

Wiskunde bij de Oude Egyptenaren II

Meetkunde II

Benadering van π

Wat is het getal π ? De verhouding tussen de diameter van een cirkel en zijn omtrek is dezelfde als de verhouding tussen het kwadraat van zijn straal en zijn oppervlakte. Dit werd bewezen in 225 v.C. door de Griek Archimedes. Deze verhouding stellen wij voor met het symbool π en is ongeveer gelijk aan 3.1415926535...

Uit vraagstukken van de Rhind papyrus, kan men het gebruik van onderstaande formule afleiden.

$$\text{opp } C = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2, \text{ waarbij } d \text{ de diameter is.}$$

Wij kennen de correcte formule voor de oppervlakte van een cirkel:

$$\text{opp } C = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2.$$

Gelijkstelling van beide formules levert

$$\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2 \equiv d^2 \left(1 - \frac{1}{9}\right)^2 = \frac{64}{81}d^2.$$

Men krijgt volgende goede benadering voor π ,

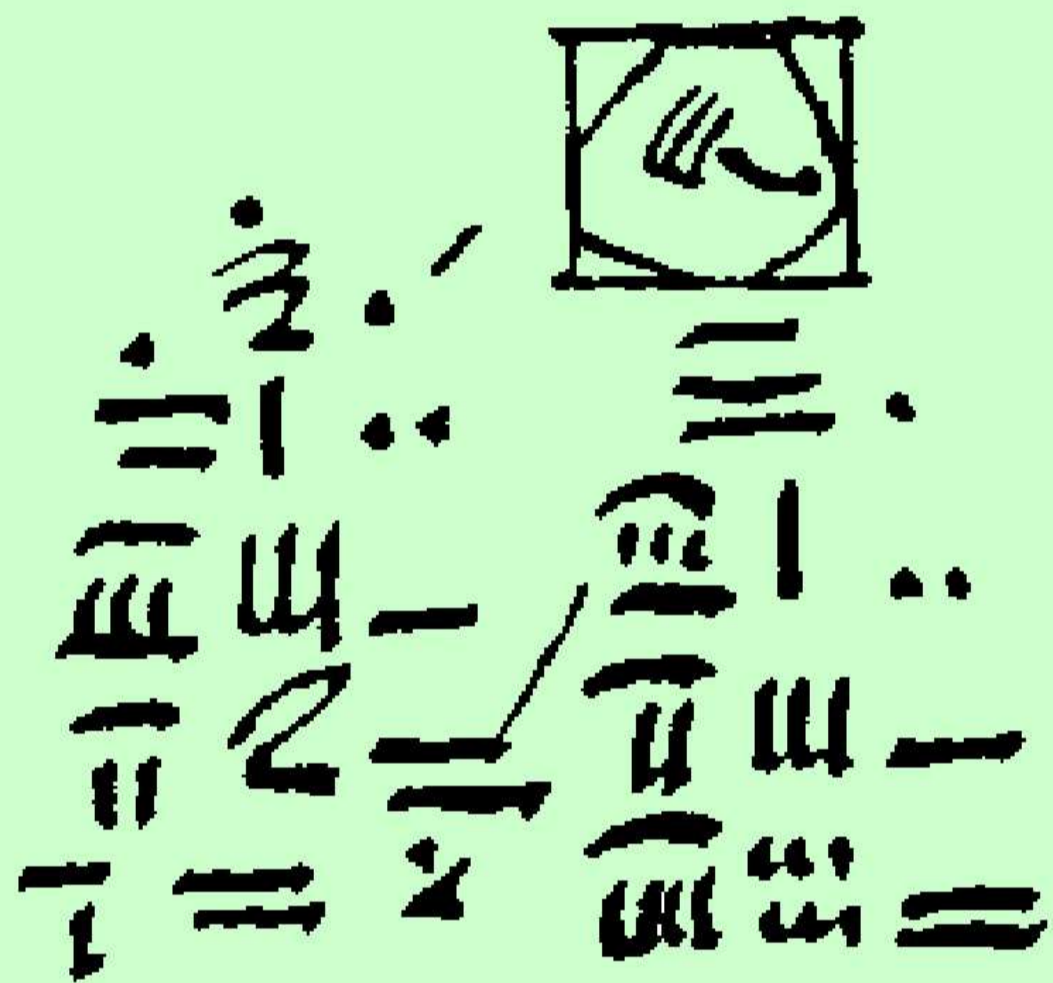
$$\pi = 256/81 = 3,1604938\dots$$

Met een analoge redenering bekomt men dat de Babyloniërs de benadering $3\frac{1}{8} = 3,125$ hanteerden voor π . In Bijbelse teksten vindt men dikwijls 3 als benadering voor π .

