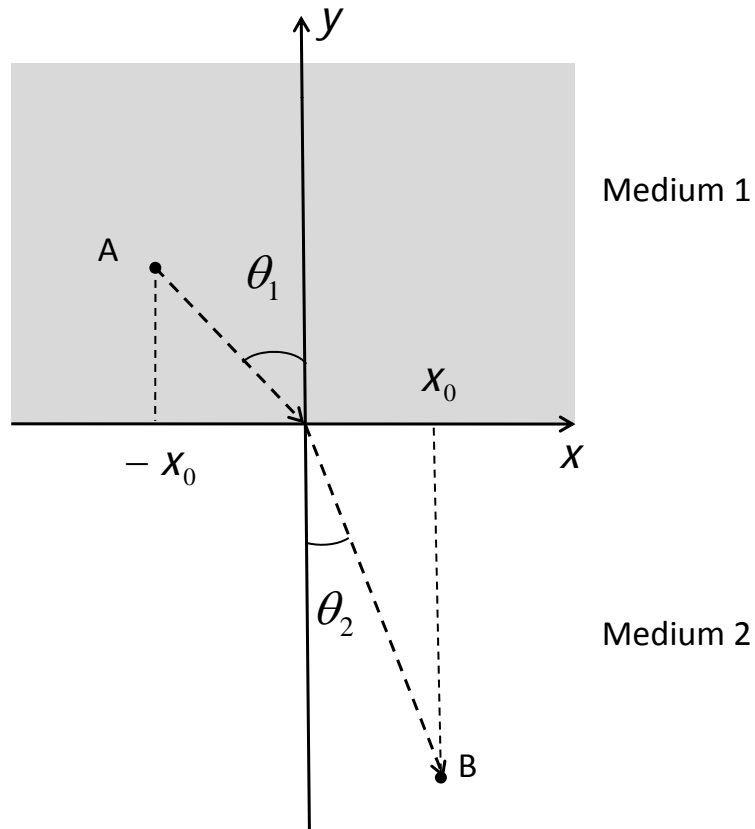
$$ty'' + 2y' + 4ty = 0 \text{ met } y(0) = 2 \text{ en } y'(0) = 0$$

5 Vraag (10p)

Beschouw, zoals in Figuur 1, een lichtstraal tussen de punten A en B . Voor $y \geq 0$ en $y < 0$ voldoet de snelheid van het licht v_i in het medium i respectievelijk aan

$$\begin{cases} v_1 = \frac{c}{n_1} & \text{voor } y \geq 0 \\ v_2 = \frac{c}{n_2} & \text{voor } y < 0 \end{cases}$$

waarbij c de lichtsnelheid in vacuüm is en n_i de brekingsindex van het medium i . Beschouw $y(x)$ de weg die het licht aflegt tussen de punten A en B .



Figuur 1: De Brekingswet van Snellius

- Bepaal de weg $y(x)$ die het licht volgt, zodat de tijd minimaal wordt.
- Leid uit de oplossing de brekingswet van Snellius af:

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2)$$