Computerdemo: Approximatie van functies

1. Inleiding

Approximatietheorie is een oud onderzoeksdomein van de wiskundige analyse al sinds de tijd van C. F. Gauss. Met de komst van D. Hilbert en K. Weierstrass is deze tak volledig tot zijn recht gekomen.

In deze computerdemo willen we je laten zien dat het benaderen van functies een slecht gesteld probleem is. Immers, niet iedereen begrijpt hetzelfde onder een functie "goed" benaderen. Verder zou je kunnen denken dat met de moderne computers het niet meer nodig is functies te benaderen. Niets is echter minder waar!

Een stelling over het benaderen van functies is de stelling van Brook Taylor (1712).

Zij $f(x)$ een continue functie op het interval $[a,b]$ en $x_0 \in [a,b]$. Indien de functie $f(x)$ $n+1$ keer continu differentieerbaar is op $]a,b[$, dan geldt

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_{n+1}(x)$$

met restterm $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1!}(x-x_0)^{n+1}$ *met* $\xi \in [x, x_0]$.

De stelling van Taylor impliceert dat alle afgeleiden van de functie gekend moeten zijn tot orde $n+1$. In praktijk kan je de afgeleiden in een punt numeriek berekenen maar je zal later zien dat de hogere orde numerieke afgeleiden snel onstabiel en bijgevolg onbetrouwbaar worden.

Verder is het zo dat een Taylorontwikkeling niets anders is dan een machtreeks. We weten dat een machtreeks slechts uniform convergeert op een bepaald gebied.

2. Uniforme tegenover puntsgewijze convergentie

Een rij functies $f_n(x)$ convergeert puntsgewijs op het interval $[a,b]$ naar $f(x)$ indien

$$\forall\, x \in [a,b]\,, \forall \varepsilon > 0, \exists\, N_0 > 0 \; zodat \; \forall\, n > N_0 \;\; geldt, \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Dit betekent dat iedere x die deelneemt aan de wedstrijd uiteindelijk de finish haalt, maar niet allemaal op hetzelfde ogenblik. De ene fietst sneller dan de andere want het getal N_0 hangt af van de gekozen x.

Een rij functies $f_n(x)$ convergeert uniform naar $f(x)$ op het interval $[a,b]$ indien

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N_0 > 0, \forall\, x \in [a,b] zodat \; \forall\, n > N_0 \;\; geldt, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Dit betekent dat iedere x uit het interval die deelneemt aan de wedstrijd uiteindelijk de finish bereikt samen met de rest, omdat ze allen even snel rijden. Vanaf een bepaald moment in de wedstrijd rijden ze samen. Het interval waarop een rij functies uniform convergeert kan je vergelijken met het peloton uit een wielerwedstrijd.

Oefening 1. Beschouw de rij van functies $f_n(x) = \tanh(n.x)$. Bepaal de functie naar waar de rij $f_n(x)$ puntsgewijs convergeert. Verloopt deze convergentie uniform?

Oefening 2. Wanneer je in de Command Window *help powerseries* typt wordt het gebruik uitgelegd. Probeer de rij van functies $f_n(x) = \tanh(n.x)$ te laten verschijnen op je scherm en interpreteer het resultaat.

3. Benadering in kwadratisch gemiddelde (Mean Square Approximation)

Dit type van benadering blijkt vanuit toegepast standpunt een heel nuttige manier van benaderen te zijn. Alvorens de eigenschappen te bespreken, moeten we enkele nieuwe begrippen invoeren.

