

# Wiskundig valt er veel in de plooi

Philippe Cara

Vrije Universiteit Brussel

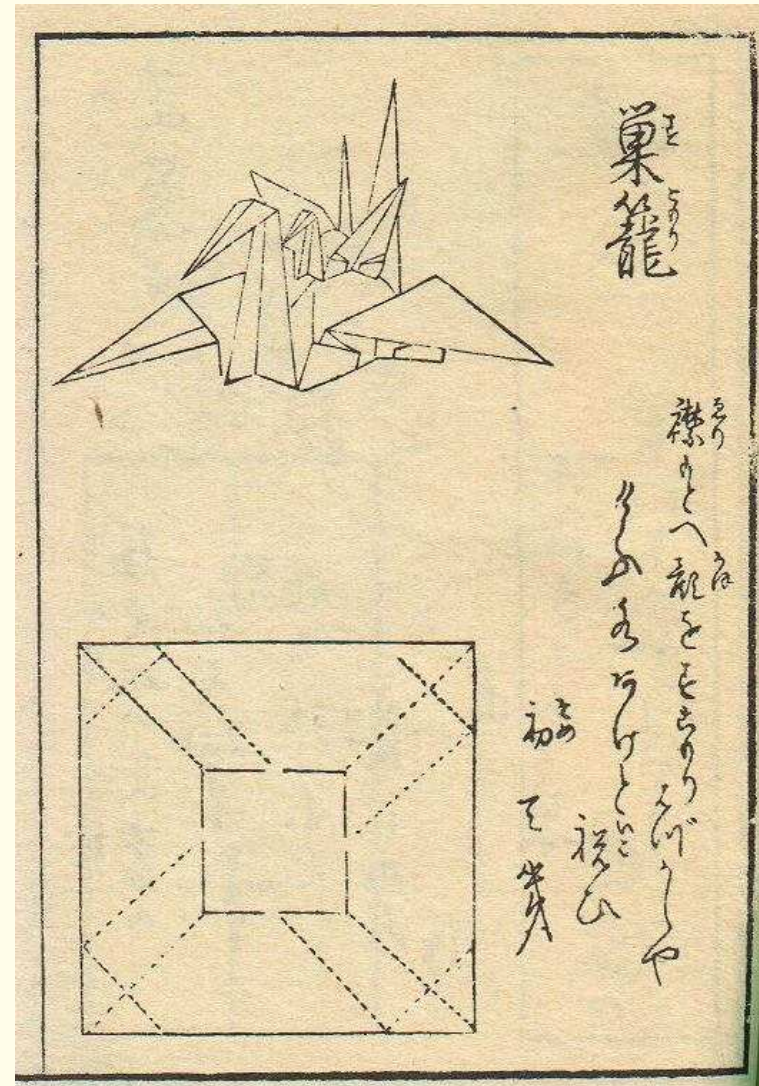
[pcara@vub.ac.be](mailto:pcara@vub.ac.be)

Leuven, 13 mei 2009

- ORIGAMI = kunst van het papiervouwen
- China, 1ste of 2de eeuw
- Japan 6de eeuw, Europa in 12de eeuw



- ORIGAMI = kunst van het papiervouwen
- China, 1ste of 2de eeuw
- Japan 6de eeuw, Europa in 12de eeuw
- 1797: Hiden Senbazuru Orikata
- 1880: “Oru” (plooien)  
“Kami” (papier)
- 1935: Yoshizawa voert symbolen en diagrammen in



# Hoe maken we... ?



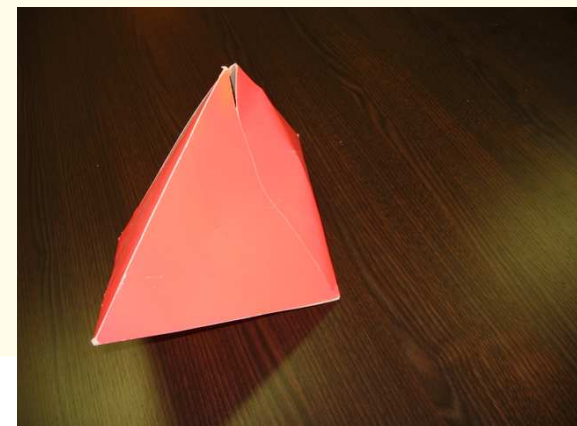
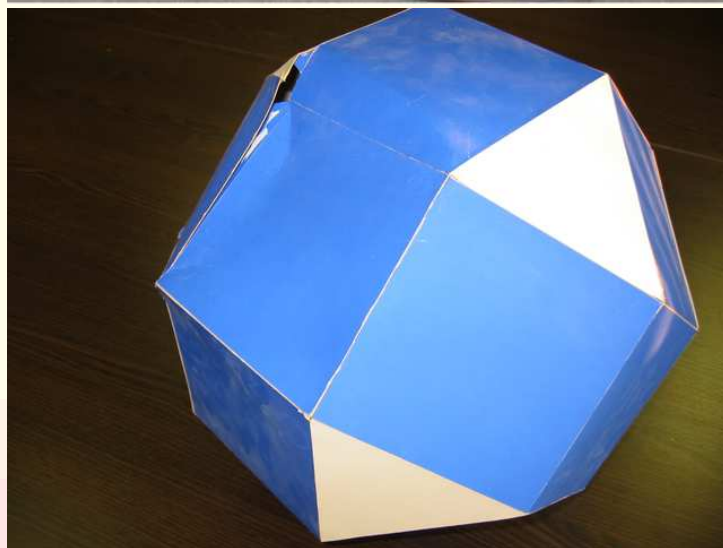
©HOJYO Takashi 2003



# Waarom ik ?



# Waarom ik ?



# Papiervouwen : een hobby ?

- Ontspannend, weinig risico
- Interesseert meetkundigen
- Interesseert wiskundigen

# Papiervouwen : een hobby ?

- Ontspannend, weinig risico
- Interesseert meetkundigen
- Interesseert wiskundigen
- Interessant voor het onderwijs



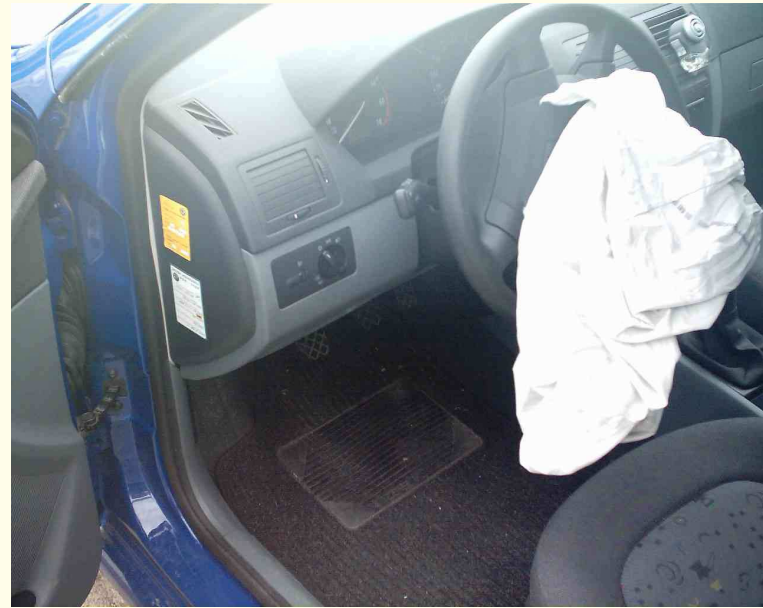
# Papiervouwen : een hobby ?

- Ontspannend, weinig risico
- Interesseert meetkundigen
- Interesseert wiskundigen
- Interessant voor het onderwijs
- Interessant voor veiligheid en ruimte



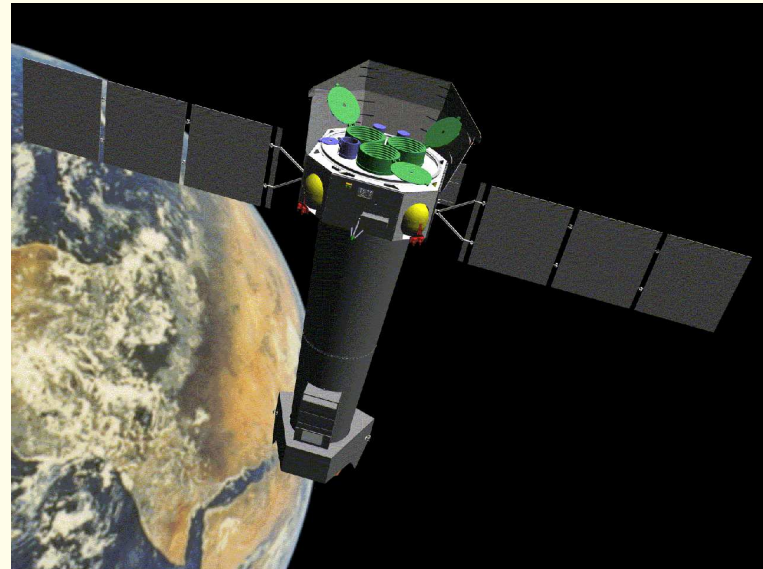
# Papiervouwen : een hobby ?

- Ontspannend, weinig risico
- Interesseert meetkundigen
- Interesseert wiskundigen
- Interessant voor het onderwijs
- Interessant voor veiligheid en ruimte



# Papiervouwen : een hobby ?

- Ontspannend, weinig risico
- Interesseert meetkundigen
- Interesseert wiskundigen
- Interessant voor het onderwijs
- Interessant voor veiligheid en ruimte



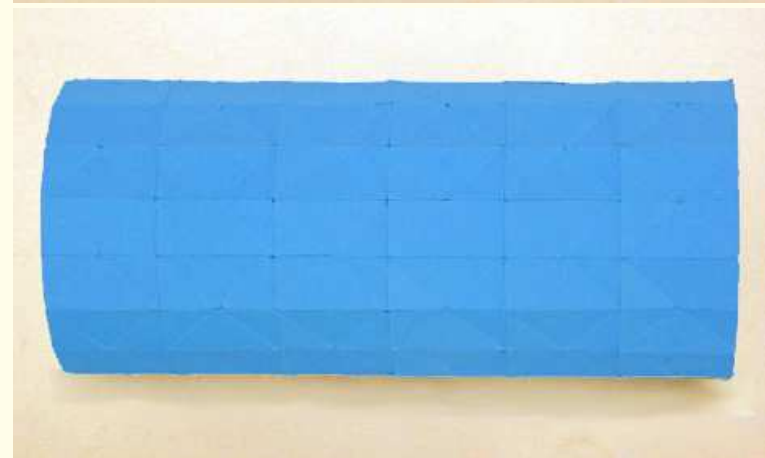
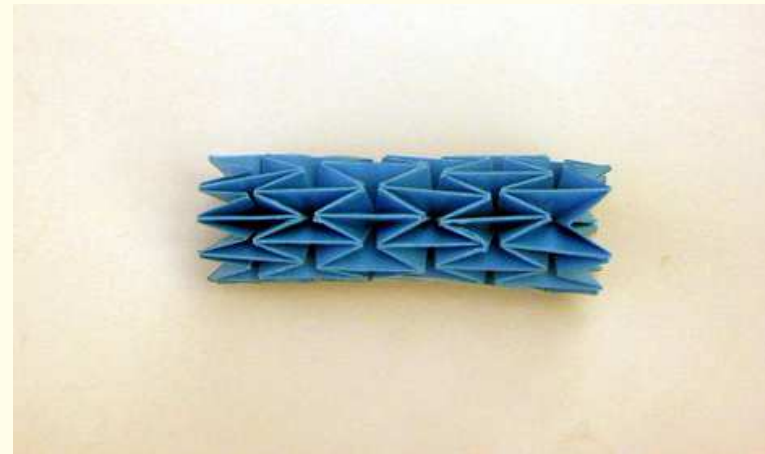
# Papiervouwen : een hobby ?

- Ontspannend, weinig risico
- Interesseert meetkundigen
- Interesseert wiskundigen
- Interessant voor het onderwijs
- Interessant voor veiligheid en ruimte
- Interessant in de geneeskunde



# Papiervouwen : een hobby ?

- Ontspannend, weinig risico
- Interesseert meetkundigen
- Interesseert wiskundigen
- Interessant voor het onderwijs
- Interessant voor veiligheid en ruimte
- Interessant in de geneeskunde



WAT KAN GECONSTRUEERD WORDEN ?