Afleiding van de oppervlakteformule

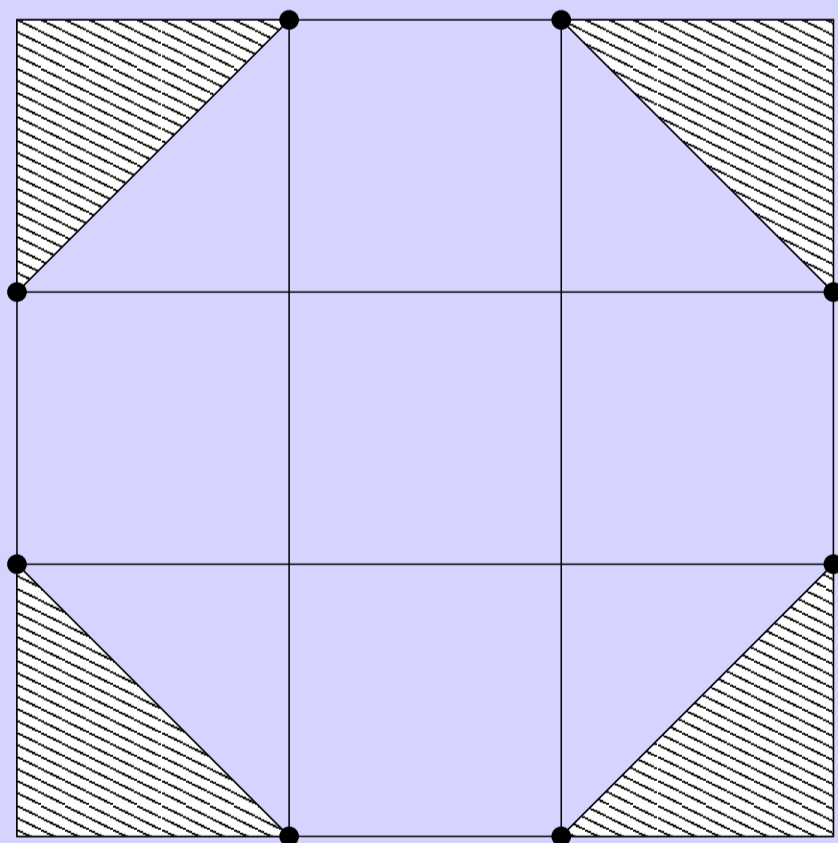
Hoe kwamen de Oude Egyptenaren aan hun formule?

In probleem 48 van de Rhind papyrus vindt men volgende tekening:



Hierdoor gemotiveerd, denken wij aan volgende afleiding.

- *Neem een vierkant met als zijde de diameter d van de cirkel C .*
- *Verdeel de zijden van het vierkant in 3. De oppervlakte van de cirkel wordt benaderd door de oppervlakte van de niet-regelmatige achthoek met de verdeelpunten als hoekpunten.*
- *Als men de op de zijden van het vierkant gelegen overeenkomstige verdeelpunten verbindt, krijgt men negen kleine vierkantjes.*



- *De oppervlakte van de achthoek is de oppervlakte van 7 van die vierkantjes, dus $7/9$ van de oppervlakte van het vierkant met zijde d (dus d^2), we krijgen*

$$\text{opp } C \approx d^2 \cdot \frac{7}{9} = d^2 \left(1 - \frac{2}{9}\right)$$

- *Om nu tot hun formule voor de oppervlakte van de cirkel te komen, zou men kunnen aannemen dat ze een formule van de vorm*

$$\text{opp } C = (d \cdot x)^2$$

wilden en dus de zijde van het vierkant met gelijke oppervlakte als de cirkel zochten.

