HOOFDSTUK 3

Inleiding tot de incidentiemeetkunde

Incidentiemeetkunde is een theoretisch kader waarin bijna elke vorm van meetkunde past. Wij zullen onder andere zien hoe affiene en projectieve meetkunde kunnen gezien worden als voorbeelden van *incidentiemeetkunden*. Verder tonen we nog enkele andere mooie incidentiemeetkunden die dikwijls binnen projectieve ruimten leven.

3.1 Voorbeelden en definitie

Voorbeeld 1. Door de studie van affiene vlakken over $\mathbb{K}$-vectorruimten kwamen wij tot de axiomatische definitie 1.4.1 die algemener blijkt te zijn (zie voorbeeld 1.4.1). Deze axiomatische definitie maakt geen gebruik van acties of vectorruimten en is veel eenvoudiger dan definitie 1.1.1 . Toch zijn de axiomatische affiene vlakken niet veel algemener dan de affiene vlakken over een $\mathbb{K}$-vectorruimte want indien we aan definitie 1.4.1 het Pappus-axioma (A6) toevoegen, volgt uit stelling 1.4.8 dat dit vlak isomorf is met een affien vlak over een zekere $\mathbb{K}$-vectorruimte.

We merken op dat de definitie van een axiomatisch affien vlak (en ook van het Pappus-axioma) geformuleerd wordt aan de hand van de zogenaamde *incidentie-eigenschappen* van punten en rechten. We zeggen dat een punt p **incident** is met een rechte R indien $p \in R$. Axioma (A2) bijvoorbeeld, kan men als volgt formuleren:

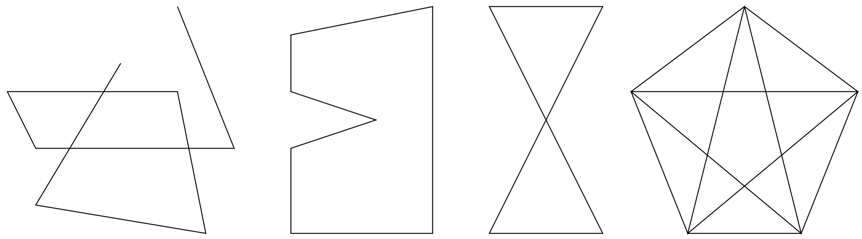
> *Gegeven een rechte R en een punt p niet incident met R, bestaat er steeds een unieke rechte R' zodanig dat p incident is met R' en geen enkel punt tegelijk incident is met R en R'.*

Het lijkt eigenaardig dat wij tot nu toe enkel spraken over axiomatische affiene *vlakken*. Zou men de hogerdimensionale affiene ruimten niet kunnen beschrijven via incidentie-eigenschappen? Misschien worden deze beschrijvingen te ingewikkeld?

Voorbeeld 2. Ook de definitie van axiomatisch projectief vlak (zie oefening 2.1.2.1 op bladzijde 50) is gebaseerd op de notie *incidentie*. We merkten op dat dit axiomastelsel zelfduaal is. Indien men de axioma's formuleert als incidentie-eigenschappen, wordt dit nog duidelijker omdat 'incident zijn' zelfduaal is. Als een punt p op een rechte R ligt, zegt men zowel "p is incident met R" als "R is incident met p". Door te spreken van 'incidentie', verdwijnt het idee dat rechten "groter" zijn dan punten. Alle projectieve objecten worden op dezelfde voet behandeld. Deze manier van denken levert een homogenere beschrijving van de meetkunde en is bijvoorbeeld nuttig bij de beschrijving van dualiteit (zie ook paragraaf 2.5).

Opnieuw kunnen we ons de vraag stellen waarom er enkel gesproken wordt over axiomatische projectieve *vlakken*.

Voorbeeld 3. Een veelhoek in het vlak bestaat uit een aantal punten die verbonden zijn door lijnstukken. Aangezien vele figuren die hieraan voldoen meestal toch niet aanzien worden als veelhoeken, is een meer gedetailleerde definitie nodig. Als je zelf nadenkt over een betere definitie zal je snel merken dat het niet eenvoudig is.



Figuur 3.1: Welke figuren beschouw jij als veelhoeken?

Als enkel incidentie-eigenschappen van belang zijn, kan men volgende definitie gebruiken.

> *Een **veelhoek** is een meetkundig object dat bestaat uit hoekpunten en zijden, zodanig dat elke zijde incident is met twee hoekpunten en elk hoekpunt incident is met twee zijden.*

Merk op dat deze definitie zelfduaal is en dat Euklidische eigenschappen zoals convexiteit en 'regelmatig zijn' verloren gaan. Ze kunnen niet met incidentie beschreven worden. Je kan gemakkelijk bewijzen dat een veelhoek met *n* punten ook *n* zijden moet hebben (??). Zo zijn twee veelhoeken equivalent zodra ze evenveel punten hebben. Ook veronderstellen we niet dat de zijden Euklidische segmenten zijn. Dit laat ons toe ook de '2-hoek' te beschouwen als veelhoek. Later zal deze veelhoek een cruciale rol spelen.

Voorbeeld 4. Een veelvlak bestaat uit hoekpunten, ribben en zijvlakken. Weer kan men de structuur van een veelvlak volledig beschrijven door de incidentierelatie van de verschillende objecten ten opzichte van elkaar te geven. Opnieuw krijgen we de indruk dat Euklidische begrippen zoals 'regelmatig zijn' verloren gaan. Zulke symmetrie-eigenschappen kunnen beschreven worden aan de hand van *automorfismen*. Dit zijn afbeeldingen die incidentie tussen objecten bewaren. We gaan hier echter niet verder op in.

We leren uit deze voorbeelden dat de meest fundamentele eigenschappen van meetkunden elegant kunnen beschreven worden aan de hand van incidentie-eigenschappen. Fijnere gegevens kunnen niet altijd beschreven worden met het begrip *incidentie* alleen. We zullen tonen dat men met incidentie alleen toch al zeer ver komt en zeer algemeen kan te werk gaan.

Definitie 1. *Een **incidentiestructuur** is een viertal* $(X,*,I,t)$ *waarbij*

- X *een verzameling is. De elementen van* X *noemt men **elementen** van de incidentiestructuur;*

- $*$ *een relatie is op X die symmetrisch en reflexief is. Men noemt ze de* ***incidentierelatie*** *van de incidentiestructuur;*

- *I is een verzameling van* ***types****. Deze geeft aan welke de verschillende soorten objecten zijn die in de incidentiestructuur voorkomen;*

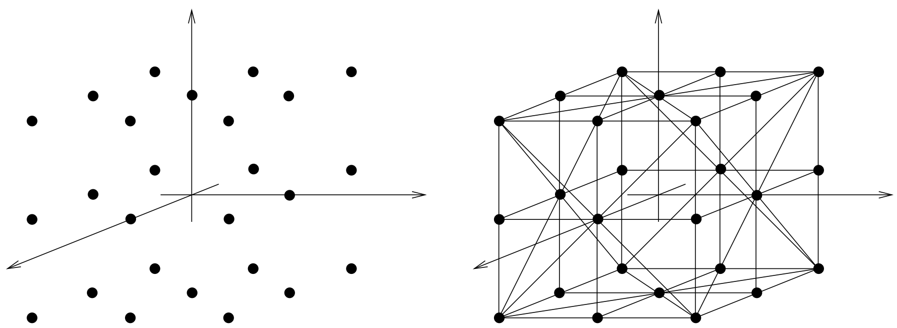
- *t is een surjectieve afbeelding $X \longrightarrow I$ die voor elk element van de incidentiestructuur het type aangeeft. Men noemt ze de* ***typefunctie****.*

Het aantal types in een incidentiestructuur noemt men de ***rang*** *van de incidentiestructuur. De rang is dus $\#I$. Voor een verzameling $A \subset X$ van elementen noemt men $t(A)$ het* ***type*** *van A.*

Voorbeeld 5. De kubus is een voorbeeld van een incidentiestructuur van rang drie. Deze heeft 26 elementen : 8 hoekpunten, 12 ribben en 6 zijvlakken. De incidentierelatie is beschreven aan de hand van de inclusie- of 'behoort tot'-relatie: twee elementen x en y van de incidentiestructuur zijn incident als en slechts als hetzij $x \in y$ of $x \ni y$ (als één van beide een hoekpunt is) hetzij $x \subset y$ of $x \supset y$. De typeverzameling is $\{$hoekpunt, ribbe, zijvlak$\}$ en de typefunctie is duidelijk.

Beschrijf zelf nauwkeurig voorbeelden 1 tot en met 4 als incidentiestructuur. Hoewel we (nog) geen axiomatische beschrijving van algemene projectieve ruimten kennen, zijn dit ook voorbeelden van incidentiestructuren. Indien de ruimte dimensie n heeft, kiezen we als typeverzameling $I = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ en als elementen van type $i \in I$ nemen we alle i-dimensionale deelruimten. Incidentie is gegeven door de inclusie van deelruimten.

Opmerking 1. Hoger (in voorbeeld 2) zagen we dat incidentiemeetkunde tracht alle elementen van een structuur op gelijke voet te behandelen. Voor de kubus kan men zulke voorstelling construeren in de ruimte E^3. Zij $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ een orthonormale basis in E^3. Dan kunnen we een kubus maken door als hoekpunten alle combinaties $\pm\mathbf{e}_1 \pm \mathbf{e}_2 \pm \mathbf{e}_3$ te nemen. Nu gaan we met ribben en zijvlakken ook vectoren associëren: hun zwaartepunten. Zo krijgen we dus 26 vectoren van E^3: de 8 vectoren van de hoekpunten, 12 vectoren van de vorm $\pm\mathbf{e}_i \pm \mathbf{e}_j$ en 6 vectoren van de vorm $\pm\mathbf{e}_i$. Als we de kubus nu vergeten, hebben we nog 26 punten van de Euklidische ruimte over. We zien geen verschil meer tussen hoekpunten, ribben en zijvlakken. De incidentie kunnen we ook Euklidisch vertolken: telkens twee elementen incident zijn, verbinden we de overeenkomstige Euklidische punten $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ door middel van het segment $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$.



Figuur 3.2: Voorstelling van de kubus met 26 vectoren van E^3

De typeverzameling van een incidentiestructuur bevat eigenlijk alleen maar 'namen' die de meetkundige structuur zelf niet beïnvloeden. Zo kunnen we voor onze kubus nu als typeverzameling $\{\sqrt{3}, \sqrt{2}, 1\}$ kiezen. Welke typefunctie kunnen we dan gebruiken?

Opmerking 2. In vorige opmerking zien we dat incidente elementen verbonden worden door een lijnstuk. Algemeen heeft men dat de verzameling elementen van een incidentiestructuur samen met de incidentierelatie een *graf* vormt. Dit zal ons toelaten de graffentheorie te gebruiken bij de studie van incidentiestructuren. We spreken van de **incidentiegraf** van een incidentiestructuur.

Definitie 2. *Een verzameling paarsgewijs incidente elementen van een incidentiestructuur heet een **vlag**. Een **kamer** is een vlag waarin elk type vertegenwoordigd is.*

Merk op dat de lege verzameling ook een vlag is en dat elke deelverzameling van een vlag opnieuw een vlag is.

In de incidentiestructuren die we tot nu toe hebben gezien, zijn twee verschillende elementen van hetzelfde type nooit incident en zijn de maximale vlaggen steeds kamers. We gebruiken dit als basis voor de definitie van incidentiemeetkunde.

Definitie 3. *Een **incidentiemeetkunde** (of kortweg **meetkunde**) is een incidentiestructuur waarin*

- *twee verschillende elementen van hetzelfde type nooit incident zijn;*
- *elke niet-maximale vlag omvat is in minstens twee kamers.*

Als gevolg van deze definitie zijn de maximale vlaggen steeds kamers en kan elke niet-maximale vlag uitgebreid worden tot een kamer op minstens twee manieren.

Opmerking 3.

1. Sommige auteurs gebruiken een fijnere woordenschat: een incidentiestructuur waar twee verschillende elementen van hetzelfde type nooit incident zijn, noemt men een 'premeetkunde'; een premeetkunde waar elke maximale vlag een kamer is noemen *zij* een 'meetkunde' en wanneer *wij* spreken van een meetkunde, hebben zij het over een 'ferme meetkunde'.

2. We merkten op dat een incidentiestructuur aanleiding geeft tot een graf. Voor een meetkunde kunnen we meer zeggen: we krijgen een zogenaamde **multipartiete graf**. Dit is een graf $(X, *)$ waar er een partitie $(X_i)_{i\in I}$ van de knopenverzameling X bestaat zodat twee knopen van eenzelfde deel X_i nooit verbonden zijn door een boog. Bovendien is elke complete deelgraf met minder dan $\#I$ knopen te vervolledigen tot een complete deelgraf met $\#I$ knopen op minstens twee manieren.

Het was HILBERT die als eerste sprak over de incidentiestructuur van een meetkunde. In zijn werk *Grundlagen der Geometrie* gaf hij een axiomatische beschrijving van de Euklidische meetkunde. Hij splitste zijn axioma's op in vijf groepjes: 'samenhang' (=incidentie), 'orde', 'het parallellenpostulaat' (zie definitie 1.4.1), 'congruentie' (=afstand) en 'continuïteit' (=eigenschap van Archimedes). Ook bestudeerde hij de (algemenere) meetkunden die men krijgt door één of meerdere groepjes weg te laten. Sinds HILBERT kan men zeggen dat incidentie de fundering is van alle meetkunde.

Incidentiemeetkunde had een grote invloed op de ontwikkeling van de affiene en projectieve meetkunde in het begin van vorige eeuw. Ook toegepaste statistiek en combinatoriek konden gebruik maken van abstracte meetkundige begrippen. De incidentiemeetkunde nam een hoge vlucht in de jaren ’50 toen TITS, die in Brussel studeerde, meetkundige ideeën toepaste in de groepentheorie, meer bepaald in de veelgebruikte theorie der Liegroepen.

De theorie der meetkunden en diagrammen die wij hier uiteenzetten, werd vooral ontwikkeld door BUEKENHOUT. Hij studeerde in Brussel en gaf tot enkele jaren terug een cursus aan de VUB. Aan onze zusteruniversiteit geeft hij nog steeds les.

3.2 Residu’s en samenhang

Definitie 1. *Zij $\Gamma = (X,*,I,t)$ een meetkunde en $F \subset X$ een vlag. Het* ***residu*** *van F in Γ is de meetkunde $\Gamma_F = (X_F,*_F,I_F,t_F)$* geïnduceerd *op de verzameling X_F die bestaat uit alle elementen van $X \setminus F$ die incident zijn met alle elementen van F. Formeel hebben we dus*

- $X_F = \{x \in X \setminus F \mid \forall f \in F : x * f\}$;
- $*_F = * \cap (X_F \times X_F)$;
- $I_F = I \setminus t(F)$;
- $t_F = t|_{X_F}^{I_F}$.

Ga zelf na dat Γ_F een meetkunde is. Het residu van de lege vlag in Γ is Γ zelf.

Het residu van een zijvlak van de kubus bevat 4 hoekpunten en 4 ribben. Elke ribbe is incident met twee hoekpunten en elk hoekpunt ligt op twee ribben. Dit residu is dus een meetkunde van rang 2 waarin elk element incident is met juist twee andere elementen. Volgens voorbeeld 3.1.3 noemen we dit een *veelhoek*. Aangezien er hier vier elementen zijn van elk type, spreken we van een **4-hoek**. Beschrijf zelf het residu van een ribbe in de kubus. Toon aan dat het residu van een hoekpunt een 3-hoek is.

Wat is het residu van een vlak in een projectieve ruimte van dimensie drie? Is er een verband met het residu van een punt in een affiene ruimte van dimensie drie?

Lemma 1. *Zij Γ een meetkunde en F een vlag in Γ. Een verzameling A bestaande uit elementen van Γ_F is een vlag in Γ_F als en slechts als $F \cup A$ een vlag is in Γ. Bovendien geldt voor een vlag A in Γ_F steeds $(\Gamma_F)_A = \Gamma_{F\cup A}$.*

Bewijs. Laat ons vertrekken met een vlag A in Γ_F. Dan geldt $\forall a,b \in A : a * b$ en bovendien $\forall a \in A$, $\forall f \in F : a * f$, zodat $F \cup A$ bestaat uit paarsgewijs incidente elementen van Γ. Een verzameling $A \subset X_F$ zodanig dat $F \cup A$ een vlag is, is duidelijk een vlag.

Voor een vlag A van Γ_F geldt

$$
\begin{aligned}
(X_F)_A &= \{x \in X_F \setminus A \mid \forall a \in A : x * a\} \\
&= \{x \in X \setminus (F \cup A) \mid \forall f \in F : x * f \text{ en } \forall a \in A : x * a\} \\
&= \{x \in X \setminus (F \cup A) \mid \forall y \in F \cup A : x * y\} \\
&= X_{F\cup A}
\end{aligned}
$$

Daar een residu volledig bepaald is door zijn verzameling elementen, volgt het lemma. $\square$

Aangezien een meetkunde ook een graf is, kunnen we ons interesseren aan de samenhang van die graf. Toch blijkt een ander begrip belangrijker te zijn voor de meetkunde.

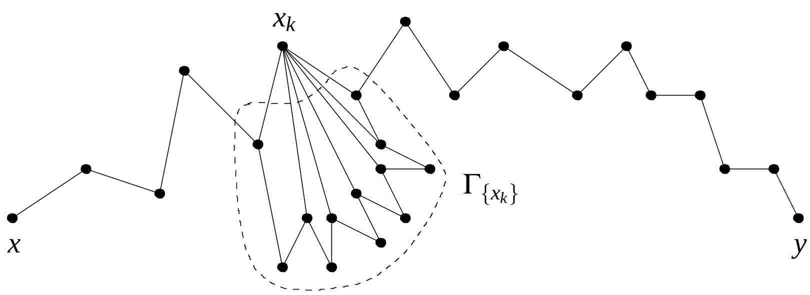
Definitie 2. *Een meetkunde heet* ***residueel samenhangend*** *indien de incidentiegraf van elk residu van rang minstens* 2 *samenhangend is.*

Merk op dat een meetkunde van rang 1 nooit een samenhangende incidentiegraf kan hebben (??). Een residueel samenhangende meetkunde van rang minstens 2 heeft steeds een samenhangende incidentiegraf maar niet omgekeerd (??). Uit lemma 1 volgt dat elk residu in een residueel samenhangende meetkunde ook residueel samenhangend is.

Lemma 2. *Zij* Γ *een residueel samenhangende meetkunde* van eindige rang. *Voor elke twee verschillende types* i *en* j *en elke twee willekeurige elementen* x *en* y *van* Γ, *bestaat er in de incidentiegraf van* Γ *een weg van* x *naar* y *waarvan alle elementen, verschillend van* x *en* y, *type* i *of* j *hebben.*

Bewijs. Indien Γ rang 1 heeft, zijn er geen twee verschillende types en geldt dus het lemma. In rang 2 volgt de bewering uit de samenhang van de incidentiegraf.

Voor een inductiebewijs veronderstellen we dat de rang r van Γ minstens 3 is. Vermits de incidentiegraf van Γ samenhangend is, bestaat er een weg $x = x_0 * x_1 * \cdots * x_n = y$ van x naar y. Zij $k \geqslant 1$ de kleinste index met $t(x_k) \notin \{i, j\}$. Als $k = n$, is er niets te bewijzen. Anders zitten de elementen x_{k-1} en x_{k+1} in het residu $\Gamma_{\{x_k\}}$. Dit is een meetkunde van rang $r-1$ waarvan de typeverzameling i en j bevat. Wegens de inductiehypothese hebben we in $\Gamma_{\{x_k\}}$ een weg van x_{k-1} tot x_{k+1} met enkel elementen van types i en j. Indien we deze weg tussen deze twee

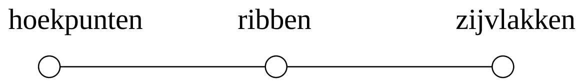


elementen in onze oorspronkelijke weg zetten in plaats van de weg langs x_k (zie figuur), zijn we zeker dat in de nieuwe weg elementen van type i en j staan tot x_{k+1}. Indien er nog een $x_{k'}$ bestaat met $t(x_{k'}) \notin \{i, j\}$ kunnen we voorgaande constructie herhalen tot uiteindelijk alle elementen van de (misschien veel langer geworden) weg tussen x en y van type i of j zijn. $\square$

Definitie 3. *Een meetkunde van rang twee waarin alle elementen van het ene type incident zijn met alle elementen van het andere type, heet een* **veralgemeende digon** *(of veralgemeende* 2*-hoek).*

Een 2-hoek zoals gedefinieerd in voorbeeld 3.1.3 is een veralgemeende digon.

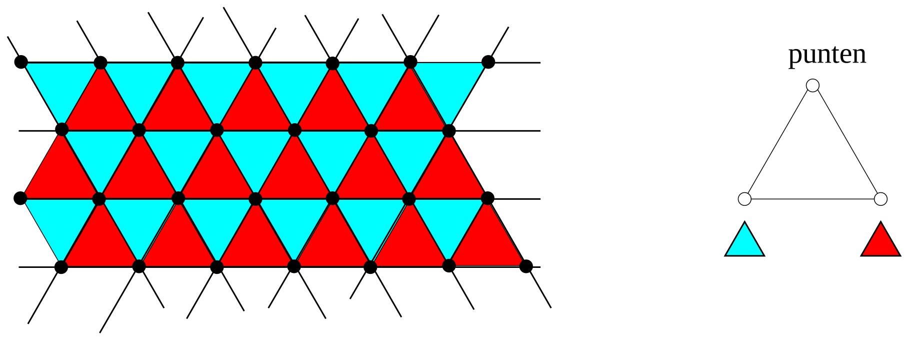
Definitie 4. *Zij* $\Gamma = (X, *, I, t)$ *een meetkunde. Het* **digonaal diagram** *van* Γ *is de graf met als knopenverzameling* I *en als bogen de paren* $\{i, j\}$ *waarvoor er een vlag* F *van type* $I \setminus \{i, j\}$ *bestaat zodanig dat het residu* Γ_F geen *veralgemeende digon is.*



Figuur 3.3: Digonaal diagram van de kubus

Het digonaal diagram van de kubus staat in figuur 3.3. Leg dit uit!

Voorbeeld 1. Beschouw een betegeling van het vlak E^2 met rode en blauwe gelijkzijdige driehoekige tegels. Hiermee maken we een meetkunde van rang 3. De drie soorten elementen zijn de punten waar 6 tegels samenkomen, de rode driehoeken en de blauwe driehoeken. Incidentie is voor driehoeken hetzelfde als 'een zijde gemeenschappelijk hebben' en een driehoek en een punt zijn incident indien het punt tot de driehoek behoort. Dit is een oneindige meetkunde (heeft oneindig veel elementen) waarvan het diagram een driehoek is.



Figuur 3.4: De betegeling met rode en blauwe driehoeken

Ga na dat het digonaal diagram van de kubus, van een driedimensionale affiene ruimte en van een driedimensionale projectieve ruimte alledrie dezelfde zijn. Dit toont dat men aan de hand van het digonaal diagram het verschil tussen deze meetkunden niet kan zien. Daarom zullen we later het begrip diagram verfijnen.

Als we in een meetkunde Γ met digonaal diagram $(I,\sim)$ een residu Γ_F nemen, kunnen we hiervan ook het diagram $(I_F,\sim_F)$ bepalen. In de voorbeelden die we tot nu toe gezien hebben geldt dat de adjacentierelatie $\sim_F$ juist de geïnduceerde relatie $\sim\cap(I_F\times I_F)$ is. Algemeen is dit echter niet waar (??). Aangezien de meeste voorbeelden *wel* deze eigenschap hebben, zullen we een bijkomend axioma opleggen aan onze meetkunden.

AXIOMA: Vanaf nu veronderstellen we dat wanneer er in een meetkunde Γ een vlag F van type $I\setminus\{i,j\}$ bestaat zodanig dat Γ_F een veralgemeende digon is, *alle* residu's van type $\{i,j\}$ veralgemeende digons zijn.

Eigenschap 1. *Het digonaal diagram van een residu Γ_F in een meetkunde Γ met digonaal diagram $(I,\sim)$ is de graf $(I_F,\sim_F)$ waarbij $\sim_F=\sim\cap(I_F\times I_F)$.*

Bewijs. Pas lemma 1 toe. □

Indien een meetkunde een niet-samenhangend digonaal diagram heeft, weten we dat telkens we twee types i en j kiezen in verschillende samenhangscomponenten, alle residu's van type $\{i,j\}$ veralgemeende digons zijn. Anders gezegd zijn alle elementen van type *i in die residu's* incident met alle elementen van type j. Indien de meetkunde residueel samenhangend is, kunnen we meer zeggen.

Stelling 1 ("Directe som stelling").
Zij $\Gamma = (X,*,I,t)$ een residueel samenhangende meetkunde en zij i en j twee types in verschillende samenhangscomponenten van het digonaal diagram van Γ. Dan zijn alle *elementen van type i incident met alle elementen van type j.*

Bewijs. We geven een bewijs per inductie op de rang r van Γ. Voor $r = 2$ is er niets te bewijzen omdat de meetkunde dan een veralgemeende digon is.

Voor $r \geqslant 3$ kunnen we een $k \in I \setminus \{i,j\}$ vinden zodanig dat k niet behoort tot de samenhangscomponent van i (als dit niet gaat, verwissel je de namen i en j). Zij x en y elementen met $t(x) = i$ en $t(y) = j$. Door lemma 2 bestaat er een weg van x tot y met enkel elementen van type i of j. We tonen nu dat we die weg kunnen inkorten.

Veronderstel eerst dat de weg van x naar y lengte 3 heeft. Er zijn dus twee elementen u en v respectievelijk van type j en i met $x * u * v * y$. Vermits $\Gamma_{\{v\}}$ ook residueel samenhangend is, bestaat er een weg van u naar y met enkel elementen van type j en k. Zij z het element van type k dat in die weg incident is met u. Doordat i en k in verschillende samenhangscomponenten van het digonaal diagram van $\Gamma_{\{u\}}$ zitten en dit residu rang $r-1$ heeft, kunnen we besluiten dat $x * z$. Nu is ook $\Gamma_{\{z\}}$ van rang $r-1$ en zitten i en j in verschillende samenhangscomponenten van het digonaal diagram van dit residu. Uit de inductiehypothese volgt zo dat $x * z'$, waarbij $u * z * z' * z''$ het begin is van de weg tussen u en y in $\Gamma_{\{v\}}$. In het residu $\Gamma_{\{z'\}}$ passen we dezelfde techniek toe om $x * z''$ te krijgen. Dit herhalen we tot we aan het einde van de weg in $\Gamma_{\{v\}}$ komen en uiteindelijk $x * y$ overhouden.

Eigenlijk hebben we aangetoond dat een weg $x * u * v * y$ van type $\{i,j\}$ in de incidentiegraf van Γ *steeds* kan herleid worden tot $x * y$. Als de oorspronkelijke weg van x naar y nu langer is dan 3, maken we de weg korter door het vorige herhaaldelijk toe te passen op stukjes van lengte 3 in de weg van x tot y. ☐

Definitie 5. *Zij $\Gamma_1 = (X_1, *_1, I_1, t_1)$ en $\Gamma_2 = (X_2, *_2, I_2, t_2)$ meetkunden. De* ***directe som*** *van deze twee meetkunden is de nieuwe meetkunde $\Gamma_1 \oplus \Gamma_2 = (X,*,I,t)$ met volgende kenmerken.*

- $X = X_1 \sqcup X_2$ *(disjuncte unie);*
- $* = (*_1 \sqcup *_2) \sqcup \{(x_1,x_2) \mid x_1 \in X_1 \text{ en } x_2 \in X_2\}$;
- $I = I_1 \sqcup I_2$;
- $t = t_1 \sqcup t_2$.

We zien dus dat in de directe som $\Gamma_1 \oplus \Gamma_2$ alle elementen van Γ_1 incident zijn met alle elementen van Γ_2. Hierdoor (??) zal het digonaal diagram van $\Gamma_1 \oplus \Gamma_2$ bestaan uit de (directe) som van de digonale diagrammen van Γ_1 en Γ_2. Dit wil zeggen dat het digonaal diagram van $\Gamma_1 \oplus \Gamma_2$ ontstaat door de diagrammen van Γ_1 en Γ_2 naast elkaar te zetten, zonder bogen tussen elementen van I_1 en I_2.

De directe som stelling zegt dat voor een residueel samenhangende meetkunde ook het omgekeerde geldt: als het digonaal diagram de (directe) som is van deeldiagrammen, is de meetkunde ook de directe som van de deelmeetkunden die overeenkomen met de deeldiagrammen. Om dit preciezer te formuleren, voeren we een nieuw begrip in.

Definitie 6. *Zij* $\Gamma = (X,*,I,t)$ *een meetkunde en* $J \subset I$*. De* ***truncatie*** *van* Γ *tot* J *is de meetkunde* $\Gamma^J = (X^J,*^J,I^J,t^J)$ *met*

- $X^J = t^{-1}(J)$*;*
- $*^J = * \cap (X^J \times X^J)$*;*
- $I^J = J$*;*
- $t^J = t|_{X^J}^J$.

Nu herformuleren we de directe som stelling.

> *Een residueel samenhangende meetkunde* Γ *waarvan het digonaal diagram de (directe) som is van de graffen* $(I_1,\sim_1)$, $(I_2,\sim_2)$,...,$(I_k,\sim_k)$*, is de directe som van de truncaties* Γ^{I_1}, Γ^{I_2},..., Γ^{I_k}.

Daarom beperkt men zich in de incidentiemeetkunde dikwijls tot de studie van meetkunden waarvan het diagram samenhangend is. Dit zijn dus meetkunden die niet kunnen geschreven worden als directe som van kleinere meetkunden. Deze manier van werken vindt men terug in vele takken van de wiskunde, waar men de objecten die geen directe som zijn 'irreduciebel' of 'enkelvoudig' noemt.

3.3 Meetkunden van rang twee

Hoger werd opgemerkt dat het digonaal diagram niet toelaat het verschil te zien tussen een affiene en een projectieve ruimte. Daarom is het wenselijk een meer gedetailleerde beschrijving van meetkunden te bedenken. Vermits het digonaal diagram van een meetkunde bepaald wordt aan de hand van de residu's van rang twee, zullen we nu een paragraaf wijden aan de grondige studie van meetkunden van rang twee.

We spreken af dat de types van de rang twee meetkunden in deze paragraaf steeds 'punt' en 'rechte' zijn. Dit laat ons toe meetkundige uitdrukkingen te gebruiken zoals "het punt q ligt op elke rechte". De verzameling van alle punten en alle rechten van de meetkunde noteren we respectievelijk $\mathscr{P}$ en $\mathscr{L}$.

Aangezien elke meetkunde van rang twee een bipartiete incidentiegraf oplevert, kunnen we die graf gebruiken om de meetkunde te beschrijven.

Definitie 1. *Zij* Γ *een meetkunde van rang twee. Vermits twee elementen van hetzelfde type in* Γ *nooit incident zijn, zal een gesloten weg (d.i. een weg die eindigt in zijn beginknoop) steeds even lengte hebben. De helft van de lengte van de kortste niet-triviale gesloten weg in de incidentiegraf van* Γ *heet de* ***gonaliteit*** *van* Γ.

Als je een punt q *van* Γ *neemt, kan je in de incidentiegraf kijken wat de grootst mogelijke afstand is die je kan afleggen vanuit* q*. Noteer deze afstand* $\delta(q)$*. De* ***punt-diameter*** *van* Γ *is* *het maximum van de afstanden $\delta(q)$ voor $q \in \mathscr{P}$. Analoog kunnen we vertrekken van een rechte R en de maximale afstand $\delta(R)$ bekijken voor elke rechte $R \in \mathscr{L}$. Het maximum van alle $\delta(R)$ noemen we de* ***rechte-diameter*** *van Γ.*

*Een rang twee meetkunde met gonaliteit g, punt-diameter d_p en rechte-diameter d_l heet een (g, d_p, d_l)-**gon**.*

In graffen is het de gewoonte te stellen dat de afstand tussen twee knopen u en v oneindig is indien er geen weg bestaat tussen u en v. Deze afspraak heeft als gevolg dat eindige diameters (residuele) samenhang impliceren. Merk op dat de gonaliteit en diameters van een meetkunde oneindig kunnen zijn (zie oefening 2).

Volgende lemma's zijn eenvoudig te bewijzen.

Lemma 1. *Een residueel samenhangende meetkunde van rang twee is een veralgemeende digon als en slechts als het een $(2,2,2)$-gon is.*

Lemma 2. *In een (g, d_p, d_l)-gon geldt steeds dat*

$$2 \leqslant g \leqslant d_p \leqslant d_l \leqslant d_p + 1$$

of

$$2 \leqslant g \leqslant d_l \leqslant d_p \leqslant d_l + 1$$

Ga zelf na dat een (axiomatisch) affien vlak een $(3,3,4)$-gon is (zie oefening 3.6.3). Een veelhoek met n zijden (zie voorbeeld 3.1.3) is een (n,n,n)-gon. Controleer dat een (axiomatisch) projectief vlak steeds een $(3,3,3)$-gon is. Als we de meetkunde van de kubus trunceren tot de types 'hoekpunt' en 'ribbe', krijgen we een $(4,6,6)$-gon (??). Wat gebeurt er als we andere truncaties nemen?

Weer zien we dat onze voorbeelden een bijkomende regulariteitseigenschap hebben: de maximale afstand die je vanuit een punt kan afleggen, is voor alle punten dezelfde en de maximale afstand die je vanuit een rechte kan afleggen is steeds gelijk aan de rechte-diameter. We nemen deze eigenschap als axioma.

> **AXIOMA:** Vanaf nu veronderstellen we dat er in een meetkunde van rang twee voor *elk* punt (resp. elke rechte) steeds een element bestaat op afstand d_p (resp. d_l) in de incidentiegraf.

Definitie 2. *Een (g, d_p, d_l)-gon waarvoor geldt $g = d_p = d_l$ heet een **veralgemeende** g**-gon** of **veralgemeende** g**-hoek**. Voorbeelden hiervan zijn de veelhoeken gedefinieerd in voorbeeld 3.1.3 . Deze g-gons, met op elke rechte juist twee punten en door elk punt juist twee rechten, noemen we soms ook **gewone** g**-gons** of **gewone** g**-hoeken**.*

Ook zien we dikwijls dat elke rechte steeds incident is met evenveel punten en dat elk punt behoort tot hetzelfde aantal rechten (zie bijvoorbeeld oefening 2.9.3 of de definitie van gewone g-gon). Men veronderstelt dikwijls dat deze eigenschappen steeds voldaan zijn.

> **AXIOMA:** We veronderstellen dat elke rechte incident is met evenveel punten en elk punt behoort tot evenveel rechten.

Definitie 3. *Voor een meetkunde van rang twee noemen we het aantal punten (resp. rechten) incident met een rechte (resp. punt), verminderd met 1, de* **punt-orde** *(resp.* **rechte-orde***) van de meetkunde. We noteren ze respectievelijk s_p en s_l. Formeel hebben we dus*

$$\forall\, R \in \mathscr{L} : \#\{p \in \mathscr{P} \mid p * R\} = s_p + 1$$

en

$$\forall\, p \in \mathscr{P} : \#\{R \in \mathscr{L} \mid p * R\} = s_l + 1$$

Uit oefening 2.9.3 weten we dat de punt- en rechte-orden van een (axiomatisch) projectief vlak dezelfde zijn. Is dit ook waar voor eindige affiene vlakken? Bepaal de orden van de rang twee truncaties van de kubus.

Hoger hebben we gezien dat een (axiomatisch) projectief vlak steeds een veralgemeende 3-hoek is. Het omgekeerde is bijna waar.

Stelling 1. *Een veralgemeende* 3*-hoek is steeds een axiomatisch projectief vlak of een gewone* 3*-hoek.*

Bewijs. Veronderstel dat we een veralgemeende 3-hoek Γ hebben die geen gewone 3-hoek is. Beschouw twee verschillende punten. Vermits de punt-diameter van Γ gelijk is aan 3, moeten deze punten op afstand 2 van elkaar liggen in de incidentiegraf. Dit betekent dat er een rechte incident is met beide. Er kan zo geen tweede rechte bestaan omdat de gonaliteit 3 bedraagt. Aan de hand van de rechte-diameter bewijzen we analoog dat twee verschillende rechten elkaar steeds snijden in een uniek punt.

Nu bewijzen we dat het aantal rechten door een punt hetzelfde is als het aantal punten op een rechte. Onderstel dat de punt-orde s_p bedraagt. Beschouw een punt p. Dan bestaat er een rechte R die p niet bevat omdat de punt-diameter van Γ gelijk is aan 3. Elke rechte door p snijdt R in een punt. Twee verschillende rechten door p snijden R in verschillende punten omdat de gonaliteit 3 is, zodat we $s_p \geqslant s_l$ hebben. Vermits elk punt van R een rechte door p definieert, hebben we $s_p = s_l$.

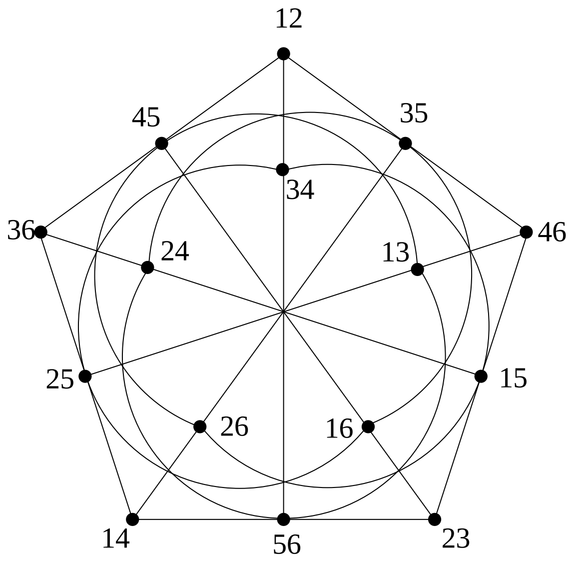
Indien er een rechte is met minder dan drie punten, hebben alle rechten twee punten en gaan er door elk punt twee rechten. Beschouw een punt p van Γ. De twee rechten die p bevatten leveren twee nieuwe punten q en r. Deze definieren ook een rechte $\{q, r\}$ die uiteindelijk toont dat Γ een gewone 3-hoek is. Tegenspraak!

Doordat we een meetkunde hebben, zijn we ook zeker dat er minstens drie niet-collineaire punten bestaan. □

We gebruikten in vorig bewijs dat alle rechten evenveel punten hebben. Zijn er voorbeelden van veralgemeende 3-hoeken die noch een projectief vlak noch een gewone 3-hoek zijn, indien men deze eis weglaat?

Na 3-hoeken komen logischerwijze 4-hoeken. Een voorbeeld is natuurlijk de gewone 4-hoek. We geven hier nog twee minder eenvoudige voorbeelden.

Zij $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ een verzameling van 6 elementen. Neem als punten de 15 paren $\{i, j\}$ van elementen van S (wij noteren die paren kort ij met $i < j$). De rechten zijn de partities van S in drie paren. Incidentie is de 'behoort tot of bevat'-relatie. In figuur 3.5 zie je een voorstelling van deze meetkunde.



Figuur 3.5: De veralgemeende vierhoek van orde $(2,2)$

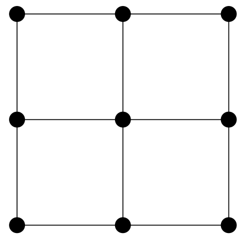
Ga zelf na dat deze meetkunde een veralgemeende 4-hoek is. Er zijn drie punten per echte en door elk punt gaan drie rechten. We zeggen daarom dat deze 4-hoek orde $(2,2)$ heeft. Men kan bewijzen dat er slechts één veralgemeende 4-hoek van orde $(2,2)$ bestaat (op isomorfisme (??) na). Een andere constructie van deze veralgemeende 4-hoek vind je in oefening 14.

In oefening 24 van hoofdstuk 8 van de cursus "Meetkunde en Lineaire Algebra" [KI], toonde je aan dat een éénbladige hyperboloïde twee families rechten omvat. Door elk punt van deze kwadriek gaat juist één rechte van elke familie. De rechten van eenzelfde familie zijn allen disjunct en vormen een partitie van de verzameling punten op de kwadriek. Als we een rechte in elke familie kiezen, zullen ze altijd juist één gemeenschappelijk punt hebben (??). Maak nu een meetkunde Γ met als punten de punten op de éénbladige hyperboloïde en als rechten de unie van de twee families rechten. Incidentie is de natuurlijke 'behoort tot of ligt op' relatie. Als we twee punten p en q van de kwadriek nemen die niet op een rechte van de kwadriek liggen, kunnen we door p een unieke rechte R_1 van de eerste familie vinden en door q een rechte R_2 van de andere familie. Deze rechten snijden in een punt r van de kwadriek. Ook kunnen we de rechte S_2 van de tweede familie door p kiezen en de rechte S_1 door q, die snijden in een ander punt s. Zo hebben we een gesloten weg $p * R_1 * r * R_2 * q * S_1 * s * S_2 * p$ van lengte 8 gevonden in de meetkunde Γ. We kunnen geen kortere gesloten wegen maken (??) zodat de gonaliteit 4 bedraagt. Onze punten p en q zijn ook voorbeelden van elementen op afstand 4 van elkaar zodat de punt-diameter ook 4 bedraagt (??). Als we twee verschillende rechten kiezen die tot eenzelfde familie behoren op de kwadriek, liggen deze op afstand 4 van elkaar in de incidentiegraf van Γ. We hebben dus wel echt een veralgemeende 4-hoek met oneindig veel punten per rechte en juist twee rechten per punt.

De éénbladige hyperboloïde is een voorbeeld van wat men een **rooster** noemt. Dit is een veralgemeende 4-hoek met $s_l = 1$. In figuur 3.6 zie je een rooster van orde $(2,1)$.

Kwadrieken in hogere dimensies die rechten bevatten, leveren ook interessantere veralgemeende 4-hoeken. Voor meer details verwijzen we naar [P-T].

We zetten onze reis in de wereld der veralgemeende veelhoek verder en belanden bij de



Figuur 3.6: Rooster van orde $(2,1)$

veralgemeende 5-hoeken. Natuurlijk hebben we de gewone 5-hoek als voorbeeld. Hij heeft orde $(1,1)$. Als we zoeken naar andere voorbeelden wordt het moeilijk.

Definitie 4. *Een meetkunde heet* ***dik*** *indien elke niet-maximale vlag omvat is door* ten minste drie *kamers. Indien elk residu van rang 1* juist *twee elementen bevat, heet de meetkunde* ***dun****.*

De enige veralgemeende 5-hoek die we tot nu toe kennen is dus een dunne. Uit stelling 1 volgt dat alle dikke veralgemeende 3-hoeken axiomatische projectieve vlakken zijn (zie ook oefening 11). Volgende stelling legt een belangrijke beperking op de eindige dikke veralgemeende veelhoeken.

Stelling 2 (Feit–Higman). *Eindige dikke veralgemeende n-hoeken bestaan enkel voor* $n \in \{2,3,4,6,8\}$.

Het bewijs van deze belangrijke stelling steunt op technieken uit de lineaire algebra en kan bijvoorbeeld gevonden worden in [VM]. In dit boek vind je ook voorbeelden van veralgemeende 6- en 8-hoeken. Indien men een oneindig aantal punten toelaat, bestaan er voor elke $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ veralgemeende *n*-hoeken. Men maakt hier gebruik van de zogenaamde *vrije constructie* van TITS (zie oefening 16). Voor meer resultaten over veralgemeende veelhoeken verwijzen we naar [VM].

3.4 Diagram van een meetkunde

Definitie 1. *Zij* $\Gamma = (X, *, I, t)$ *een meetkunde. Het* ***diagram*** *van* Γ *is het digonaal diagram van* Γ*, waar voor elke boog* ij *een familie* $\mathscr{F}_{ij}$ *van rang 2 meetkunden wordt gegeven zodanig dat elk residu van een vlag van type* $I \setminus \{i,j\}$*, waarin men de elementen van type i punten noemt, een meetkunde is in* $\mathscr{F}_{ij}$*.*

Meestal zullen de families $\mathscr{F}_{ij}$ bestaan uit (g, d_p, d_l)-gons. Soms is het ook nuttig de meetkunden in een familie $\mathscr{F}_{ij}$ nog meer te beperken door bijvoorbeeld ook de punt- en rechte-orde te specifiëren.

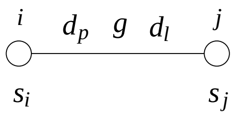
Definitie 2. *Zij* $\Gamma = (X, *, I, t)$ *een meetkunde. Indien voor een type* $i \in I$ *elke vlag van type* $I \setminus \{i\}$ *hetzelfde aantal elementen heeft in haar residu, noemen we dit aantal, verminderd met* 1*, de i-****orde*** *van* Γ*. We noteren de i-orde* s_i*.*

Indien de *i*-orde voor een bepaald type *i* gedefinieerd is, kan men op de bogen die *i* bevatten niet om het even welke familie $\mathscr{F}_{ij}$ van meetkunden plaatsen.

Lemma 1. *Zij $\Gamma = (X,*,I,t)$ een meetkunde en $i \in I$ een type waarvoor de i-orde bestaat. In elk rang 2 residu van Γ waarin de punten elementen van type i zijn, is de punt-orde gelijk aan s_i.*

Bewijs. Beschouw een residu Γ_F van rang 2 in Γ met $t(F) = I \setminus \{i, j\}$. De punt-orde van Γ_F is één minder dan het aantal punten incident met een rechte van Γ_F. Anders gezegd is dit het aantal elementen van type i incident met een element van type j in Γ_F. Nog met andere woorden is deze punt-orde het aantal elementen in een residu van een vlag van type $I \setminus \{i\}$. Dit is onafhankelijk van de keuze van j steeds gelijk aan de i-orde s_i. □

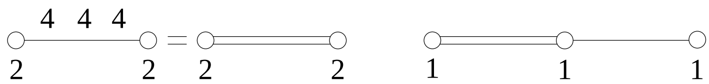
We spreken af dat we de informatie op het digonaal diagram aanbrengen volgens figuur 3.7. Hierbij veronderstelt men dat de elementen van type i in het residu de rol van 'punten' spelen.



Figuur 3.7: Plaatsing van informatie rond een boog van het digonaal diagram

Hierbij komen nog enkele conventies en afkortingen. Indien voor een zekere $\{i, j\}$ de residu's veralgemeende g-hoeken zijn, schrijven we d_p en d_l niet op het diagram vermits ze toch gelijk zijn aan g. We komen overeen dat een boog zonder enige vermelding staat voor een veralgemeende 3-hoek en een dubbele boog een veralgemeende 4-hoek voorstelt. De i-orden zijn facultatief en kunnen natuurlijk enkel vermeld worden indien ze gedefinieerd zijn.

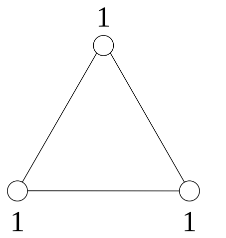
Het diagram van de veralgemeende 4-hoek van figuur 3.5 staat in figuur 3.8. Daarnaast staat het diagram van de kubus. Verklaar deze diagrammen zelf.



Figuur 3.8: Diagram van de veralgemeende 4-hoek van orde $(2,2)$ en van de kubus

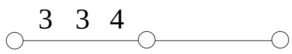
Laat ons het diagram van de betegeling met rode en blauwe driehoeken (zie voorbeeld 3.2.1) bepalen. We moeten dus alle mogelijke residu's van rang 2 in deze meetkunde van rang 3 bestuderen. Het residu van een punt bestaat uit drie rode en drie blauwe driehoeken. Elk van die driehoeken is incident met twee andere. Dit residu is bijgevolg een gewone 3-hoek. Analoog is het residu van een blauwe of rode driehoek ook een gewone 3-hoek. In figuur 3.9 zien we het diagram van deze oneindige meetkunde.

Beschouw een affiene ruimte X van dimensie 3 over een veld $\mathbb{K}$. Deze definieert op natuurlijke wijze een meetkunde Γ van rang 3. Neem het residu van een punt p in deze ruimte. Dit is een meetkunde van rang twee die bestaat uit alle rechten en alle vlakken die dat punt p bevatten. Indien we X vectorialiseren in p, zien we dat de elementen van het residu $\Gamma_{\{p\}}$ overeenkomen met de 1- en 2-dimensionale deelruimten van een 3-dimensionale $\mathbb{K}$-vectorruimte. Dit is niets anders dan het projectief vlak $\mathrm{P}^2(\mathbb{K})$, m.a.w. een veralgemeende driehoek. Het residu van een rechte bestaat uit alle punten van die rechten en alle vlakken die die rechte omvatten. Binnen dit residu zijn duidelijk dat alle punten incident met alle vlakken. We hebben een veralgemeende



Figuur 3.9: Diagram van de meetkunde van de betegeling met rode en blauwe driehoeken

digon. Het residu van een vlak van X bestaat uit alle punten en alle rechten van dit vlak. Deze vormen op zichzelf een affiene ruimte van dimensie 2 over $\mathbb{K}$ vermits een vlak een deelruimte is van X. We zagen eerder (zie oefening 3.6.3) dat een affien vlak een $(3,3,4)$-gon is. Het diagram van X is gegeven in figuur 3.10.



Figuur 3.10: Diagram van een affiene ruimte van dimensie 3

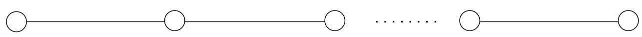
Indien $\mathbb{K}$ eindig is, kunnen we ook de ordes bepalen. Als $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$, heeft elke rechte q punten (??). Het aantal rechten door een punt in een affien vlak over $\mathbb{F}_q$ is $q+1$ en het aantal vlakken die een gegeven rechte omvatten is ook $q+1$. De orden die in het eindige geval op het diagram komen zijn dus (van links naar rechts) $q-1$, q en q.

Tenslotte merken we op dat eigenschap 3.2.1 ook blijft gelden voor de diagrammen die we in deze paragraaf definieerden (met hetzelfde bewijs). Het diagram van een residu Γ_F is dus af te lezen op het diagram van Γ door de knopen van $t(F)$ weg te vegen, samen met alle bogen met minstens één knoop in $t(F)$.

3.5 Projectieve en affiene ruimten

In deze laatste paragraaf komen we terug naar de n-dimensionale affiene en projectieve ruimten. Deze geven op natuurlijke wijze aanleiding tot incidentiemeetkunden met als typeverzameling $\{0,1,\ldots,n-1\}$ waarbij de elementen van type i juist de i-dimensionale deelruimten zijn. We bepalen de diagrammen van deze meetkunden en tonen dat deze diagrammen ook een karakterisatie zijn van deze belangrijke meetkunden.

Stelling 1. *Het diagram van een projectieve ruimte* $\mathrm{P}^n(\mathbb{K})$ *is steeds*

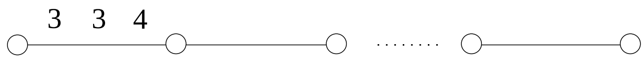


Bewijs. We geven een bewijs per inductie op de rang n. Voor $n=2$ weten we reeds sinds bladzijde 102 dat een projectief vlak een veralgemeende 3-hoek is. Vermits een hypervlak $\mathrm{P}(U)$ van $\mathrm{P}^n(\mathbb{K})$ isomorf is met $\mathrm{P}^{n-1}(\mathbb{K})$, weten we dat het diagram van het residu van $\mathrm{P}(U)$ de gevraagde vorm heeft. We tonen nu dat het type $n-1$ in het diagram van $\mathrm{P}^n(\mathbb{K})$ enkel met het type $n-2$ verbonden is. Neem een type $i<n-2$ en beschouw een vlag F van type $\{0,1,\ldots,\widehat{i},\ldots n-2\}$. Noteer het element van type $n-2$ in F met $\mathrm{P}(S)$. Het residu van F bestaat uit alle i-dimensionale deelruimten van $\mathrm{P}^n(\mathbb{K})$ die deel zijn van $\mathrm{P}(S)$ en alle hypervlakken die

$\mathrm{P}(S)$ omvatten. Het is duidelijk dat elke i-dimensionale deelruimte in dit residu incident is met elk hypervlak van het residu. Een residu van type $\{n-2, n-1\}$ daarentegen bestaat uit alle $(n-2)$-dimensionale deelruimten en alle hypervlakken die een vaste $(n-3)$-dimensionale deelruimte $\mathrm{P}(T)$ omvatten. Met de dimensiestelling (stelling 2.2.1) kunnen we gemakkelijk nagaan dat dit residu een (axiomatisch) projectief vlak is. $\square$

Indien $\mathbb{K}$ een eindig lichaam is met q elementen, zijn alle orden gelijk aan q.

Stelling 2. *Het diagram van een affiene ruimte X over $\mathbb{K}$ is steeds*



Bewijs. Oefening! Zoek inspiratie in de bespreking van de driedimensionale affiene ruimte in vorige paragraaf en gebruik stelling 1. $\square$

Indien $\mathbb{K}$ een eindig lichaam is met q elementen, bedraagt de orde van het meest links staande type $q-1$ en zijn alle andere orden gelijk aan q.

De rest van deze paragraaf zullen we besteden aan het bewijs van het omgekeerde van stelling 1.

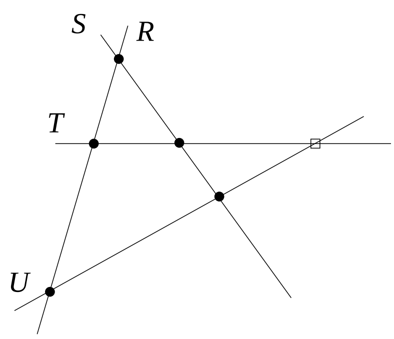
Hiervoor zullen we de projectieve ruimten eerst axiomatiseren.

Definitie 1. *Een **axiomatische projectieve ruimte** bestaat uit een niet-lege verzameling $\mathscr{P}$ van **punten** en een niet-lege verzameling $\mathscr{L}$ van deelverzamelingen van $\mathscr{P}$ die men **rechten** noemt. Bovendien zijn volgende axioma's voldaan.*

(PR1) Twee punten bepalen steeds een rechte;

(PR2) Twee verschillende rechten hebben hoogstens *één gemeenschappelijk punt;*

(PR3) Zij R, S, T, U verschillende rechten zodanig dat R en S snijden, T en U allebei zowel R als S snijden (zie figuur), dan snijden T en U ook;



(PR4) Elke rechte bevat minstens drie punten;

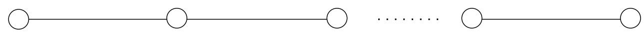
(PR5) Er zijn minstens drie niet-collineaire punten.

Ga na dat elk axiomatisch projectief vlak ook een axiomatische projectieve ruimte is. Ook elke projectieve ruimte in de zin van definitie 2.2.1 is een axiomatische projectieve ruimte. Eigenlijk zijn er niet veel andere axiomatische projectieve ruimten.

Stelling 3 (Veblen–Young). *Een axiomatische projectieve ruimte is ofwel een axiomatisch projectief vlak ofwel een projectieve ruimte in de zin van definitie 2.2.1 waarbij men toelaat dat $\mathbb{K}$ een niet-commutatief lichaam is of dat de dimensie van V oneindig is.* $\square$

Het bewijs van deze stelling geven we niet maar de lezer kan zich gemakkelijk inbeelden dat de gebruikte techniek dezelfde zal zijn als in het bewijs van stelling 1.4.8.

Voor de rest van deze paragraaf veronderstellen we dat $\Gamma = (X, *, I, t)$ een residueel samenhangende dikke meetkunde is met diagram



De orden hoeven niet eindig te zijn en we noteren de rang van Γ met n. De types worden van links naar rechts genummerd met 0, 1, ..., $n-1$.

Met definitie 1 in ons achterhoofd gaan we op zoek naar 'punten' en 'rechten' in Γ. Vermits in het diagram van een projectieve ruimte het uiterst linkse type de punten zijn, is het natuurlijk de elementen van type 0 'punten' te noemen en de elementen van type 1 'rechten'. De rechten in definitie 1 zijn verzamelingen van punten. Daarom volgende definitie.

Definitie 2. *Zij x een element van Γ. De 0-**schaduw** (of **punt-schaduw** of kortweg **schaduw**) van x is de verzameling elementen van type 0 die incident zijn met x. We noteren deze schaduw* $\mathrm{Sh}(x)$.

LET OP: verwar de schaduw niet met het residu. De schaduw van x is de $\{0\}$-truncatie van het residu $\Gamma_{\{x\}}$.

We zullen dus $\mathscr{P} = t^{-1}(0)$ en $\mathscr{L} = \{\mathrm{Sh}(R) \mid R \in t^{-1}(1)\}$ stellen en bewijzen dat deze verzamelingen een axiomatische projectieve ruimte definiëren.

Lemma 1. *Zij x en y twee incidente elementen van Γ met $t(x) < t(y)$. Dan geldt* $\mathrm{Sh}(x) \subset \mathrm{Sh}(y)$.

Bewijs. Indien x een punt is, is de eigenschap duidelijk. Als x geen punt is, zal het residu van x in Γ een diagram hebben waarin 0 en $t(y)$ behoren tot verschillende samenhangscomponenten. De directe som stelling (stelling 3.2.1) zegt nu dat alle elementen van $\mathrm{Sh}(x)$ incident zijn met y. $\square$

Lemma 2. *De verzamelingen $\mathscr{P}$ en $\mathscr{L}$ voldoen aan (PR1) en (PR2).*

Bewijs. Weer eens gaat het bewijs per inductie op de rang van Γ. In rang 2 hebben we wegens stelling 3.3.1 een axiomatisch projectief vlak of een gewone 3-hoek zodat (PR1) en (PR2) voldaan zijn.

Volgens lemma 3.2.2 bestaat er tussen twee punten van Γ steeds een weg (in de incidentiegraf) die enkel punten en rechten bevat. We tonen nu dat zulke weg van lengte > 2 steeds kan ingekort worden. Beschouw een weg $p * L * q * M * r$ waarbij p, q en r punten zijn en L en M rechten. De rechten L en M behoren tot het residu $\Gamma_{\{q\}}$ dat een diagram heeft analoog aan dat van Γ, maar in rang $n-1$. De inductiehypothese zegt dat de 'punten' en 'rechten' van deze meetkunde voldoen aan (PR1). Dit wil zeggen dat er een element Π van type 2 van Γ (dit is een 'rechte' in de residuele meetkunde) bestaat dat incident is met L en M. Nu kunnen we het singleton $\{\Pi\}$ aanvullen tot een vlag van type $\{2, 3, \ldots, n-1\}$. Het diagram (samen met stelling 3.3.1) leert ons dat dit residu isomorf is met een gewone 3-hoek of een axiomatisch projectief vlak. Dit residu bevat niet alleen de rechten L en M, maar ook de punten p, q en r wegens lemma 1. Doordat dit residu voldoet aan (PR1), vinden we een rechte die incident is met p en r.

Veronderstel nu dat twee rechten L en M allebei incident zijn met twee verschillende punten p en q. Zoals hoger kijken we in het residu van p om een element Π van type 2 te vinden zodat alle gegeven elementen voorkomen in het residu van een vlag van type $\{2,3,\ldots,n-1\}$ die Π bevat. Dit residu voldoet aan (PR2) zodat we $L = M$ besluiten. $\square$

De incidentiestructuren die voldoen aan (PR1) en (PR2) zijn in de meetkunde zeer belangrijk omdat ze een gemeenschappelijke veralgemening zijn van affiene en projectieve ruimten. Daarom krijgen ze dan ook een bijzondere naam en gaat men een axiomatisch begrip 'deelruimte' (vgl. met stelling 1.1.5) invoeren.

Definitie 3. *Zij $(\mathscr{P},\mathscr{L})$ een koppel waarin $\mathscr{P}$ een verzameling is en $\mathscr{L}$ een verzameling deelverzamelingen van $\mathscr{P}$. Indien (PR1) en (PR2) voldaan zijn, heet $(\mathscr{P},\mathscr{L})$ een **lineaire ruimte**. Een deelverzameling D van $\mathscr{P}$ heet een **lineaire deelruimte** indien voor elke keuze $a \neq b$ in D, de rechte bepaald door a en b volledig door D is omvat.*

Lemma 3. *De schaduw van een element van Γ vormt steeds een lineaire deelruimte van de lineaire ruimte $(\mathscr{P},\mathscr{L})$.*

Bewijs. Als het element van type 0 of 1 is, is dit triviaal. Zij y een element van Γ met $t(y) > 1$ en neem $p,q \in \mathrm{Sh}(y)$. Door de directe som stelling zijn de elementen van type $< t(y)$ in het residu van y dezelfde als die in het residu van een vlag F van type $\{t(y),t(y)+1,\ldots,n-1\}$. Samen met lemma 2 leert het diagram van Γ ons dat de elementen van type 0 en de schaduwen van de elementen van type 1 binnen Γ_F een lineaire ruimte vormen. Bijgevolg bestaat er een rechte R incident met p, q en y. We passen nu lemma 1 toe om te besluiten dat $\mathrm{Sh}(R) \subset \mathrm{Sh}(y)$. $\square$

Lemma 4. *Twee elementen van Γ zijn incident als en slechts als de schaduw van het ene een deel is van de schaduw van het andere.*

Bewijs. Eén implicatie volgt uit lemma 1. Veronderstel nu dat $\mathrm{Sh}(x) \subset \mathrm{Sh}(y)$ met $t(x)$ en $t(y)$ allebei groter dan 1. Neem nu $p \in \mathrm{Sh}(x)$ en kijk naar het residu $\Gamma_{\{p\}}$. Dit is weer een meetkunde met een diagram gelijkaardig aan dat van Γ maar in rang $n-1$. Deze meetkunde bevat x en y. We tonen dat *binnen dit residu* $\mathrm{Sh}(x) \subset \mathrm{Sh}(y)$ (OPGELET: de schaduwen in dit residu bestaan uit rechten van Γ). Beschouw een element R van $\mathrm{Sh}(x)$ binnen dit residu. Vermits $R * x$, geldt wegens lemma 1 dat $\mathrm{Sh}(R) \subset \mathrm{Sh}(x)$ in Γ en bijgevolg ook $\mathrm{Sh}(R) \subset \mathrm{Sh}(y)$. We nemen nu weer een vlag F van type $\{t(y),t(y)+1,\ldots,n-1\}$ die y bevat en bekijken het residu in Γ. Dit residu bevat alle elementen van $\mathrm{Sh}(R)$ en heeft een diagram zoals dat van Γ. Als we een element q van $\mathrm{Sh}(R) \setminus \{p\}$ kiezen, weten we door toepassing van lemma 2 dat er in Γ_F een rechte R' bestaat met $p,q \in \mathrm{Sh}(R')$. Vermits deze rechte in Γ uniek is, hebben we $R' = R$ zodat R behoort tot Γ_F en dus incident is met y.

Nu hebben we binnen $\Gamma_{\{p\}}$ dat $\mathrm{Sh}(x) \subset \mathrm{Sh}(y)$ zodat we bij inductie kunnen besluiten dat x en y incident zijn.

Kijk zelf na wat er gebeurt indien $t(x)$ of $t(y)$ kleiner is dan 2 en wat de basis van de inductie is. $\square$

Uit de dimensiestelling voor projectieve deelruimten (stelling 2.2.1) weten we dat de projectieve omhullende van een i-dimensionale deelruimte en een punt daarbuiten steeds een $i+1$-dimensionale deelruimte is. Dit geldt ook in het axiomatische geval.

Lemma 5. *Zij x een element van Γ met $t(x) < n-1$ en p een punt dat niet incident is met x. Er bestaat een uniek element y incident met x en p zodanig dat $t(y) = t(x)+1$.*

Bewijs. Indien x een punt is, volgt de bewering uit lemma 2. In het andere geval kiezen we $q \in \mathrm{Sh}(x)$ en gebruiken we inductie op de rang van Γ. Dit levert een uniek element y op in $\Gamma_{\{q\}}$ dat incident is met x en de (unieke) rechte R incident met p en q. Wegens lemma 1 is $\mathrm{Sh}(R) \subset \mathrm{Sh}(y)$ zodat $p * y$. □

Nu zijn we voldoende gewapend om volgende stelling te bewijzen.

Stelling 4. *De meetkunde $(\mathscr{P}, \mathscr{L})$ is een axiomatische projectieve ruimte en Γ komt overeen met de meetkunde van de lineaire deelruimten van $(\mathscr{P}, \mathscr{L})$ voor de inclusierelatie.*

Bewijs. Wegens lemma 2 en het feit dat Γ een dikke meetkunde is, blijft enkel (PR3) te bewijzen voor $(\mathscr{P}, \mathscr{L})$. Beschouw vier rechten R, S, T en U zoals in definitie 1 met p het snijpunt van R en S. Volgens lemma 5 bestaat er een uniek element Π van type 2 in Γ dat incident is met p en T. Lemma 3 verzekert ons dat $\mathrm{Sh}(\Pi)$ een lineaire deelruimte is van $(\mathscr{P}, \mathscr{L})$ zodat de schaduwen van de vier beschouwde rechten omvat zijn door deze schaduw. Toepassing van lemma 4 laat ons toe te besluiten dat deze vier rechten samen met hun snijpunten behoren tot een residu van type $\{0,1\}$ in Γ, namelijk het residu van een vlag van type $\{2,3,\ldots,n-1\}$ die Π bevat. Het diagram leert ons via stelling 3.3.1 dat dit residu een axiomatisch projectief vlak moet zijn (waarom geen gewone 3-hoek??). Er volgt dat de rechten T en U moeten snijden.

Wegens lemma's 3 en 4 kunnen de elementen van Γ geïdentificeerd worden met lineaire deelruimten van $(\mathscr{P}, \mathscr{L})$ en wordt de incidentierelatie gegeven door inclusie van deze deelruimten. Er blijft nog aan te tonen dat *alle* lineaire deelruimten van $(\mathscr{P}, \mathscr{L})$ de schaduw zijn van een element van Γ. Weer eens gebruiken we inductie. In rang 2 volgt dit triviaal uit de definitie van lineaire deelruimte en van $\mathscr{L}$. Zij D een lineaire deelruimte van $(\mathscr{P}, \mathscr{L})$ met minstens twee elementen (anders weeral triviaal). Kies $p \in D$ en stel

$$D_p = \{L \in t^{-1}(1) \mid p * L \text{ en } \mathrm{Sh}(L) \subset D\}$$

Dan is D_p een lineaire deelruimte van het residu $\Gamma_{\{p\}}$. Immers, veronderstel $R, S \in D_p$ Dan bestaat er wegens lemma 2 een element Π van type 2 in dit residu met $R * \Pi$ en $S * \Pi$. Neem nu een andere rechte T in de schaduw van Π in $\Gamma_{\{p\}}$. Dan zitten R, S en T allen in het residu van een vlag van type $\{2,3,\ldots,n-1\}$ die Π bevat. Dit residu is wegens het diagram en stelling 3.3.1 een axiomatisch projectief vlak. Neem nu punten $r \in R$ en $s \in S$ die verschillend zijn van p. Dan gaat de unieke rechte U incident met r en s de rechte T snijden in een punt q verschillend van p. Vermits D een lineaire deelruimte is, moet $\mathrm{Sh}(U) \subset D$ en bijgevolg ook $q \in D$. Vermits $p * T$, hebben we dat T de unieke rechte is die incident is met p en q, zodat $\mathrm{Sh}(T) \subset D$ en bijgevolg ook $T \in D_p$.

Nu gebruiken we de inductiehypothese om x in $\Gamma_{\{p\}}$ te vinden zodanig dat $\mathrm{Sh}(x) = D_p$. Er blijft enkel nog te bewijzen dat de schaduw van x in Γ de deelruimte D moet zijn. Neem $q \in D \setminus \{p\}$. Dan geldt zeker dat de unieke rechte U incident met p en q tot D_p behoort vermits haar schaduw in D omvat is. We hebben dus $U \in \mathrm{Sh}(x)$ in het residu $\Gamma_{\{p\}}$ zodat $U * x$. Hieruit volgt door toepassing van lemma 1 dat $\mathrm{Sh}(U) \subset \mathrm{Sh}(x)$ zodat $q \in \mathrm{Sh}(x)$. Omgekeerd nemen we $q \in \mathrm{Sh}(x) \setminus \{p\}$ (dat $p \in \mathrm{Sh}(x)$ is duidelijk). Weeral bestaat er in Γ een unieke rechte U die incident is met p en q. Doordat $\mathrm{Sh}(x)$ een lineaire deelruimte is (zie lemma 3) moet de volledige schaduw $\mathrm{Sh}(U)$ binnen $\mathrm{Sh}(x)$ liggen. Door toepassing van lemma 4 volgt hieruit

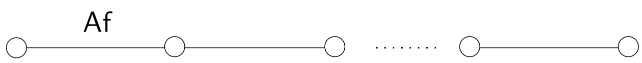
$U * x$. Bovendien is U een element van $\Gamma_{\{p\}}$ zodat U in dit residu behoort tot $\mathrm{Sh}(x)$. Maar uit $\mathrm{Sh}(x) = D_p$ volgt nu $U \in D_p$ zodat $\mathrm{Sh}(U) \subset D$. Dit impliceert $q \in D$. $\square$

Opmerking 1. Nu we weten dat de meetkunde Γ inderdaad een projectieve ruimte $\mathrm{P}^n(\mathbb{K})$ of een axiomatisch projectief vlak moet zijn, weten we ook dat de i-orde gedefinieerd is voor elk type. Indien $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ toont men gemakkelijk (??) dat alle orden gelijk zijn aan q. In oefening 26 tonen we, enkel door het diagram te gebruiken, dat het bestaan van één orde reeds voldoende is om te tonen dat alle orden bestaan en gelijk zijn.

Opmerking 2. Dankzij stelling 4 kunnen we nu ook een alternatieve definitie van projectieve ruimte bedenken: het is een incidentiemeetkunde waarvan het diagram is zoals dat van Γ. Dit diagram is dan een zeer compacte samenvatting van de incidentie-eigenschappen van een projectieve ruimte.

We kunnen ons ook afvragen of affiene ruimten ook door hun diagram gekarakteriseerd kunnen worden. Het is de aandachtige lezer zeker opgevallen dat we geen "affiene versie" van stelling 3.3.1 bewezen. Het is inderdaad zo dat een $(3,3,4)$-gon niet steeds een affien vlak is. In oefening 19 vind je een rang twee meetkunde die een $(3,3,4)$-gon is maar geen (axiomatisch) affien vlak (??). Bijgevolg is een meetkunde met diagram zoals in stelling 2 niet noodzakelijk een affiene ruimte. Toch bestaat er een "affiene versie" van stelling 4 indien men eist dat elk residu van type $\{0,1\}$ een axiomatisch affien vlak is. We duiden dit aan door in het diagram een symbool Af te gebruiken boven de meest linkse boog.

Stelling 5. *Zij $\Gamma = (X, *, I, t)$ een residueel samenhangende dikke meetkunde van rang n met diagram*



Dan kunnen de elementen van Γ geïdentificeerd worden met de deelruimten van een axiomatische affiene ruimte van dimensie n zodanig dat incidentie overeenstemt met inclusie van deelruimten. $\square$

Het bewijs geven we liever niet maar verloopt analoog met dat van stelling 4. Het komt erop neer dat de schaduwen van rechten aanleiding geven tot een axiomatische affiene ruimte (die we hier niet definiëren). Dan is er ook een soort Veblen–Young stelling die toont dat axiomatische affiene ruimten "gewone" affiene ruimten zijn in de betekenis van definitie 1.1.1.

Dankzij dit diagram is het nu weer mogelijk een axiomatische definitie van affiene ruimte te geven: een affiene ruimte van dimensie n is een dikke residueel samenhangende meetkunde van rang n waarin de residu's van type $\{0,1\}$ axiomatische affiene vlakken zijn, alle residu's van type $\{i, i+1\}$ met $i \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$ axiomatische projectieve vlakken zijn en de overige residu's veralgemeende digons zijn. Uit het diagram leren we bijvoorbeeld ook (via de directe som stelling) dat de elementen van type i de structuur hebben van affiene ruimten van dimensie i. Dit zijn dus i-dimensionale deelruimten. Ook zien we dat het residu van een punt een $(n-1)$-dimensionale projectieve ruimte is.

3.6 Oefeningen bij hoofdstuk 3

1. In [PA] geeft men volgende definitie van incidentiemeetkunde:

   (a) Een meetkunde van rang 1 is een verzameling met minstens twee elementen;

   (b) Een meetkunde van rang $n \geqslant 2$ is een samenhangende graf $(V, \sim)$ uitgerust met een partitie $(V_i)_{i=1}^n$ van de knopenverzameling V zodanig dat voor elke knoop v de graf geïnduceerd op de omgeving $V_v = \{u \in V \mid u \sim v\}$, samen met de geïnduceerde partitie, een meetkunde is van rang $n-1$.

   Toon aan dat deze definitie sterker is dan definitie 3.1.3. De meetkunden van [PA] komen overeen met onze residueel samenhangende meetkunden.

2. Indien de incidentiegraf van een meetkunde Γ geen gesloten pad omvat, zeggen we dat de gonaliteit van Γ *oneindig* is. Geef een voorbeeld van een meetkunde van rang twee met oneindige gonaliteit. Ook de diameters kunnen oneindig zijn. Geef een voorbeeld.

3. Beschouw een affien vlak $(A, \mathscr{R})$ en definieer de **incidentiegraf** Γ als volgt:

   - De verzameling toppen is $A \cup \mathscr{R}$;
   - Twee toppen x en y vormen een boog indien $x \in y$ of $y \in x$ of $x = y$.

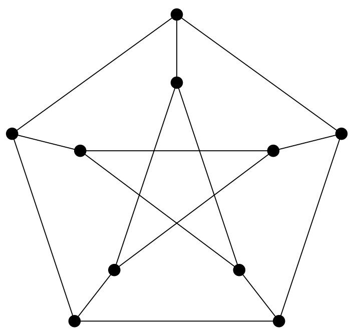
   (a) Hoe lang zijn de kortste gesloten paden in Γ?

   (b) Wat is de maximale afstand die je in Γ kan afleggen als je vertrekt uit een punt? uit een rechte?

4. Beschouw de Desargues configuratie (zie stelling 2.4.2) als een meetkunde van rang twee met 10 punten en 10 rechten. Bepaal de gonaliteit, punt- en rechte-diameters.

5. Een dunne residueel samenhangende meetkunde van rang twee is steeds een gewone m-gon voor een $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Bewijs dit.

6. Bepaal gonaliteit, diameters en orden van de **Petersen graf** van figuur 3.11, beschouwd als meetkunde van rang 2.



Figuur 3.11: De Petersen graf

7. In [VM] geeft men volgende definitie van veralgemeende n-hoek: het is een incidentiestructuur Γ van rang 2 zodanig dat

   (a) Γ geen gewone k-hoek omvat voor $2 \leqslant k < n$;

   (b) elke twee elementen van Γ zijn bevat in een gewone n-hoek van Γ.

   Bewijs dat deze definitie equivalent is met definitie 3.3.2 .

8. Bewijs dat een meetkunde $\Gamma = (X, *, I, t)$ een veralgemeende n-gon is als en slechts als

   (a) $\forall x, y \in X : d(x,y) \leqslant n$;

   (b) $\forall x, y \in X : d(x,y) = h < n \Longrightarrow \exists!$ weg van lengte h van x naar y;

   (c) $\forall x \in X : \exists y \in X : d(x,y) = n$.

   Hier stelt $d(x,y)$ de afstand tussen x en y voor in de incidentiegraf van Γ.

9. In een eindige rang 2 meetkunde noteren we het aantal punten en rechten respectievelijk met N_p en N_l. Bewijs dat $N_l(s_p + 1) = N_p(s_l + 1)$.

10. Wat wordt stelling 3.3.1 indien men in de definitie van veralgemeende 3-hoek niet veronderstelt dat alle rechten evenveel punten hebben. Bewijs deze stelling.

11. In het bewijs van stelling 3.3.1 veronderstelden we dat alle rechten evenveel punten hadden en er door elk punt evenveel rechten lopen. We kunnen dit axioma vermijden door te veronderstellen dat de meetkunden dik zijn. Bewijs volgende alternatieve versie van stelling 3.3.1 .

    Elke dikke veralgemeende 3*-hoek is een axiomatisch projectief vlak.*

    [HINT: Inspireer je van oefening 2.9.3 om aan te tonen dat alle rechten evenveel punten hebben en door elk punt evenveel rechten gaan. Werk dan verder zoals in het bewijs van stelling 3.3.1 .]

12. In boeken zoals [P-T] hanteert men volgende definitie van veralgemeende 4-hoek. Een **veralgemeende** 4**-hoek** is een meetkunde van rang 2 waarin er geen punt collineair is met alle andere zodanig dat

    (a) Voor elke twee punten is er hoogstens één rechte incident met beide;

    (b) Telkens we een punt p en een rechte L nemen die niet incident zijn, bestaat er een uniek punt q van L dat collineair is met p.

    Toon aan dat deze definitie equivalent is met onze definitie (zie definitie 3.3.2 voor $g = 4$).

13. Indien q een even priemmacht is, kan men bewijzen dat er in $\mathrm{P}^2(\mathbb{F}_q)$ een zogenaamde **hyperovaal** bestaat. Dit is een verzameling van $q+2$ punten waarmee elke rechte nul of twee punten gemeenschappelijk heeft. Beschouw nu een hypervlak H in een driedimensionale ruimte $\mathrm{P}^3(\mathbb{F}_q)$ met q even. In dit hypervlak bestaat er een hyperovaal $\mathscr{O}$. Beschouw nu een rang 2 meetkunde met als punten de punten van $\mathrm{P}^3(\mathbb{F}_q)$ buiten H en als rechten de rechten van $\mathrm{P}^3(\mathbb{F}_q)$ die $\mathscr{O}$ snijden in juist één punt. De incidentierelatie is de ‘bevat of

behoort tot'-relatie. Toon aan dat deze meetkunde een veralgemeende vierhoek van orde $(q-1,q+1)$ is.

14. Beschouw de 6-dimensionale vectorruimte $(\mathbb{F}_2)^6$ over het lichaam met twee elementen. Hierop nemen we de standaard bilineaire vorm $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\sum_{i=1}^6 x_iy_i$.

    (a) Stel $V=\{\mathbf{x}\in(\mathbb{F}_2)^6 \mid \sum_{i=1}^6 x_i=0\}$, de verzameling van alle vectoren met een even aantal componenten gelijk aan 1. Toon aan dat V een deelruimte is van dimensie 5 in $(\mathbb{F}_2)^6$. Bijgevolg is V een vectorruimte uitgerust met een bilineaire vorm $\cdot$.

    (b) Bewijs dat $\forall \mathbf{x}\in V:\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}=0$. Daarom noemt men $\cdot$ een *alternerende* bilineaire vorm.

    (c) Toon aan dat het radicaal $V^\perp$ bestaat uit de nulvector en de vector $\mathbf{u}=(1,1,1,1,1,1)$.

    (d) Op de quotiëntvectorruimte $V/V^\perp$ kunnen we ook een bilineaire vorm plaatsen. Stel gewoon $(\mathbf{x}+V^\perp)\cdot(\mathbf{y}+V^\perp)=\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$. Toon aan dat deze bilineaire vorm goed gedefinieerd en alternerend is. Het is een oefening van eerste kandidatuur te bewijzen dat het quotiënt $V/V^\perp$ *niet-ontaard* is. Dit wil zeggen dat de enige vector die in dit quotiënt loodrecht staat op alle vectoren de nulvector is. We noteren $V/V^\perp$ kort met $\overline{V}$ en stellen de nevenklasse $\mathbf{x}+V^\perp$ voor als $\overline{\mathbf{x}}$. Merk op dat we voor elke niet-nulle nevenklasse een representant kunnen vinden waarvan juist twee componenten 1 zijn.

    (e) We kunnen nu kijken naar de projectieve ruimte $\mathrm{P}(\overline{V})$ waar we zeggen dat twee punten $p=\mathrm{vect}\{\overline{\mathbf{x}}\}$ en $q=\mathrm{vect}\{\overline{\mathbf{y}}\}$ *loodrecht* staan op elkaar indien $\overline{\mathbf{x}}\cdot\overline{\mathbf{y}}=0$. We noteren dit $p\perp q$. Bewijs dat dit begrip goed gedefinieerd is en dat $\mathrm{P}(\overline{V})$ dimensie drie heeft.

    (f) Voor een punt p van $\mathrm{P}(\overline{V})$ stellen we $p^\perp=\{q\in\mathrm{P}(\overline{V}) \mid q\perp p\}$ en voor elke $U\subset\mathrm{P}(\overline{V})$ nemen we $U^\perp=\bigcap_{u\in U} u^\perp$. We noemen een rechte R van $\mathrm{P}(\overline{V})$ **totaal isotroop** indien $R\subset R^\perp$. Bewijs dat $p\perp q \iff \langle p,q\rangle$ is totaal isotroop.

    (g) Als we de 15 punten en de 15 totaal isotrope rechten van $\mathrm{P}(\overline{V})$ nemen samen met de natuurlijke incidentie, bekomen we een rang 2 meetkunde die een veralgemeende vierhoek is van orde (2,2). Bewijs dit. Deze meetkunde noemt men de **symplectische vierhoek van orde 2**. De afbeelding $U\mapsto U^\perp$ noemt men de **symplectische polariteit** van $\mathrm{P}(\overline{V})$ en $\overline{V}$ uitgerust met de alternerende bilineaire vorm $\cdot$ draagt de naam **symplectische ruimte van dimensie 4 over** $\mathbb{F}_2$.

    (h) We hebben hier dezelfde veralgemeende vierhoek als die beschreven in figuur 3.5. Dit kunnen we gemakkelijk inzien als volgt. Voor elke vector $\overline{\mathbf{x}}$ kiest men een representant $\mathbf{x}$ met juist twee componenten gelijk aan 1. Hiermee laat men de deelverzameling $S_{\mathbf{x}}=\{i\in\{1,2,\ldots,6\} \mid x_i=1\}$ overeenkomen. We zien dus dat de punten van onze vierhoek overeenkomen met de paren van een verzameling met 6 elementen. De totaal isotrope rechten komen overeen met de verzamelingen $\{\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{x}+\mathbf{y}}\}$ waarbij $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=0$. Als we weer goede representanten kiezen, zien we dat de drie corresponderende paren een partitie vormen van $\{1,2,\ldots,6\}$.

15. Geef een voorbeeld van een meetkunde die noch dik noch dun is.

16. Beschouw een gewone 6-hoek Γ_0. We definiëren een rij $(\Gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ van meetkunden door volgende constructie. Bekijk elk paar punten $\{p_1, p_2\}$ van Γ_i. Indien p_1 en p_2 op afstand 6 van elkaar liggen in de incidentiegraf van Γ_i, voegen we *nieuwe* rechten R_1 en R_2 en een *nieuw* punt p toe aan Γ_i. