

Affiene en Projectieve Meetkunde

Vrije Universiteit Brussel
2de jaar Bachelor Wiskunde

Prof. R. Kieboom
Prof. P. Cara

Inhoudsopgave

Voorwoord	ii
0 Acties van groepen	1
0.1 Groep-actie	1
0.2 Transitieve acties en banen van een actie	2
0.3 De “orbit-stabilizer”-stelling	4
0.4 Oefeningen bij hoofdstuk 0	5
1 Affiene meetkunde	7
1.1 Affiene ruimten	7
1.2 Affiniteiten en collineaties	19
1.3 Stellingen van Thales, Pappus en Desargues	29
1.4 Elementen van synthetische vlakke affiene meetkunde	32
1.5 Oefeningen bij hoofdstuk 1	43
2 Projectieve meetkunde	47
2.1 Inleiding: van affien vlak naar projectief vlak	47
2.2 Projectieve ruimten	50
2.3 Projectiviteiten	56
2.4 Projectieve stellingen van Pappus en Desargues	60
2.5 Dualiteit	64
2.6 Projectieve uitbreiding en affiene beperking	68
2.7 Dubbelverhouding	76
2.8 Projectieve kegelsneden en de stelling van Pascal	85
2.9 Oefeningen bij hoofdstuk 2	89
3 Inleiding tot de incidentiemeetkunde	93
3.1 Voorbeelden en definitie	93
3.2 Residu’s en samenhang	97
3.3 Meetkunden van rang twee	101
3.4 Diagram van een meetkunde	105
3.5 Projectieve en affiene ruimten	107
3.6 Oefeningen bij hoofdstuk 3	113
Referenties en index	118

Voorwoord

Het doel van deze cursus is in eerste instantie het opbouwen van affiene en projectieve meetkunde over een vectorruimte, steunend op de lineaire algebra van het eerste jaar. Dit is de zogenaamde analytische aanpak, waarin, net zoals in de analytische meetkunde gebruik gemaakt wordt van coördinaten. De reden om eerst de affiene meetkunde te behandelen ligt voor de hand: het begrip affiene ruimte ligt zeer dicht bij de bekende notie van vectorruimte, in die zin dat men, ruw gezegd, een affiene ruimte kan beschouwen als een verzameling punten die men als een vectorruimte kan beschouwen zodra men een vast (maar willekeurig) punt als oorsprong kiest. De bijzondere rol van de oorsprong van een vectorruimte verdwijnt dus als men deze vectorruimte bekijkt als affiene ruimte.

De stap van affiene ruimte naar projectieve ruimte is in het reële geval en dimensie twee wel bekend: men voegt punten “op oneindig” bij die klassen van evenwijdige rechten vertegenwoordigen en een rechte “op oneindig” die alle punten op oneindig bevat. Men zal echter hier ook zien dat een beschrijving met behulp van lineaire algebra eenvoudiger en beter is: elk punt kan men voorstellen door een 1-dimensionale deelruimte van een vectorruimte en elke rechte door een 2-dimensionale deelruimte van die vectorruimte. Hiermee verdwijnt het kunstmatige onderscheid tussen de “gewone” punten (van de affiene ruimte) en de bijgevoegde punten “op oneindig”. Omgekeerd kan men dan weer van een projectieve ruimte een affiene ruimte maken door een hypervlak (in dimensie twee een rechte) weg te laten. De gecombineerde studie van affiene en projectieve meetkunde biedt dus heel wat voordelen, en in de analytische aanpak kan men uitgebreid putten uit de opgedane kennis van de lineaire algebra van vorig jaar.

Een andere, meer algemene en abstracte aanpak, is de synthetische of axiomatische benadering van de affiene en projectieve meetkunde waarbij men in dimensie twee bijvoorbeeld uitgaat van een verzameling “punten” en een verzameling “rechten” (waarbij elke rechte een deelverzameling is van de verzameling punten) die voldoen aan zekere “incidentie”-axioma’s over de onderlinge ligging van deze meetkundige objecten. De verbanden tussen beide benaderingen — axiomatische en synthetische — worden in deze cursus ook bestudeerd. De synthetische benadering van de affiene en projectieve meetkunde vormt dan weer de brug tot de moderne incidentie-meetkunde, die een overkoepelend kader biedt waarin beide meetkonden passen. Deze bloeiende tak, die heel wat specialisten in België kent, wordt ingeleid in hoofdstuk 3, geschreven door collega Philippe Cara, een eminent voorbeeld van deze “Belgische school” van de meetkunde. Hij verzamelde ook de talrijke oefeningen in deze tekst en zorgde voor de voortreffelijke lay-out.

Ik eindig dan ook met een welgemeend dankwoord aan mijn co-auteur, en wil daarbij ook Kristel Joossens betrekken, die enkele jaren geleden in tweede kandidatuur Wiskunde het plan

opvatte om als vakantiejob een eerste versie van mijn cursusnota's in te typen.

R. Kieboom
VUB, januari 2006