- *Ook moet er aangenomen worden dat ze dan aan de benaderingsformule*

$$\left(1 - \frac{1}{9}\right)^2 \approx 1 - \frac{2}{9}$$

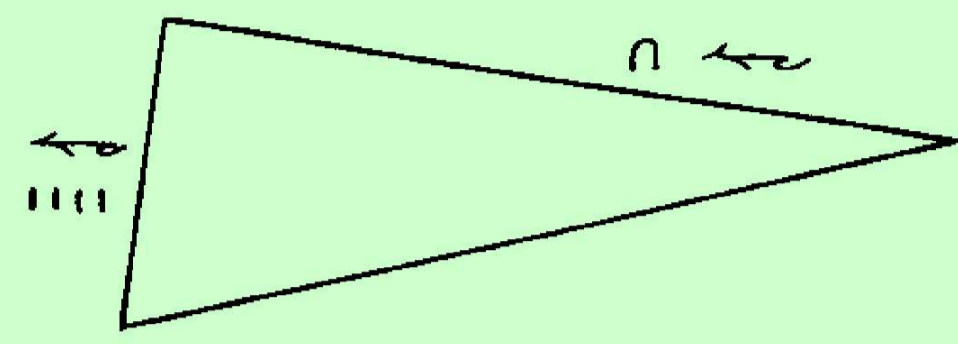
dachten ofwel dat ze gewoon opmerkten dat

$$7/9 = 63/81 \approx 64/81 = \left(\frac{8}{9}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{9}\right)^2.$$

Oppervlakte driehoek en trapezium

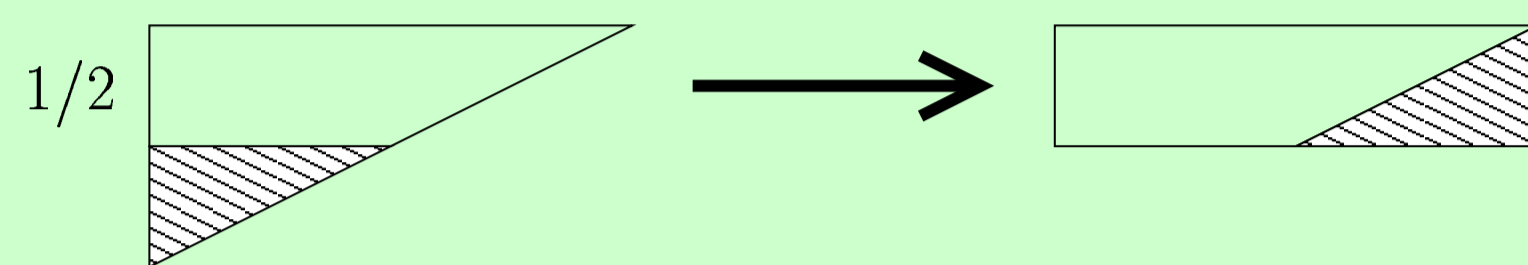
Probleem 49 van de Rhind papyrus leert ons dat ze de correcte formule voor de oppervlakte van een rechthoek kenden.

Probleem 51 toont de afleiding van de oppervlakte van een rechthoekige driehoek uit die van een verwante rechthoek.

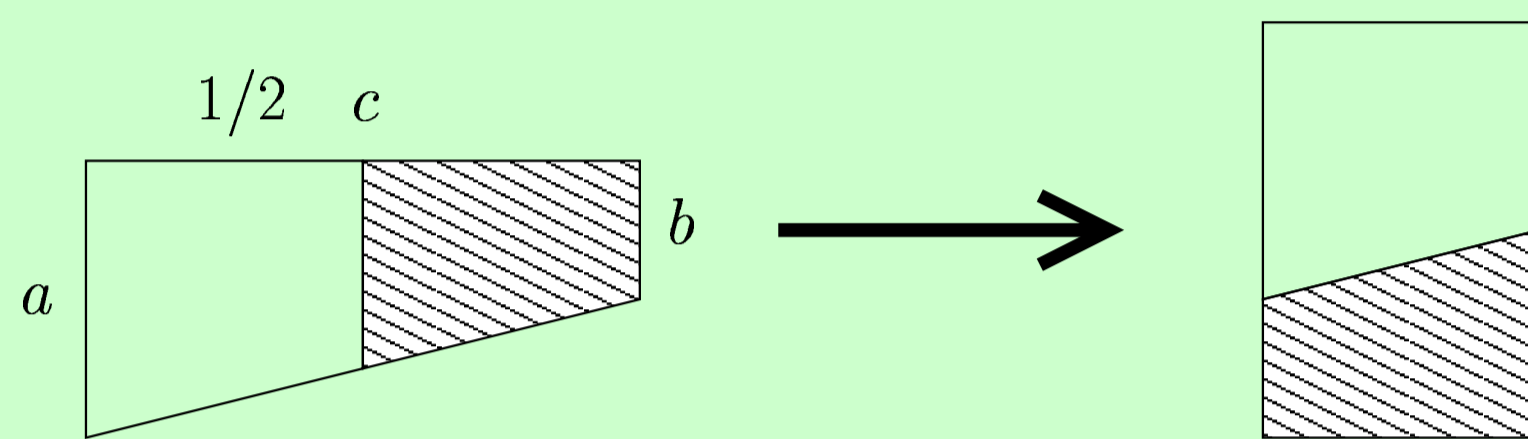


Bijgevoegde tekst: "halveer de linkse zijde om van de driehoek een rechthoek te maken."

Dus moet men volgende constructie maken.



Probleem 52: een analoge methode wordt gebruikt voor de oppervlakte van een trapezium.



In het geval van een rechthoekig trapezium T gebruikten zij uiteindelijk de correcte formule,

$$\text{opp } T = \frac{a+b}{2} h$$

Maten en gewichten

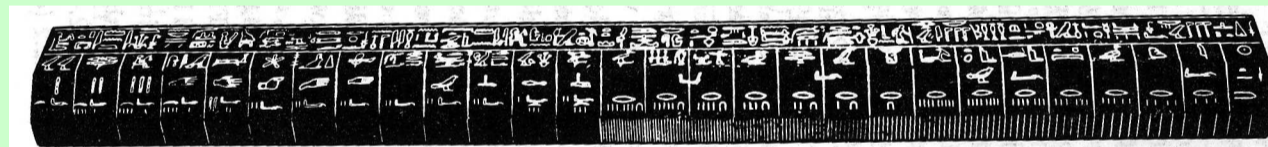
el: Oorspronkelijk was de el de lengte van een voorarm, van de elleboog tot het uiteinde van de middelvinger. Omdat die lengte varieerde van persoon tot persoon, werden er snel twee gestandaardiseerde ellen ingevoerd: de *koninklijke el* en de *korte el*. Meestal werd de koninklijke el gebruikt. Zijn lengte was 52,3 centimeter. De korte el was gelijk aan 45 centimeter.

De el werd als eenheid ook nog gebruikt bij de Grieken en Romeinen, maar zijn lengte veranderde. Een Griekse el was 46,3 centimeter en de Romeinse 44,4.

palm of handbreedte: het zevende deel van een el.

vinger: Dit is het vierde deel van een palm.

Voor het meten van kleine afstanden gebruikten de Egyptenaren een meetlat.



arura: Dit is de oppervlakte van een vierkant met zijde 100 el, anders gezegd: 10.000 vierkante el.

khet: Dit is een lengte van 100 el. Deze eenheid komt dikwijls voor in de problemen van de Rhind papyrus.

hekat, khar, hinu en ro: Deze volume-eenheden werden gebruikt voor het meten van hoeveelheden graan. Een *hekat* komt overeen met het 30ste deel van een kubieke el. De *khar* was twee derde van een kubieke el en de *hinu* was een kleinere eenheid die overeenkwam met een tiende van een hekat. De *ro* is een nog veel kleinere eenheid: het 320ste deel van een hekat.

deben en quedet: De *deben* is een massa-eenheid die overeenkomt met ongeveer 100 gram. Het tiende deel van een deben is een *quedet*.

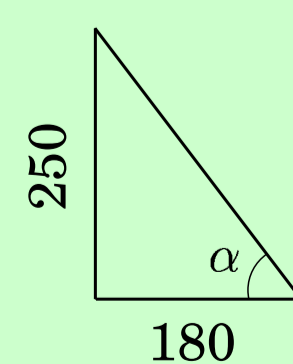
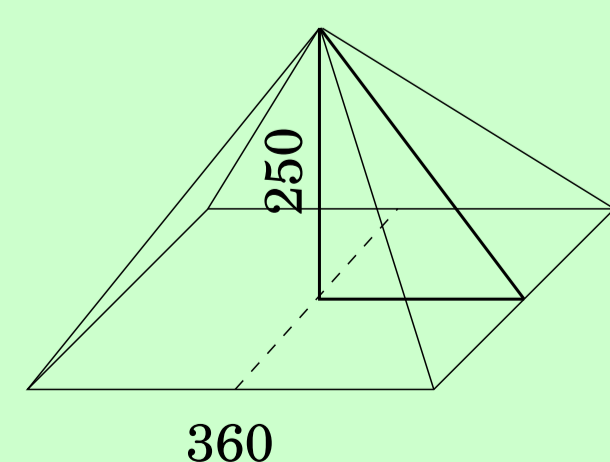
des: Deze eenheid werd vooral gebruikt voor het meten van vloeibare volumes (zoals bier) en komt overeen met een halve liter.

Sekhed van een piramide

De **sekhed** was de Egyptische term voor wat wij nu *richtingscoëfficiënt* noemen. Het is een maat voor de helling α van een piramide.

Letterlijke opgave: "Dit is een berekening in verband met een piramide. 360 is de zijde van de basis (als basis werd een vierkant gebruikt), 250 de hoogte. Geef mij de sekhed."

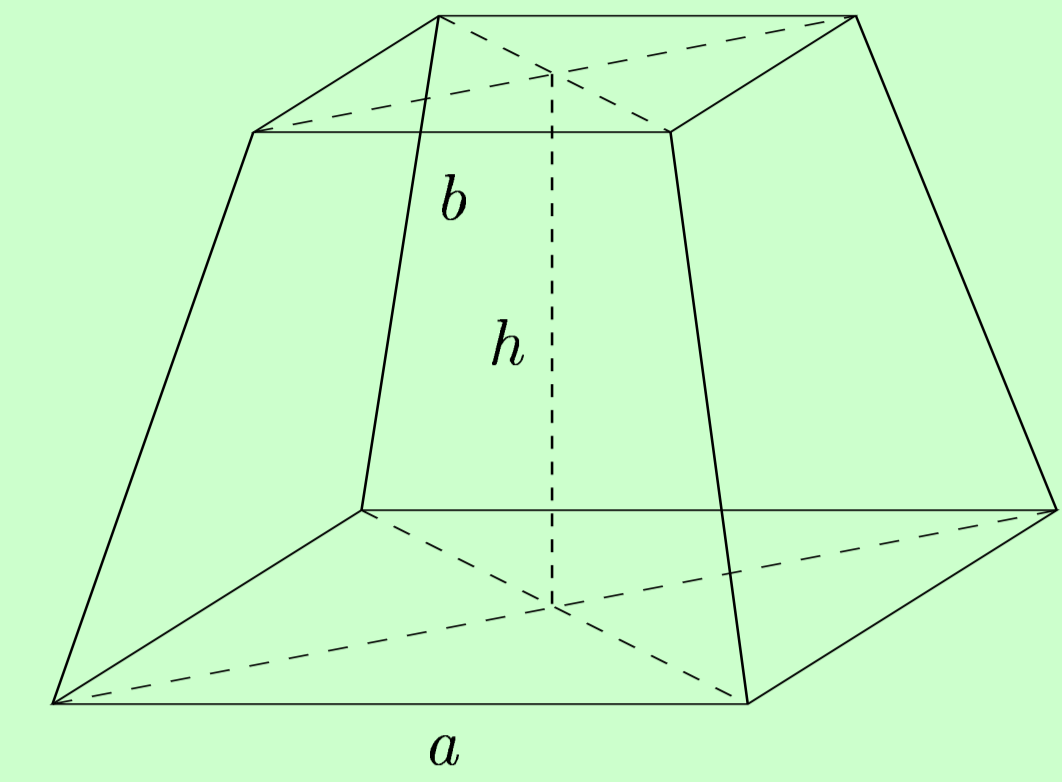
Egyptische methode: "De helft van 360 is 180. Deel 180 door 250, dit geeft $180/250 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{50}$ el." In het gegeven wordt er bij een verticale stijging van 250 el een horizontale afstand van 180 el afgelegd en aldus bekomt men met deze deling de afgelegde horizontale afstand bij een stijging van 1 el. "Dit quotiënt wordt nu vermenigvuldigd met 7." Dit omdat een el zeven handbreedtes is. "Het resultaat is een helling van $5 + \frac{1}{25}$ handbreedtes."



$$\text{sekhed} = \frac{180}{250}$$

Volume afgeknotte piramide

Probleem 14 van de Moskou papyrus geeft de formule voor de berekening van het volume van een afgeknotte piramide met vierkant grondvlak.



Probleem 14: "Gegeven: $h = 6, a = 4, b = 2$. Bereken het volume."

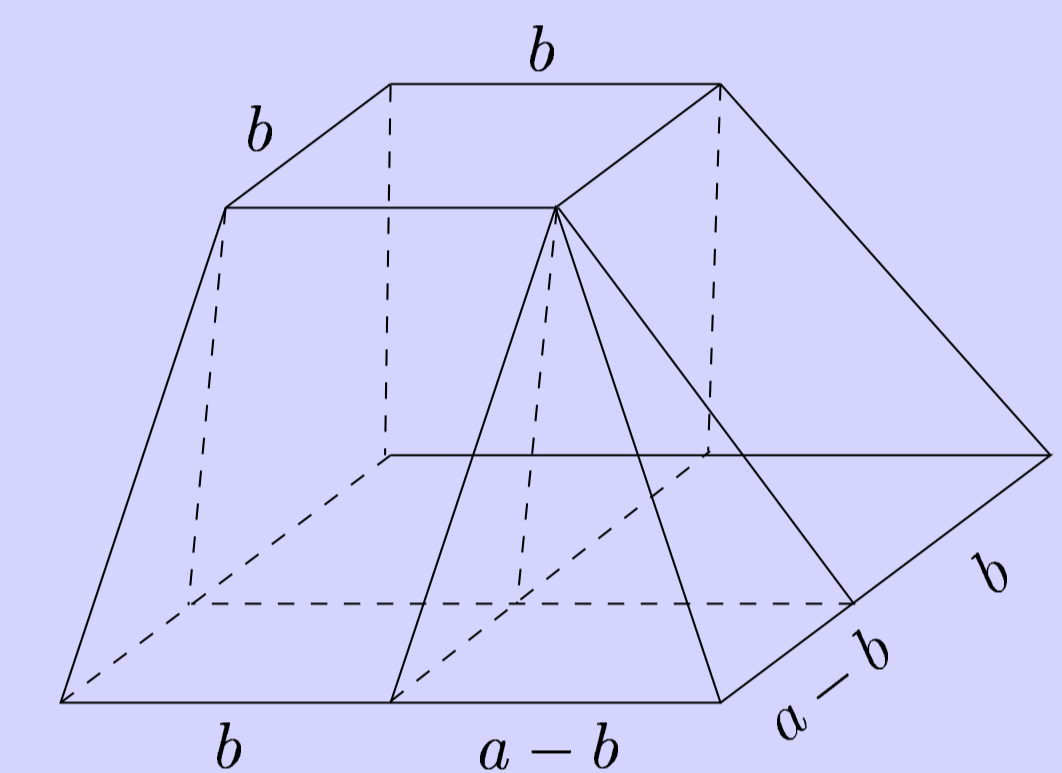
Berekening: "Kwadrateer 4, dat geeft 16. Verdubbel 4 (=ab), dat geeft 8. Kwadrateer 2, dat geeft 4. Tel de drie vorige getallen samen, dat geeft 28. Bereken een derde van 6, dat geeft 2. Doe 28 maal 2, dat geeft 56."

Ze gebruikten dus de correcte formule:

$$V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

Een mogelijke redenering die de Egyptenaren kon brengen tot bovenstaande formule is de volgende.

Verdeel de afgeknotte piramide op zoals in de volgende figuur.



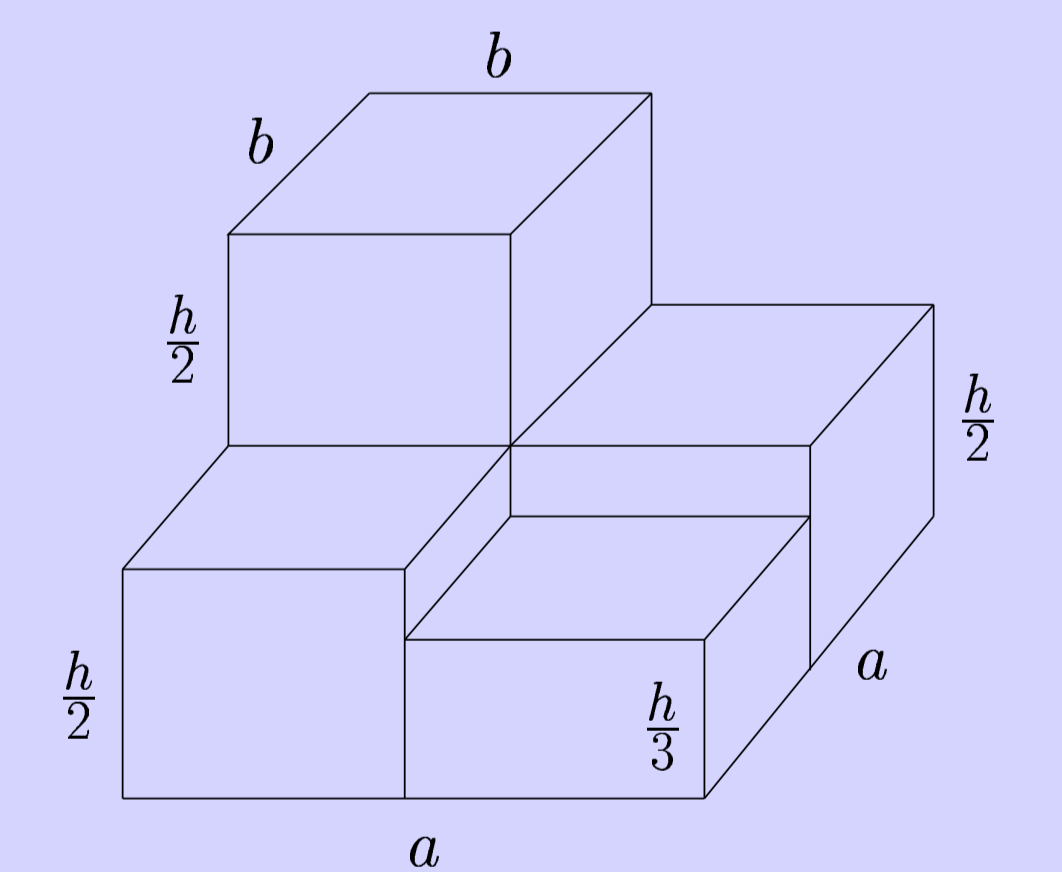
Dus we hebben hem verdeeld in 4 delen: een parallellepipedum, twee prisma's en een piramide. Wanneer men onderstelt dat ze het volume van een piramide kenden, vinden we voor het volume V van een afgeknotte piramide:

$$V = \text{oppervlakte grondvlak (=vierkant)} \times \text{hoogte } h + 2 \times (\text{oppervlakte "grondvlak" (=recht-opstaande driehoek)} \times \text{"hoogte" } b) + \frac{1}{3} \text{ oppervlakte grondvlak (=vierkant)} \times \text{hoogte.}$$

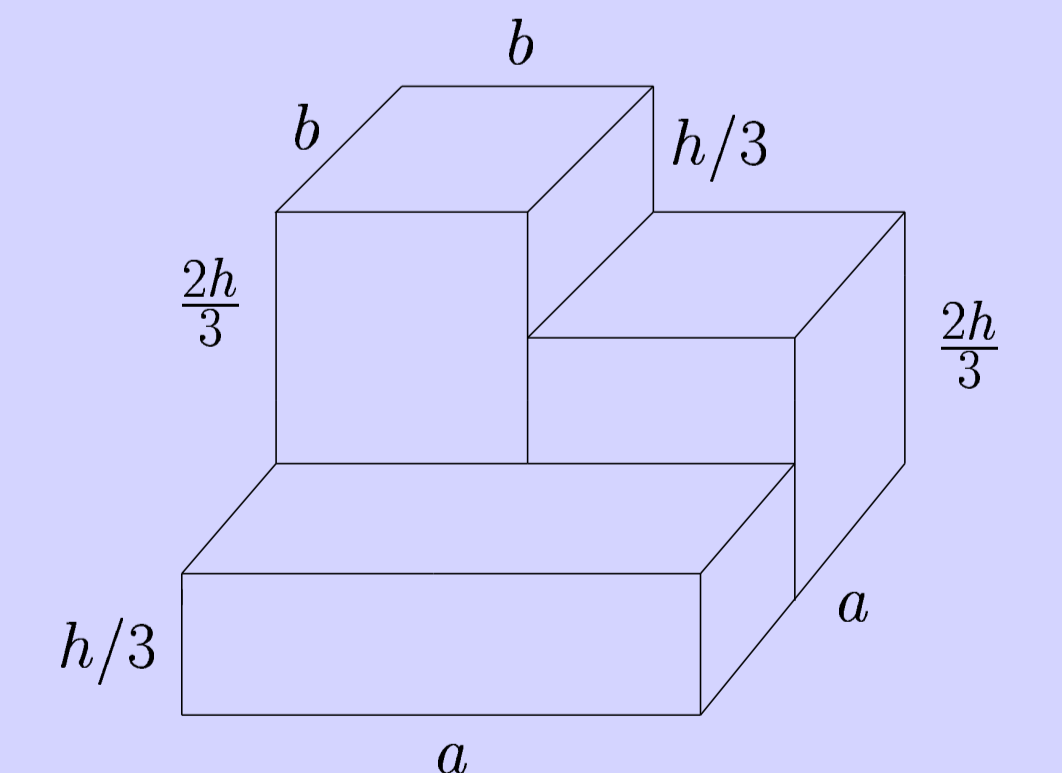
Men bekomt aldus:

$$V = b^2 h + 2 \cdot \left(\frac{(a-b)h}{2} b\right) + \frac{1}{3}(a-b)^2 h$$

Vereenvoudig nu het probleem door te onderstellen dat een ribbe van de afgeknotte piramide loodrecht op het vierkantig grondvlak staat. Vervang de twee prisma's door rechthoekige blokken of balken van halve hoogte en vervang de piramide door een blok van $1/3$ van de originele hoogte.



Zet nu het bovenste derde van de eerste blok op het tweede blok.



Zo bekomt men een object dat in drie horizontale lagen van telkens hoogte $1/3$ kan verdeeld worden. De onderste heeft basis a^2 , de tweede basis ab en de derde basis b^2 . Zo bekomt men effectief de gezochte formule en deze bewijsmethode overtreft niet de wiskundige competentie van de Egyptenaren.

Indien de Oude Egyptenaren de formule voor de inhoud van een piramide toch kenden, kan men zich afvragen waarom zij dan de inhoud van de afgeknotte piramide niet berekenden als verschil van de inhoud van een grote en een kleine piramide. Om dan tot de formule $\frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$ te komen, gebruikt men het merkwaardig product $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$. Het is niet duidelijk of de Egyptenaren deze rekenregel kenden.