Alle constructies die in de *Elementen* van Euklides voorkomen zijn gebaseerd op het gebruik van passer en liniaal.

Alle constructies die in de *Elementen* van Euklides voorkomen zijn gebaseerd op het gebruik van passer en liniaal.

1. Tussen twee verschillende punten kan men steeds een rechte lijn trekken.
2. Elke eindige rechte lijn kan steeds oneindig verlengd worden op een continue wijze.
3. Men kan steeds een cirkel tekenen indien zijn middelpunt en een straal gegeven zijn.



# We kunnen tweedegraadsvergelijkingen oplossen

- $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$
- $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = R^2$

# Onmogelijke constructies

Drie problemen waarvoor men eeuwenlang tevergeefs naar een oplossing zocht:

1. *De duplicatie van de kubus* = de constructie van de zijde van een kubus die een volume heeft gelijk aan het dubbele van dat van een gegeven kubus.
2. *De trisectie van de hoek* = de verdeling van een gegeven willekeurige hoek in drie evengrote hoeken.
3. *De kwadratuur van de cirkel* = de constructie van een vierkant met dezelfde oppervlakte als een gegeven cirkel.

# Onmogelijke constructies

1. *De duplicatie van de kubus* :  $z_D^3 = 2z^3 \iff z_D = \sqrt[3]{2}z.$

# Onmogelijke constructies

1. *De duplicatie van de kubus* :  $z_D^3 = 2z^3 \iff z_D = \sqrt[3]{2}z$ .
2. *De trisectie van de hoek* : derdegraadsvergelijking :  
 $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$ .

# Onmogelijke constructies

1. *De duplicatie van de kubus* :  $z_D^3 = 2z^3 \iff z_D = \sqrt[3]{2}z$ .
2. *De trisectie van de hoek* : derdegraadsvergelijking :  
 $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$ .
3. *De kwadratuur van de cirkel* : construeer  $\sqrt{\pi}$ .

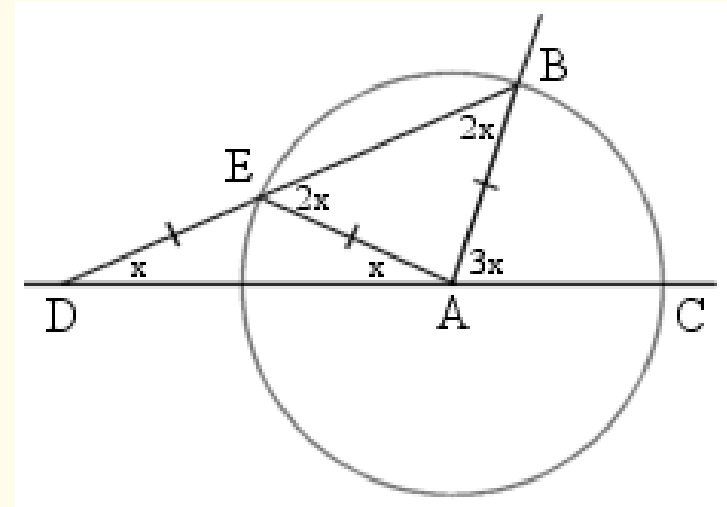
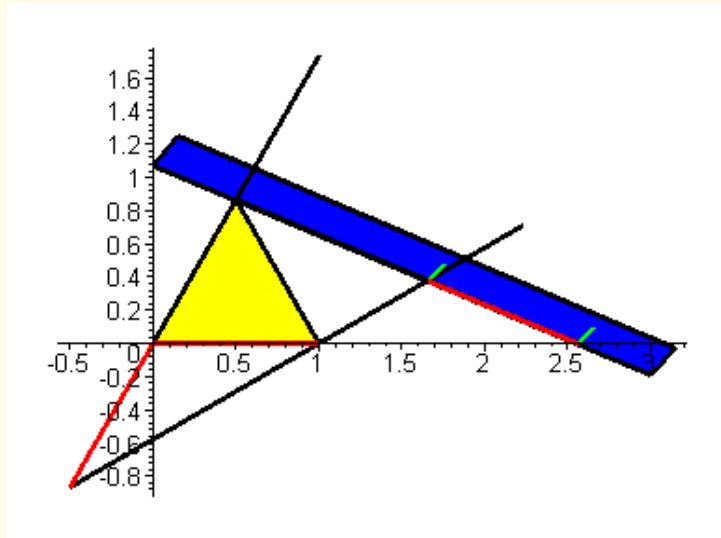
# Onmogelijke constructies

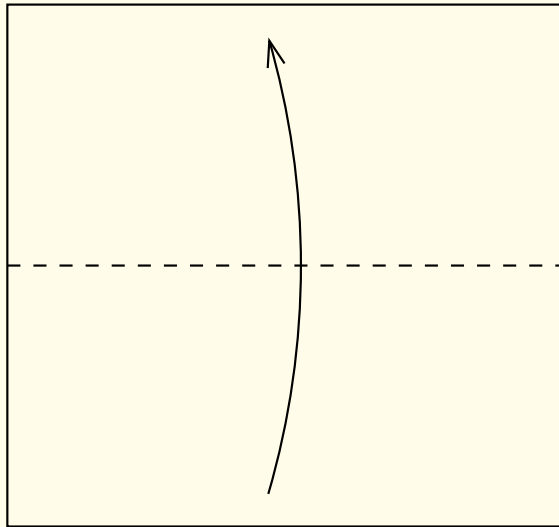
1. *De duplicatie van de kubus* :  $z_D^3 = 2z^3 \iff z_D = \sqrt[3]{2}z$ .
2. *De trisectie van de hoek* : derdegraadsvergelijking :  
 $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$ .
3. *De kwadratuur van de cirkel* : construeer  $\sqrt{\pi}$ .

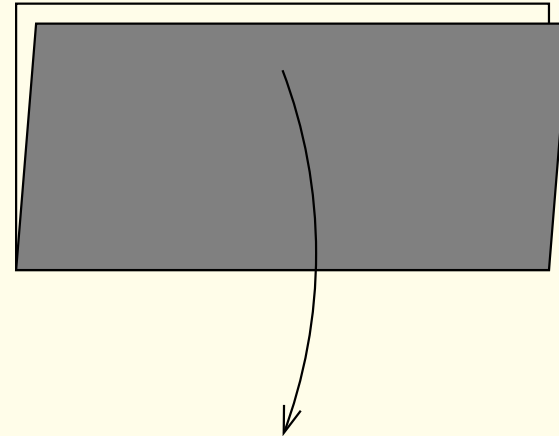
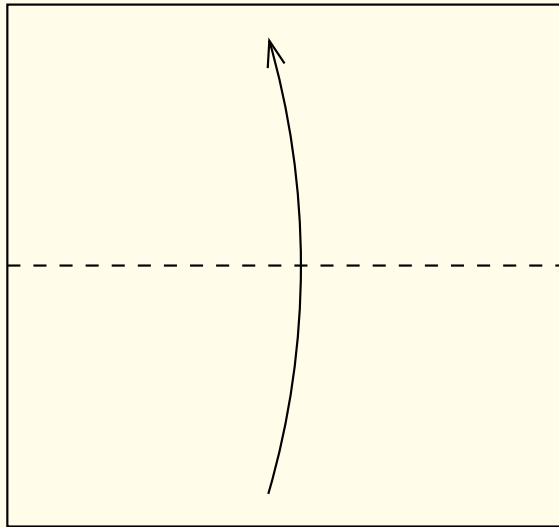
*Galoistheorie*  $\implies$  geen van deze drie problemen heeft een oplossing met passer en liniaal.

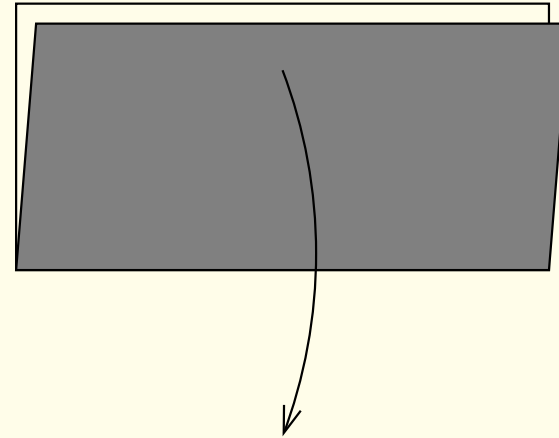
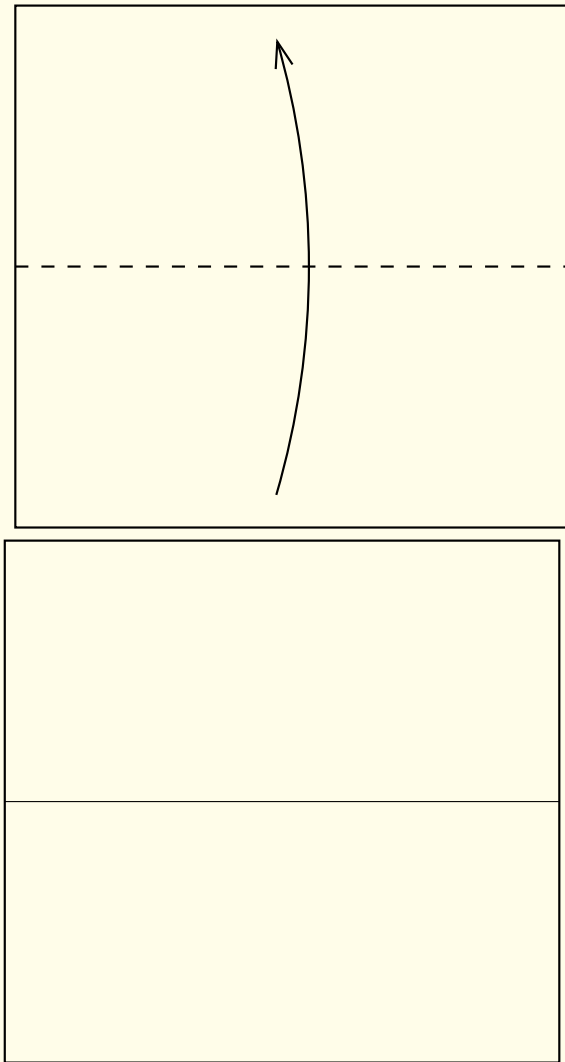


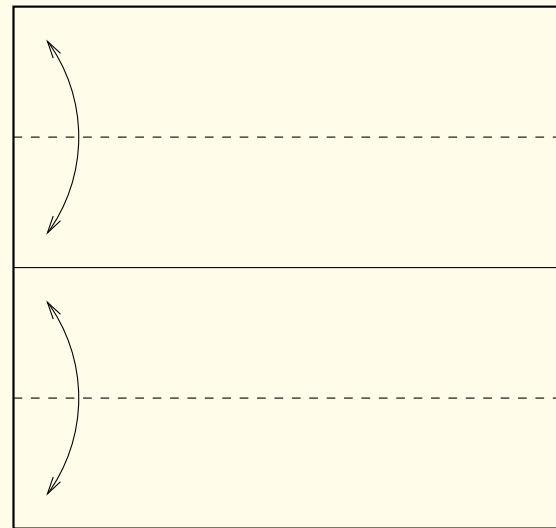
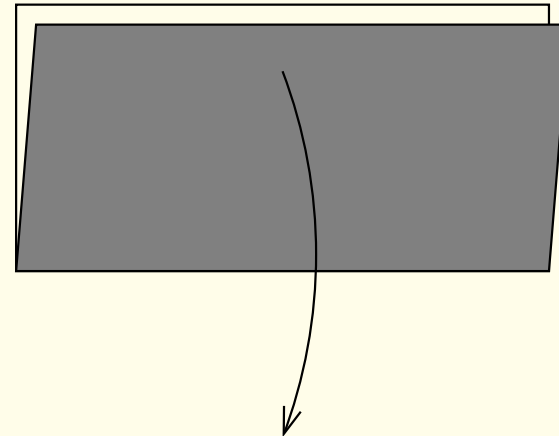
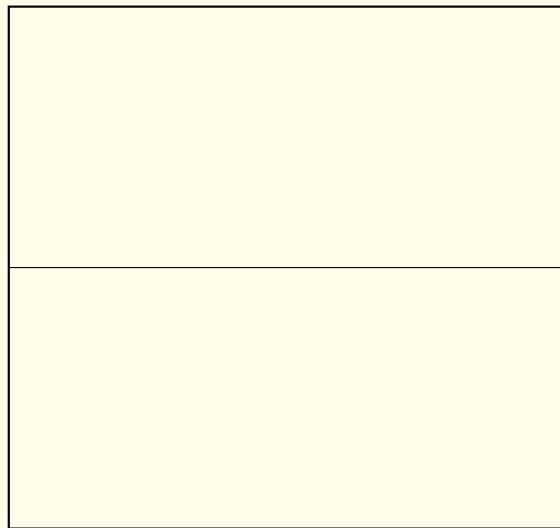
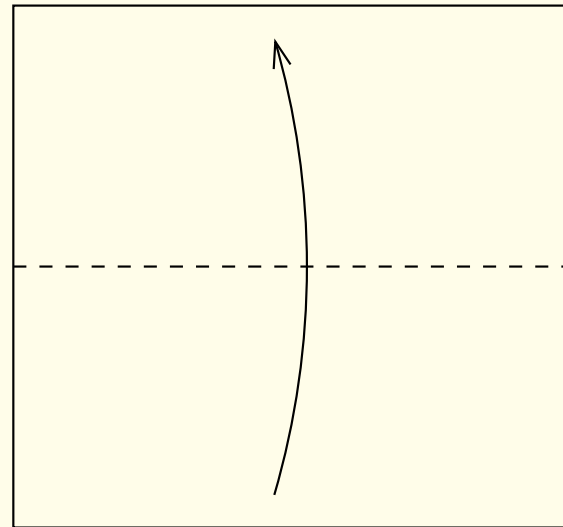
# Met passer en geijkte liniaal





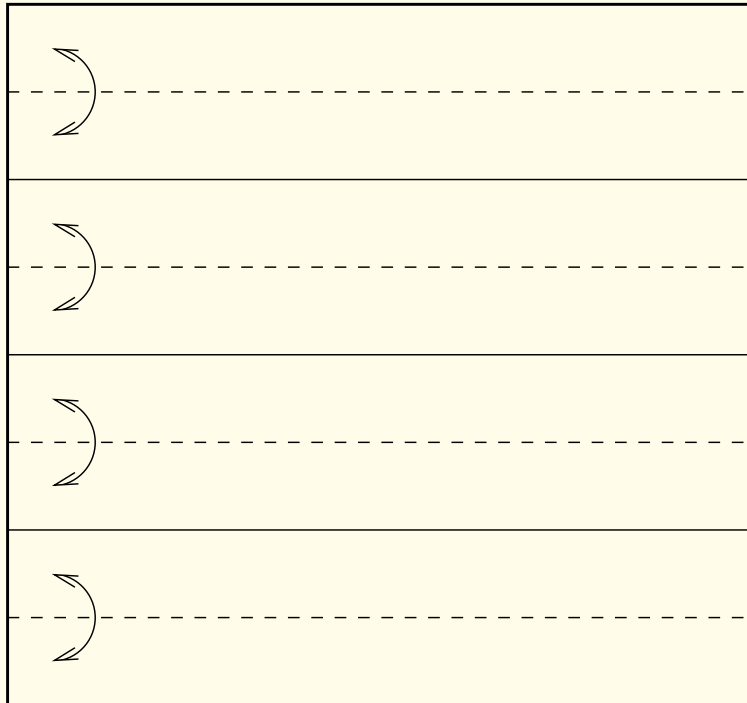








- We kunnen alle breuken  $\frac{1}{2^n}$  construeren!



- We kunnen alle breuken  $\frac{1}{2^n}$  construeren!
- We kunnen dus ook de  $\frac{m}{2^n}$  maken, in  $2^n - 1$  vouwen.

# Binaire schrijfwijze van getallen

$$384 = 3 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 4 \times 10^0$$

# Binaire schrijfwijze van getallen

$$384 = 3 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 4 \times 10^0$$

$$101 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

# Binaire schrijfwijze van getallen

384.678 =

$$3 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 4 \times 10^0 + 6 \times 10^{-1} + 7 \times 10^{-2} + 8 \times 10^{-3}$$

101 =

$$1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

# Binaire schrijfwijze van getallen

384.678=

$$3 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 4 \times 10^0 + 6 \times 10^{-1} + 7 \times 10^{-2} + 8 \times 10^{-3}$$

101.001=

$$1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3}$$

# Binaire schrijfwijze van getallen

$$384.678 =$$

$$3 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 4 \times 10^0 + 6 \times 10^{-1} + 7 \times 10^{-2} + 8 \times 10^{-3}$$

$$101.001 =$$

$$1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3}$$

We kunnen dus binaire breuken  $\frac{m}{2^n}$  met  $m < 2^n$  schrijven als “binaire kommagetallen”.

# Binaire schrijfwijze van getallen

$$384.678 =$$

$$3 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 4 \times 10^0 + 6 \times 10^{-1} + 7 \times 10^{-2} + 8 \times 10^{-3}$$

$$101.001 =$$

$$1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3}$$

We kunnen dus binaire breuken  $\frac{m}{2^n}$  met  $m < 2^n$  schrijven als “binaire kommagetallen”.

$$.111 = 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} = \frac{7}{8}$$

$$.11001 = 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} + 0 \times 2^{-4} + 1 \times 2^{-5} = \frac{25}{32}$$

$$.11001 = \frac{1}{2}(1 + 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4})$$

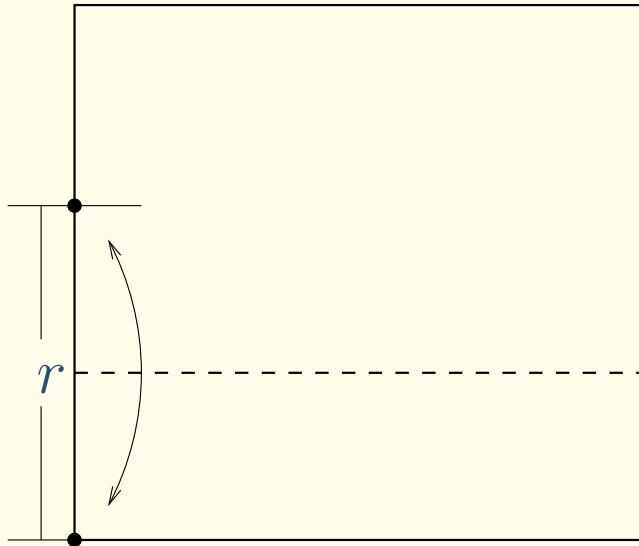
⋮

$$.11001 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{2}(1)\right)\right)\right)\right)$$

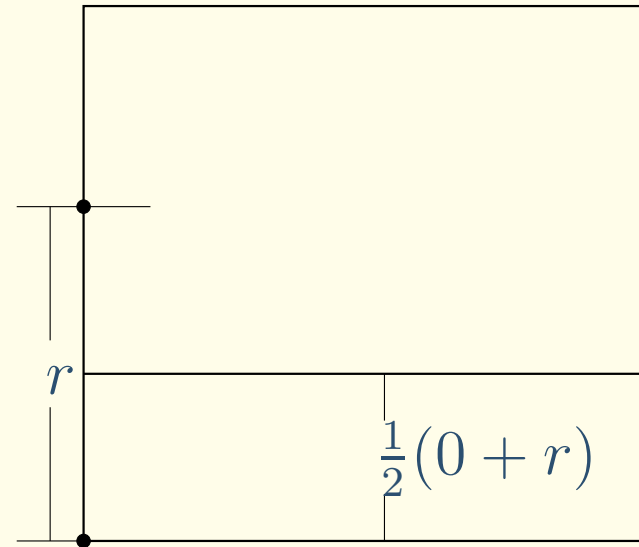
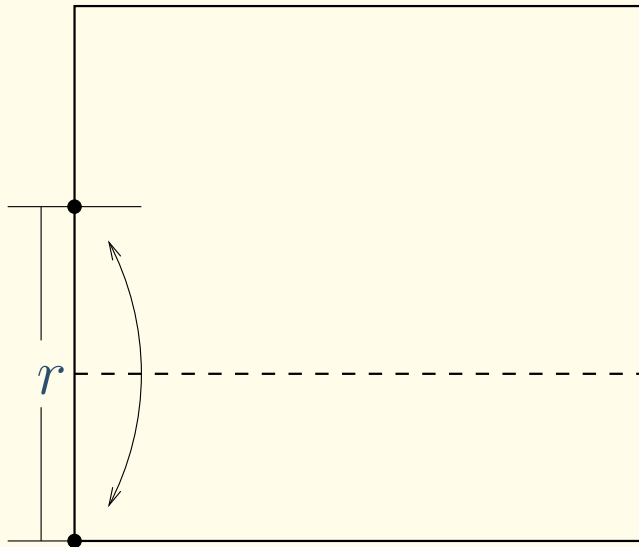
We kunnen  $\frac{25}{32}$  berekenen door van rechts naar links te lezen en, afhankelijk van wat er staat,

1. plus 0, maal  $\frac{1}{2}$
2. plus 1, maal  $\frac{1}{2}$

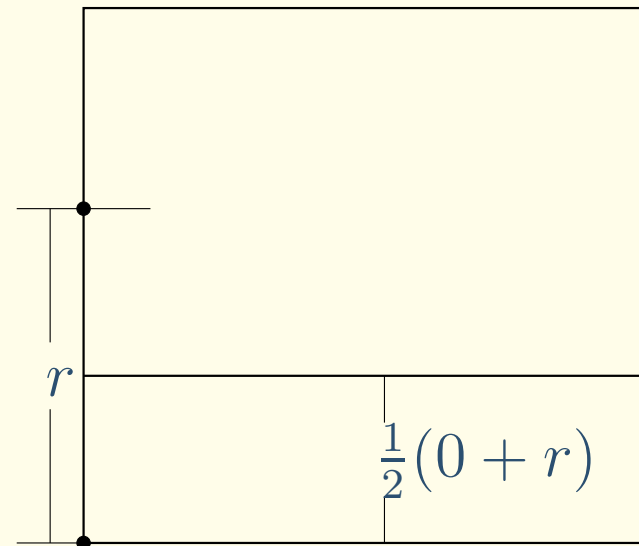
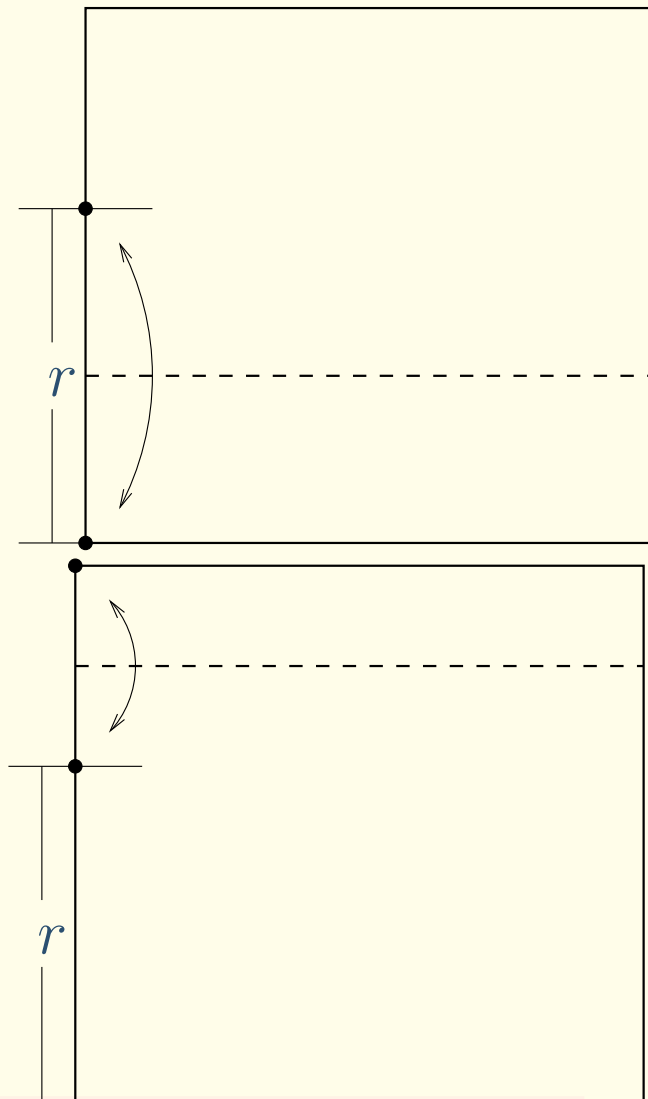
# Deze twee bewerkingen met papier



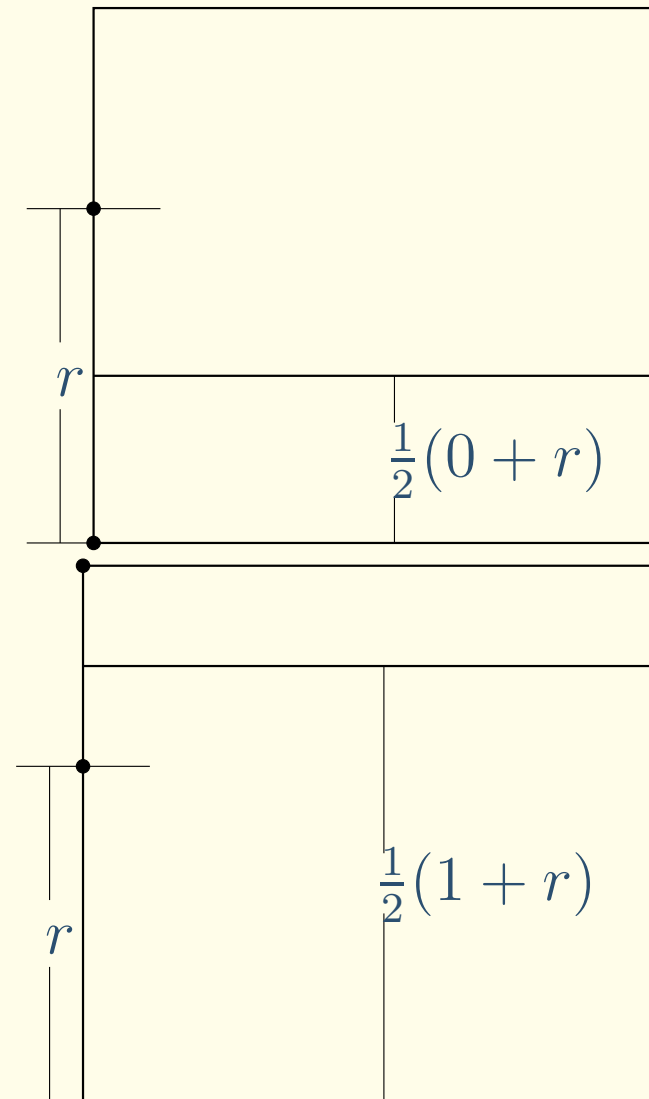
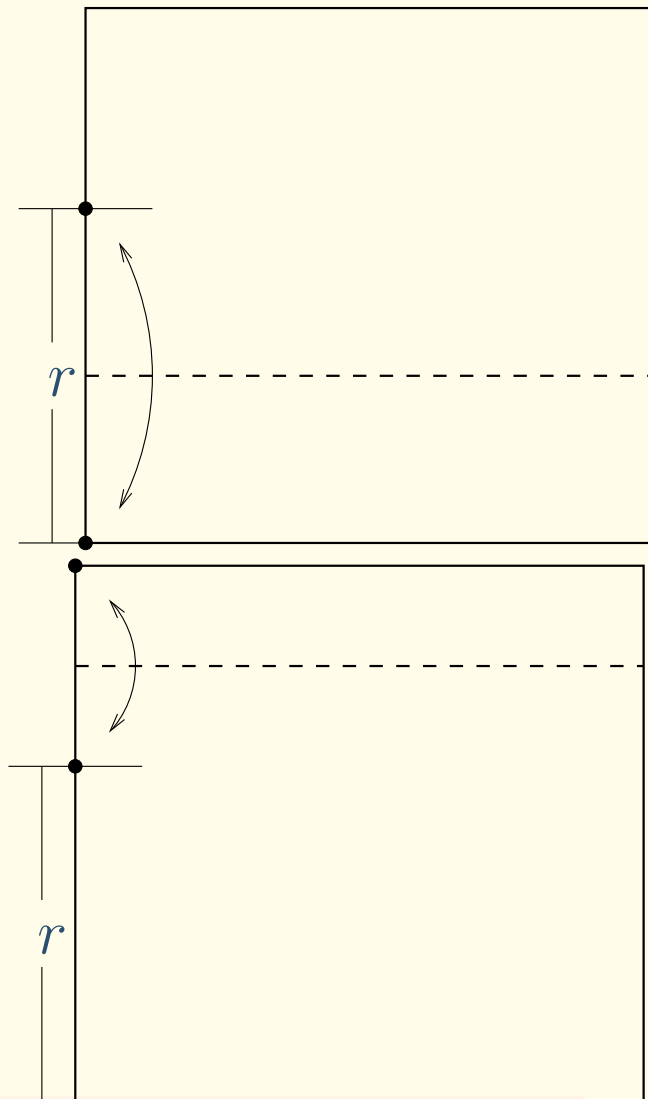
# Deze twee bewerkingen met papier



# Deze twee bewerkingen met papier



# Deze twee bewerkingen met papier



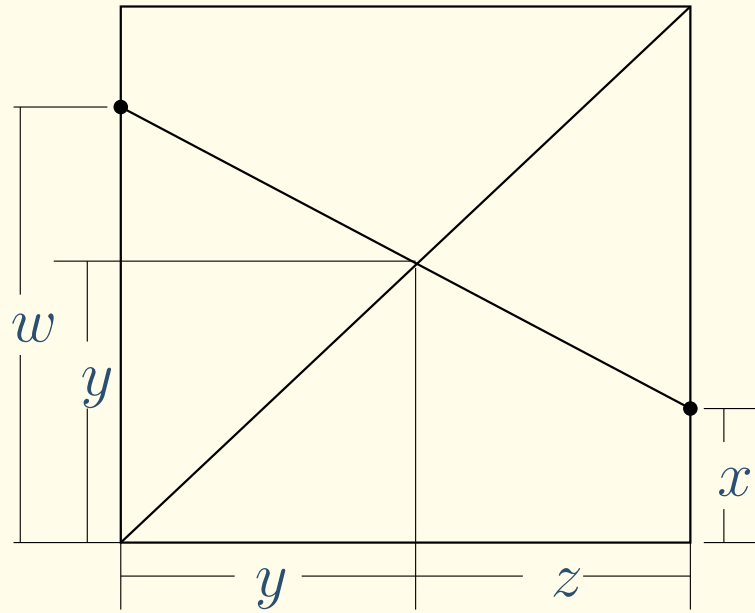
Hier slechts  $n$  vouwen nodig!!!

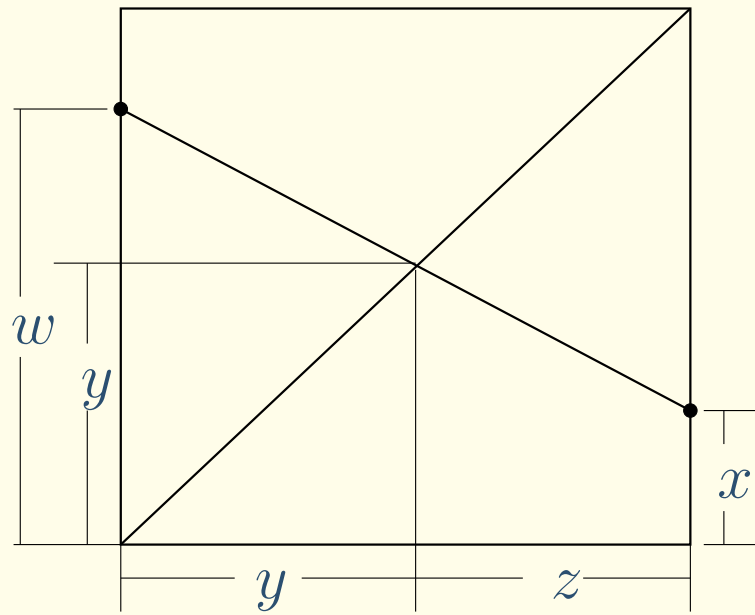
$$\frac{25}{32} = .11001 = 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} + 0 \times 2^{-4} + 1 \times 2^{-5}$$

$$\frac{1}{3} = .0101010101\dots$$

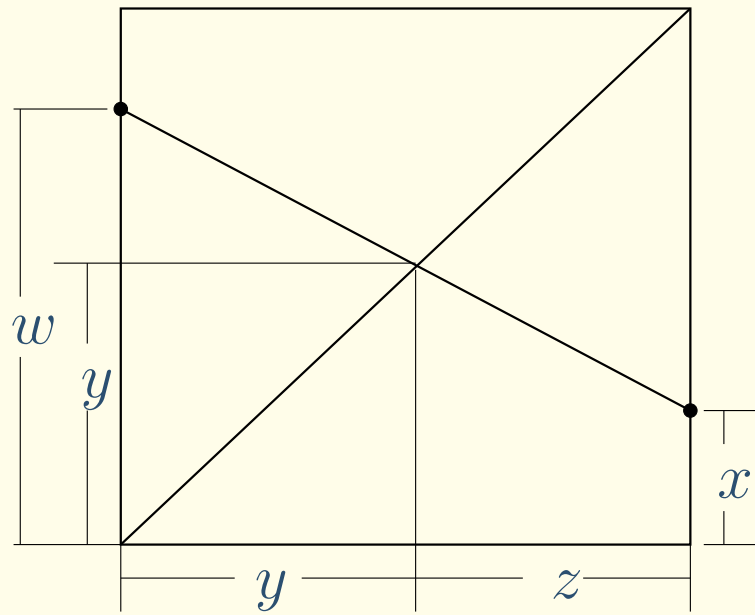
$$\frac{1}{3} = .0101010101\dots$$

Dus vouw bovenkant naar benden, onderkant naar boven  
bovenkant naar beneden, onderkant naar boven, bovenkant  
naar benden, onderkant naar boven bovenkant naar beneden,  
onderkant naar boven, bovenkant naar benden, onderkant  
naar boven bovenkant naar beneden, onderkant naar boven,  
...

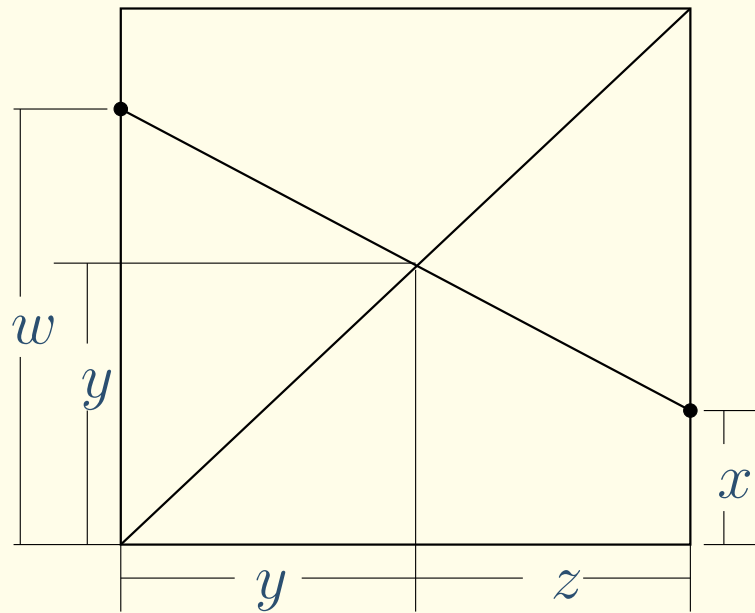




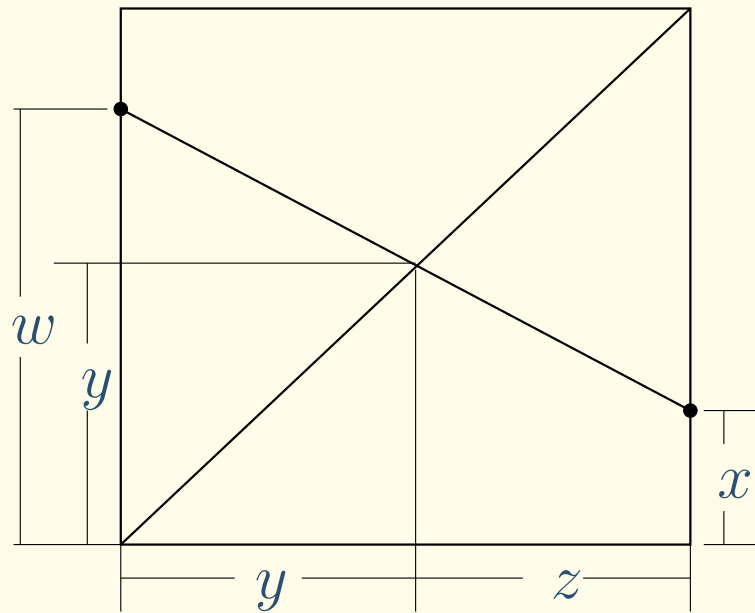
■ 
$$Y = w + \frac{x-w}{y+z}X = w + (x-w)X$$



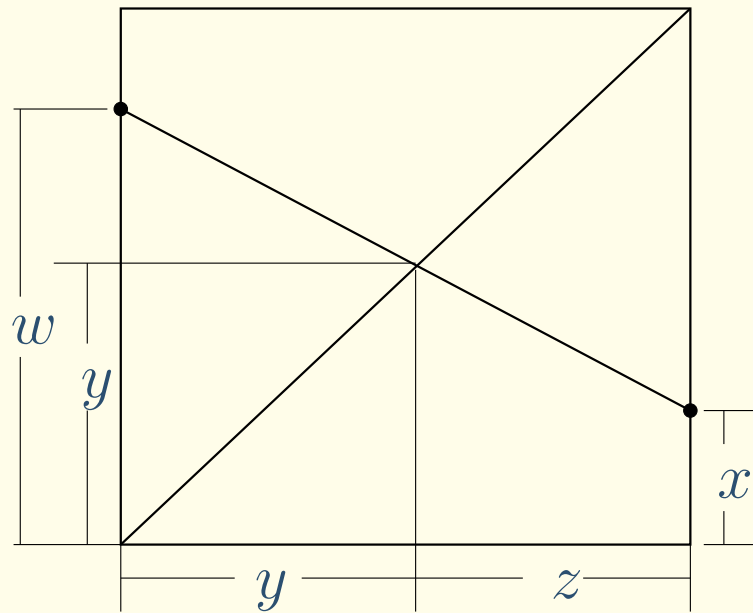
- $Y = w + \frac{x-w}{y+z}X = w + (x-w)X$
- Diagonaal  $\equiv X = Y$



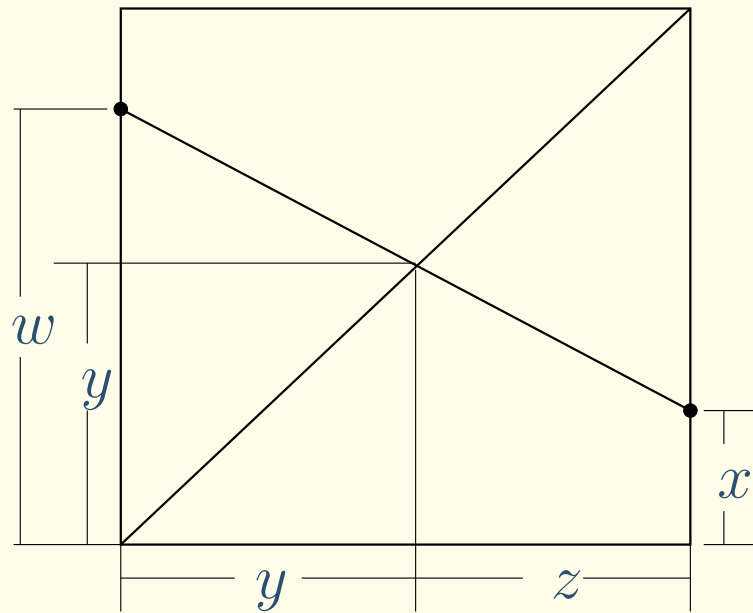
- $Y = w + \frac{x-w}{y+z}X = w + (x-w)X$
- $\text{Diagonaal} \equiv X = Y$
- $Y(1 - (x-w)) = w \iff y = \frac{w}{1-x+w}$



- $Y = w + \frac{x-w}{y+z}X = w + (x-w)X$
- $\text{Diagonaal} \equiv X = Y$
- $Y(1 - (x - w)) = w \iff y = \frac{w}{1-x+w}$
- $z = 1 - y = \frac{1-x}{1-x+w}$



- $Y = w + \frac{x-w}{y+z}X = w + (x-w)X$
- Diagonaal  $\equiv X = Y$
- $Y(1 - (x - w)) = w \iff y = \frac{w}{1-x+w}$
- $z = 1 - y = \frac{1-x}{1-x+w}$
- Zij  $p = 2^n$  en stel  $w = \frac{m}{p}$  en  $x = \frac{n}{p}$  met  $m, n < p$

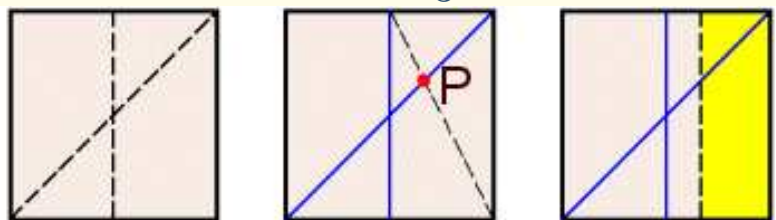


- $Y = w + \frac{x-w}{y+z}X = w + (x-w)X$
- Diagonaal  $\equiv X = Y$
- $Y(1 - (x - w)) = w \iff y = \frac{w}{1-x+w}$
- $z = 1 - y = \frac{1-x}{1-x+w}$
- Zij  $p = 2^n$  en stel  $w = \frac{m}{p}$  en  $x = \frac{n}{p}$  met  $m, n < p$
- Dan  $y = \frac{m}{p+m-n}$  en  $z = \frac{p-n}{p+m-n}$ .

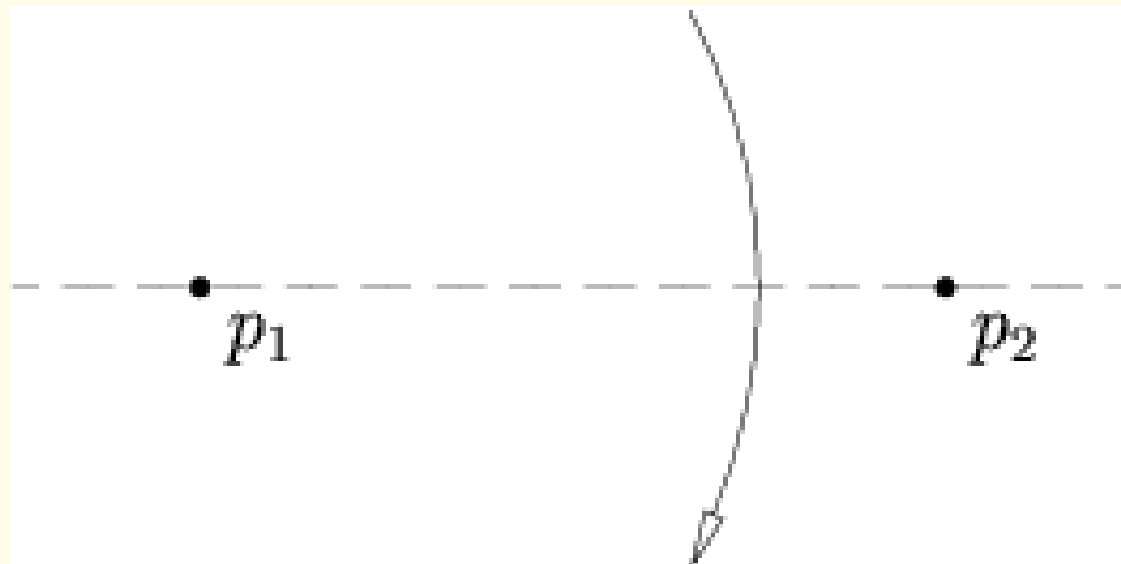
- Dan  $y = \frac{m}{p+m-n}$  en  $z = \frac{p-n}{p+m-n}$ .
- $m := a$ ,  $n = a - b + p$  met  $p = 2^n$  zó dat  $p \geq a$  en  $p \geq b - a$ .

- Dan  $y = \frac{m}{p+m-n}$  en  $z = \frac{p-n}{p+m-n}$ .
- $m := a$ ,  $n = a - b + p$  met  $p = 2^n$  zó dat  $p \geq a$  en  $p \geq b - a$ .
- Voorbeeld: voor  $\frac{1}{3}$  nemen we  $p = 2$ ,  $m = 1$  en  $n = 0$

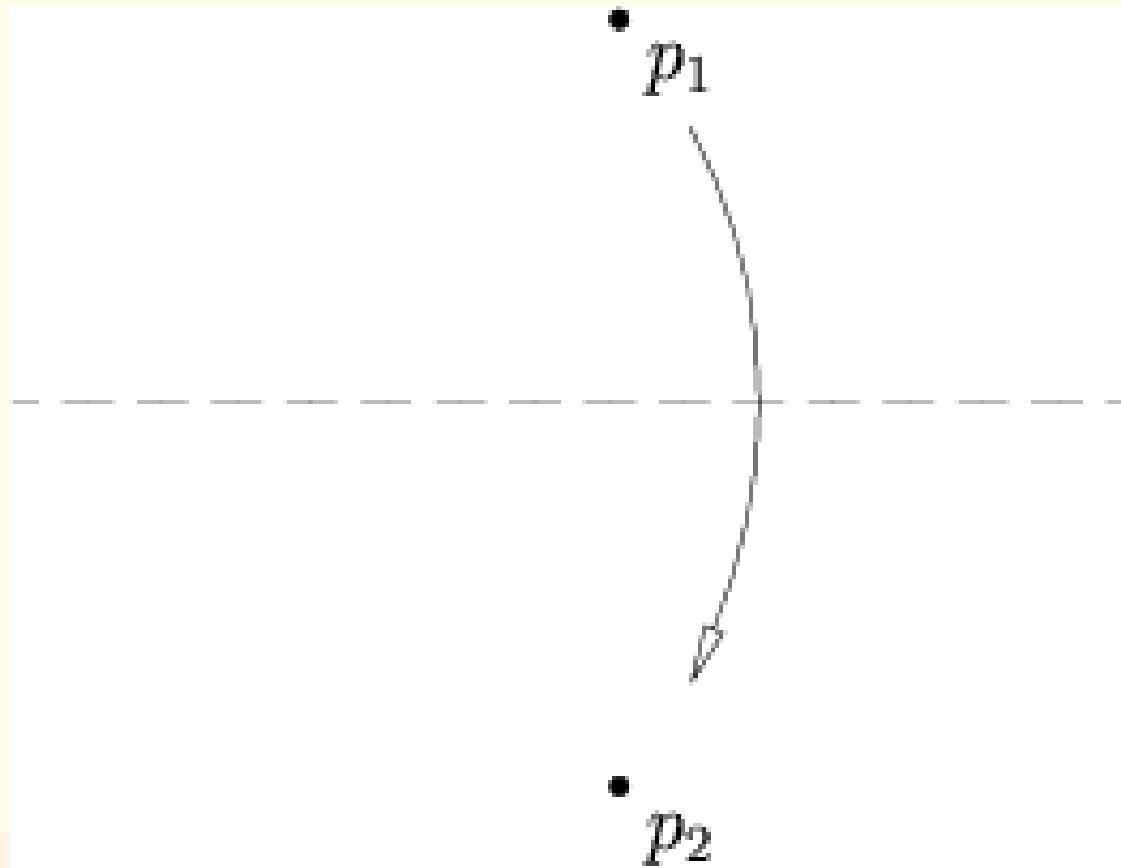
- Dan  $y = \frac{m}{p+m-n}$  en  $z = \frac{p-n}{p+m-n}$ .
- $m := a$ ,  $n = a - b + p$  met  $p = 2^n$  zó dat  $p \geq a$  en  $p \geq b - a$ .
- Voorbeeld: voor  $\frac{1}{3}$  nemen we  $p = 2$ ,  $m = 1$  en  $n = 0$



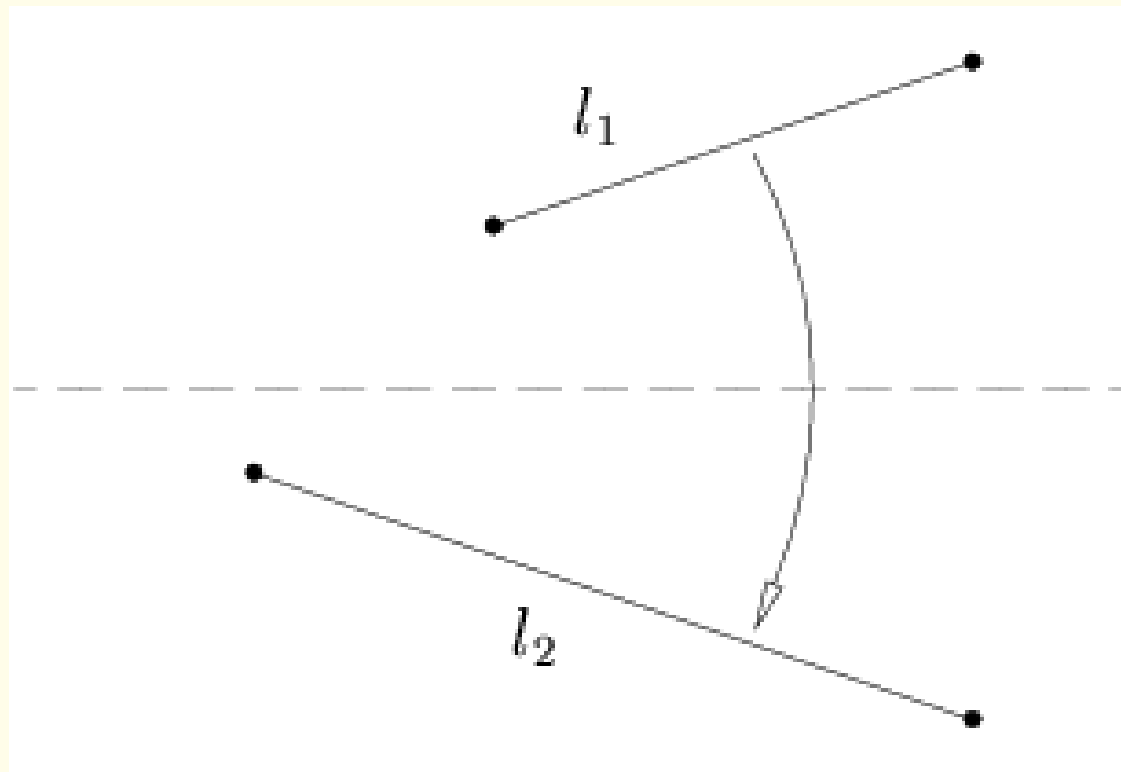
Twee punten  $\longrightarrow$  rechte vouwen die ze verbindt.



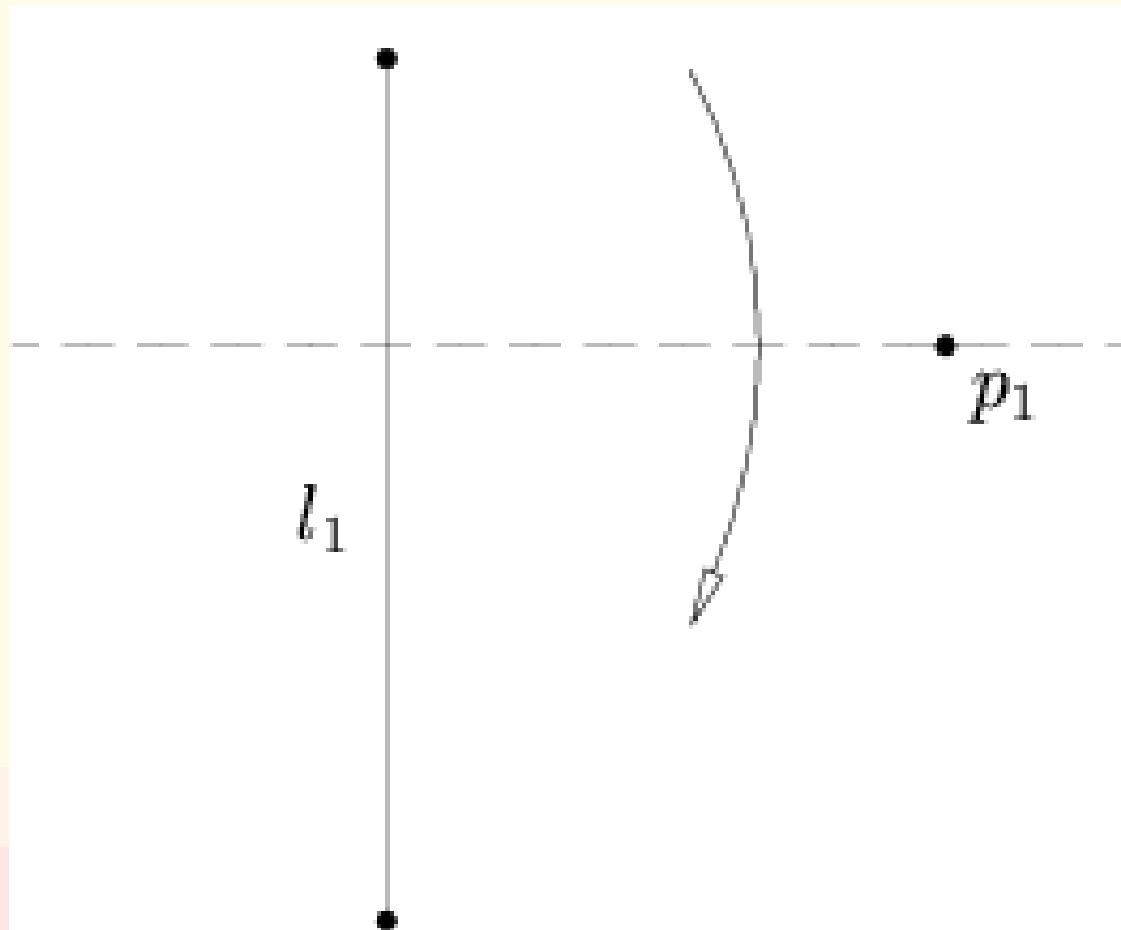
$p_1$  en  $p_2 \longrightarrow$  zó plooien dat  $p_1$  op  $p_2$  terecht komt.



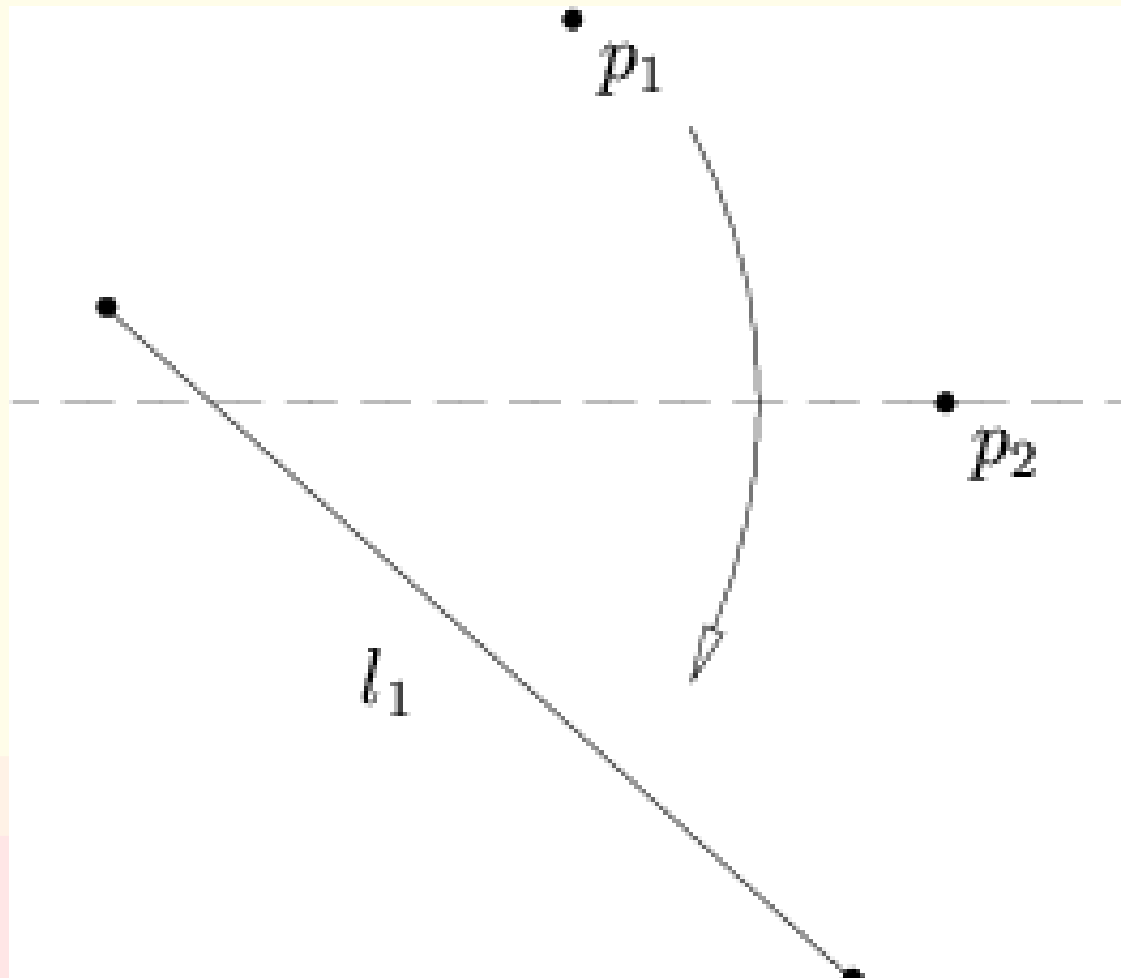
Twee rechten  $l_1$  en  $l_2$   $\longrightarrow$  die op elkaar vouwen.



Punt  $p_1$  en een rechte  $l_1$   $\longrightarrow$  loodlijn op  $l_1$  door  $p_1$  construeren.

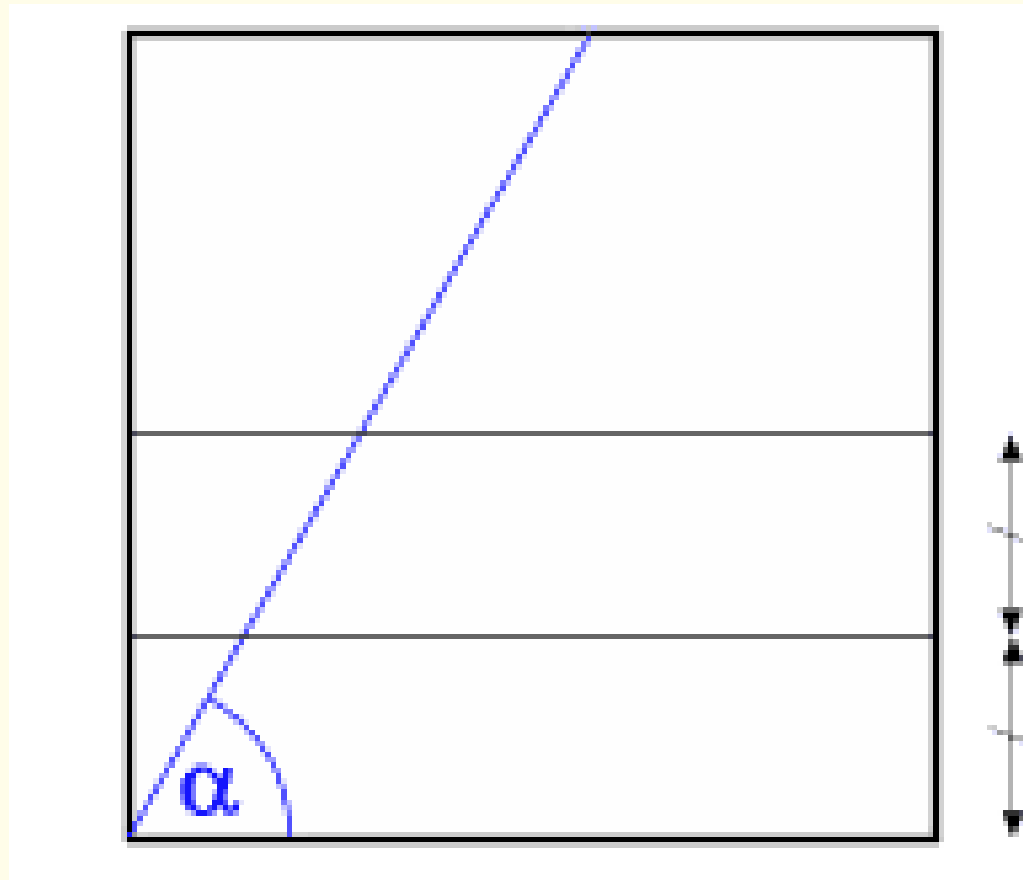


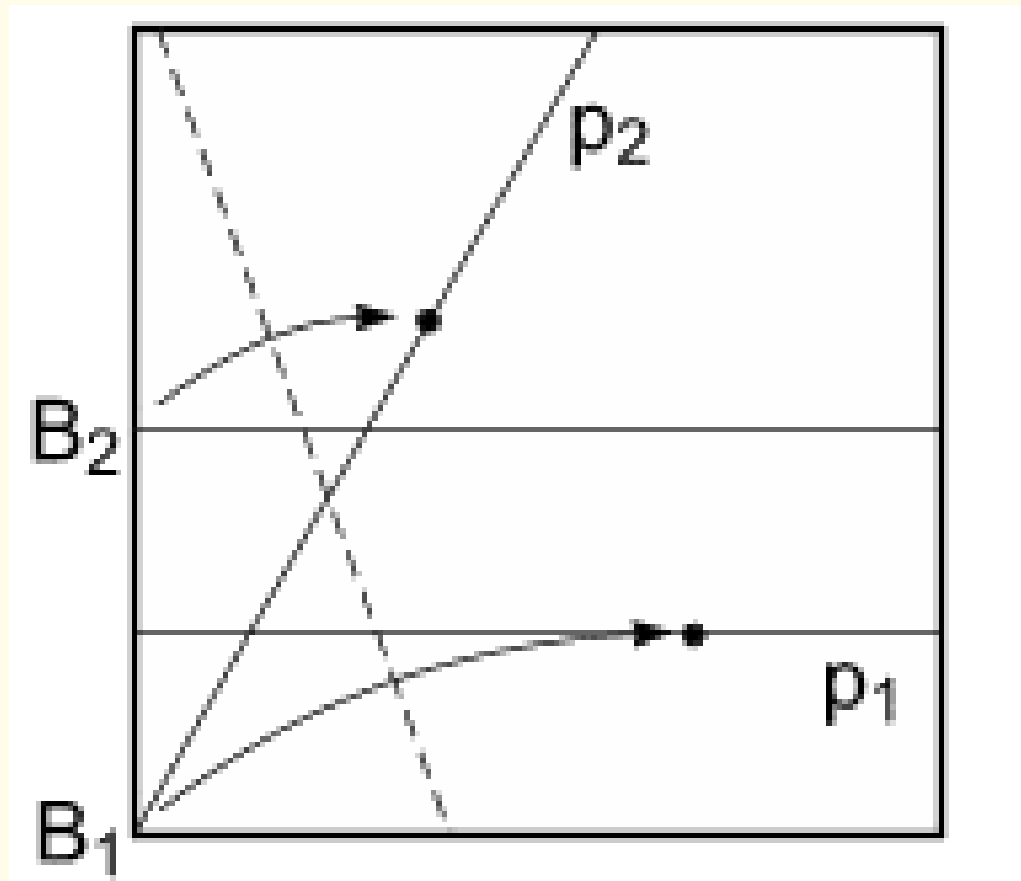
$p_1$  en  $p_2$  samen met een rechte  $l_1$   $\longrightarrow$  een vouw maken door  $p_2$  zo dat  $p_1$  op  $l_1$  terecht komt.

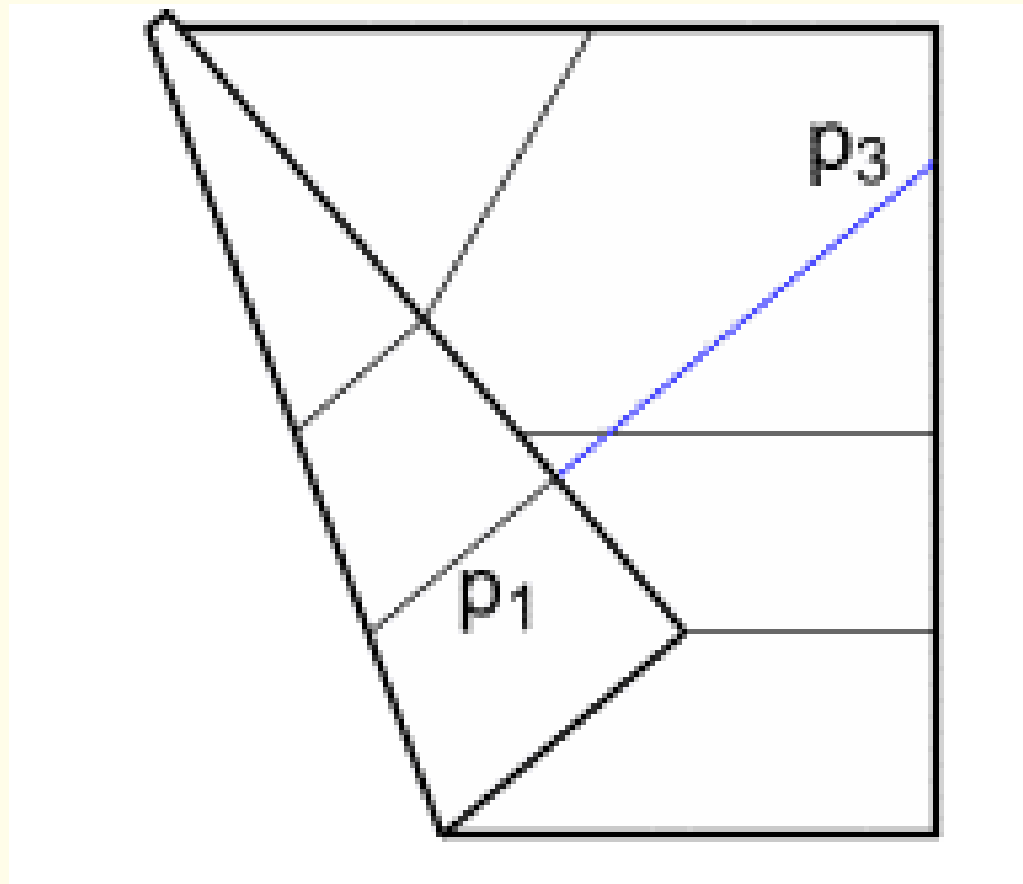


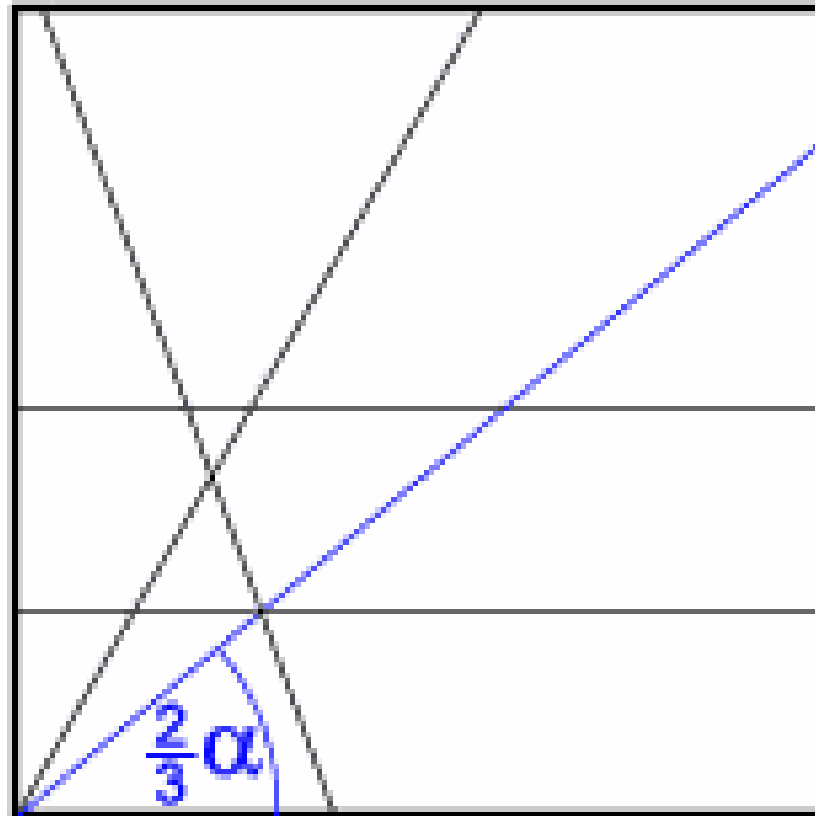
1. Twee punten  $\longrightarrow$  rechte vouwen die ze verbindt.
2.  $p$  en  $q \longrightarrow$  zó plooien dat  $p$  op  $q$  terecht komt.
3. Twee rechten  $L$  en  $M \longrightarrow$  die op elkaar vouwen.
4. Punt  $p$  en een rechte  $L \longrightarrow$  loodlijn op  $L$  door  $p$  construeren.
5.  $p$  en  $q$  samen met een rechte  $L \longrightarrow$  een vouw maken door  $q$  zo dat  $p$  op  $L$  terecht komt.

De meetkunde der spiegelingen!

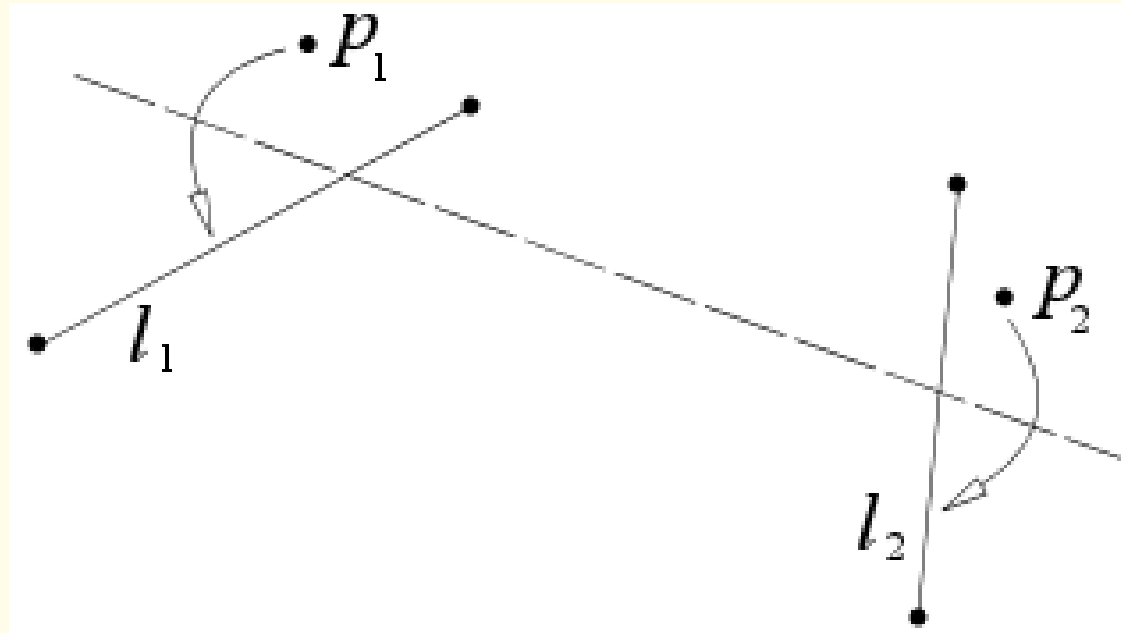








Twee punten  $p_1, p_2$  en twee rechten  $l_1, l_2 \longrightarrow$  een vouw maken zó dat  $p_1$  op  $l_1$  komt en  $p_2$  op  $l_2$ .



1. Twee punten  $\longrightarrow$  rechte vouwen die ze verbindt.
2.  $p$  en  $q \longrightarrow$  zó plooiën dat  $p$  op  $q$  terecht komt.
3. Twee rechten  $L$  en  $M \longrightarrow$  die op elkaar vouwen.
4. Punt  $p$  en een rechte  $L \longrightarrow$  loodlijn op  $L$  door  $p$  construeren.
5.  $p$  en  $q$  samen met een rechte  $L \longrightarrow$  een vouw maken door  $q$  zo dat  $p$  op  $L$  terecht komt.
6. Twee punten  $p, q$  en twee rechten  $L, M \longrightarrow$  een vouw maken zó dat  $p$  op  $L$  komt en  $q$  op  $M$ .

# Plooien is beter dan Euklides!

Door axioma 6 kunnen we derdegraadsvergelijkingen oplossen!

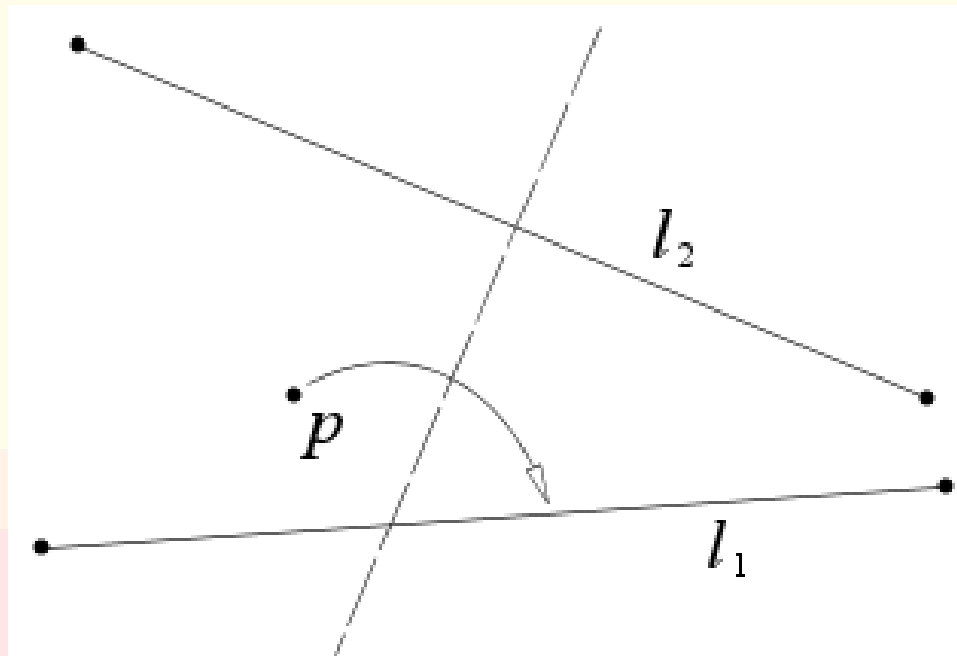
**Stelling.** *Met papierplooien kan je juist evenveel als met passer en geijkte liniaal.*

# Plooien is beter dan Euklides!

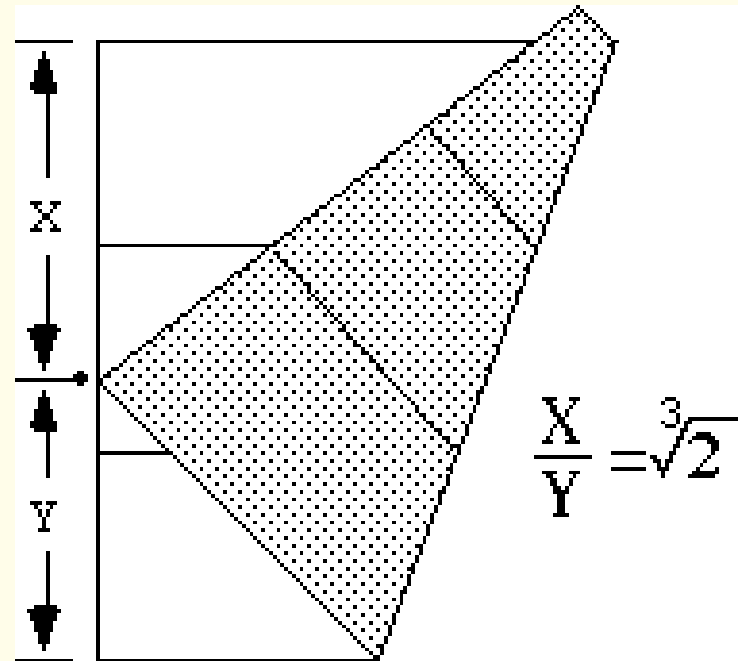
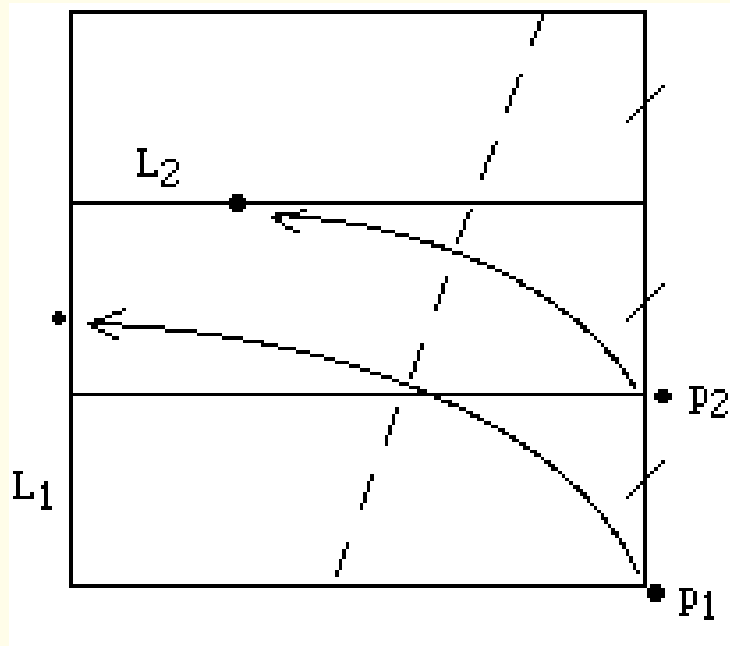
Door axioma 6 kunnen we derdegraadsvergelijkingen oplossen!

**Stelling.** *Met papierplooien kan je juist evenveel als met passer en geijkte liniaal.*

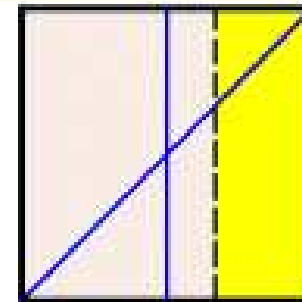
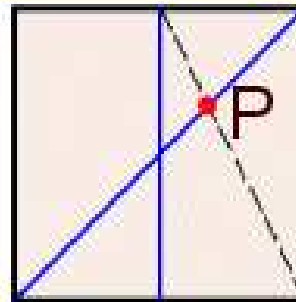
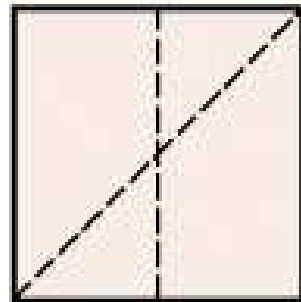
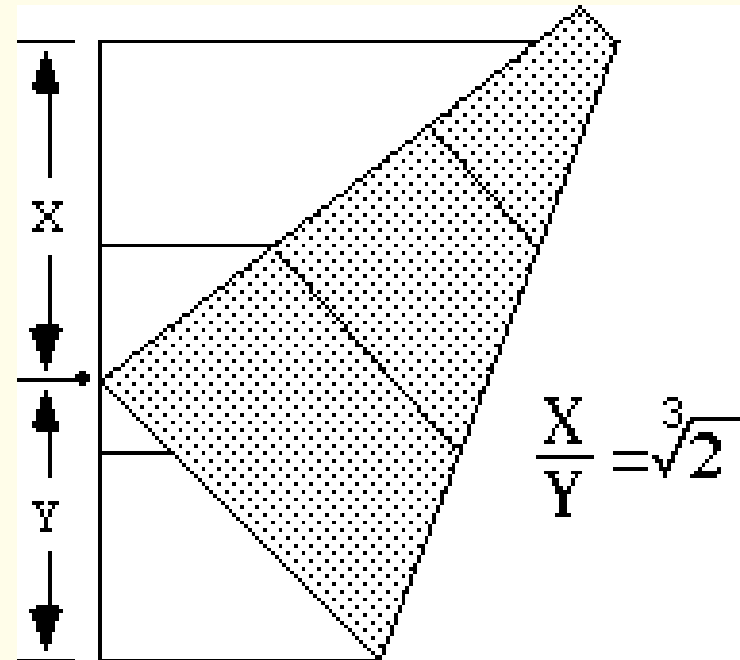
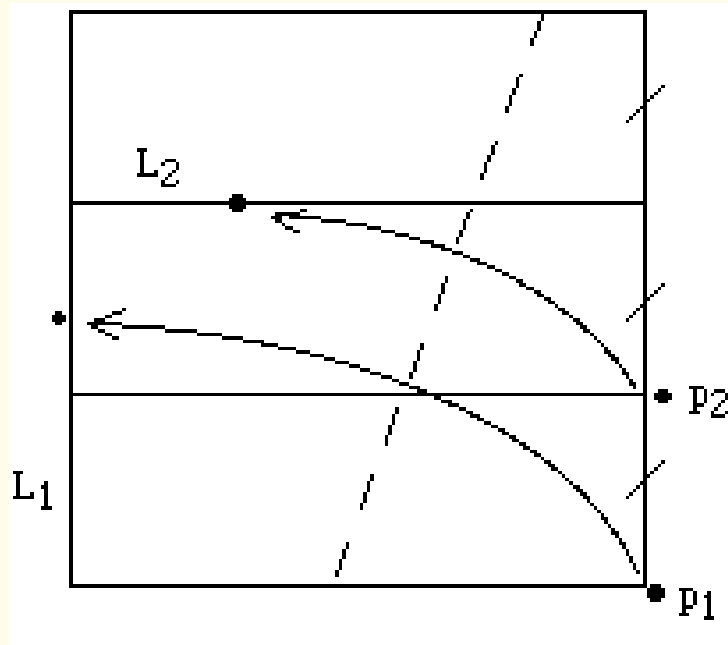
**7de axioma :** Gegeven  $p$  en  $l_1, l_2$ , kunnen we een vouw maken, loodrecht op  $l_2$ , die  $p$  afbeeldt op  $l_1$ .



# Duplicatie van de kubus



# Duplicatie van de kubus



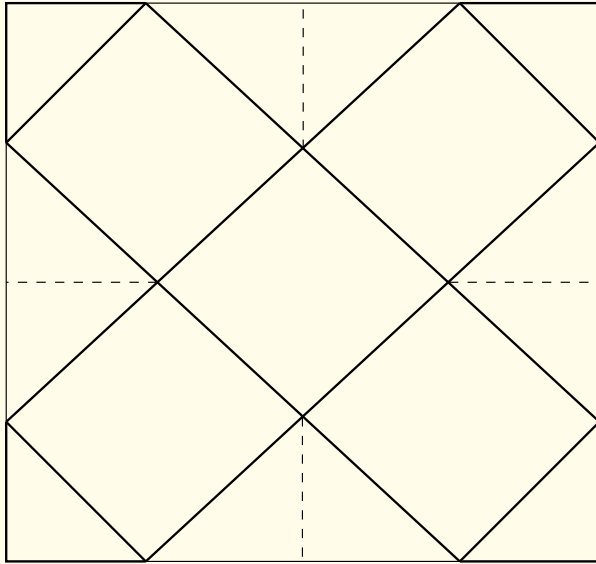


- Geboren op 28 februari 1981 in Canada.
- Werd op 20-jarige leeftijd prof op MIT.
- Uiterst multidisciplinair!
- Meer dan 100 publicaties!
- Werkt veel op gebied van origami en wiskundige veralgemeningen van vouwen.
- Houdt ook van computers.

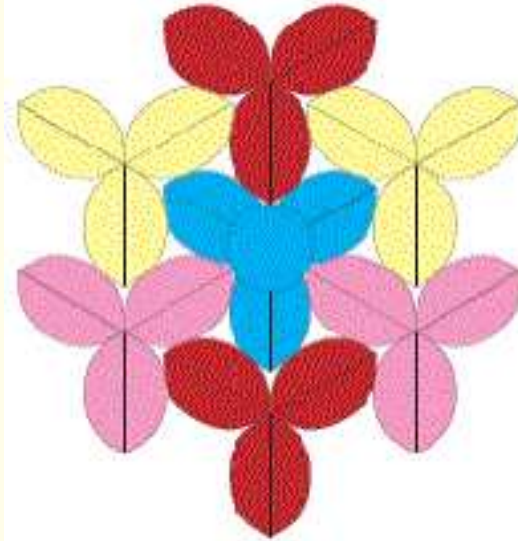
<http://erikdemaine.org>



De kubus:  $2\sqrt{2}z$



Mozartkugel = eenheidssfeer  
 $1.6\pi^2 < 2\pi^2$



En er valt nog veel meer in de plooi!