Beschouw de verzameling $V = \{1, x, x^2, x^3, \cdots, x^n, x^{n+1}, \cdots\}$. Verder definiëren we de vectorruimte $L_2([-a,a])$, met $a \neq 0$ de verzameling functies $f: [-a,a] \to \mathbb{R}$ zodat

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_{-a}^{a} f(x)^2 dx} < \infty$$

Dit is de vectorruimte met inproduct

$$< f, g >= \int_{-a}^{a} f(x)g(x)dx$$

Men kan aantonen dat de verzameling V een basis is voor de vectorruimte $L_2([-a,a])$. Dit wil zeggen dat we elke functie $f(x)$ kunnen schrijven als

$$f(x) =_2 \sum_n a_n x^n$$

met coëfficiënten a_n waarbij $=_2$ staat voor gelijkheid in norm of $\|f(x) - \sum_n a_n x^n\|_2 = 0$. Merk op dat dit niet impliceert dat $f(x) = \sum_n a_n x^n, \forall x \in [-a,a]$.

Oefening 3. Geef een voorbeeld van twee functies f, g waarbij $\|f - g\|_2 = 0$ maar $f \neq g$.

Er bestaan algoritmen om de coëfficiënten a_n numeriek te bepalen maar dit valt buiten het bereik van deze computerdemo. Een belangrijke eigenschap is

Indien $\|f - g\|_2 = 0$ *, dan geldt* $f(x) = g(x)$ *bijna overal, dit betekent dat* $f(x) \neq g(x)$ *in ten hoogste een aftelbaar aantal punten.*

Oefening 4. Bewijs deze eigenschap (Hint: Bewijs uit het ongerijmde)

Waarom is deze norm interessant vanuit ingenieursstandpunt? Dit kan eenvoudig worden ingezien aan de hand van volgend elektrisch netwerk.

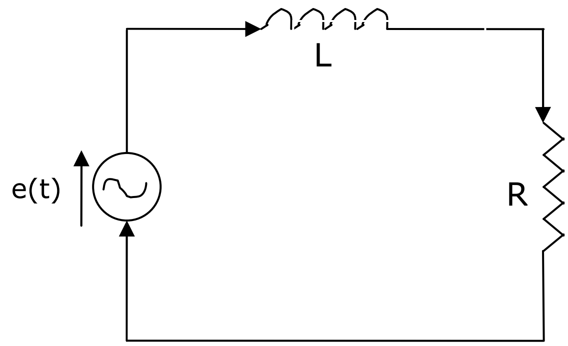

Figure 1: Een eenvoudig L-R-netwerk

Oefening 5. Stel de differentiaalvergelijking op die bovenstaand netwerk beschrijft.

Oefening 6. Bereken de energie over een periode geleverd door de bron indien $i(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$.

4. Uniforme tegenover Mean Square convergentie

Tenslotte gaan we na wat het verschillende gedrag is, tussen een fuctie uniform benaderen en in Mean Square zin. Probeer in elk van de onderstaande oefeningen je steeds af te vragen welke benadering je verkiest.

Oefening 7. Bereken de Taylorreeks voor de functie $f(x) = \mathrm{bgtan}(x)$ rond $x = 0$. Bereken verder het gebied waar de Taylorreeks uniform convergeert. Wat gebeurt er buiten dat gebied?

Oefening 8. Wanneer je in de Command Window *help powerseries* typt wordt het gebruik uitgelegd. Probeer de Taylorontwikkeling van $f(x) = \arctan(x)$ te laten verschijnen op je scherm en interpreteer het resultaat.

Oefening 9. Probeer een Mean Square benadering van $f(x) = \arctan(x)$ te laten verschijnen op je scherm en interpreteer het resultaat.

Oefening 10. Bereken de Laurentreeksontwikkeling voor de functie $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ rond het punt $x = 0.$ Bereken verder het gebied waar de Laurentreeks uniform convergeert. Wat gebeurt er buiten dat gebied? Herhaal oefeningen 8 en 9 voor de functie $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ bespreek de verschillen die je opmerkt.

Oefening 11. Bereken de Laurentreeksontwikkeling voor de functie $f(x) = \frac{x}{(x+2)(x-1)}$ rond het punt $x = -2.$ Bereken het gebied waar de Laurentreeks uniform convergeert. Wat gebeurt er buiten dat gebied? Herhaal oefeningen 8 en 9 voor de functie $f(x) = \frac{x}{(x+2)(x-1)}$ bespreek de verschillen die je opmerkt.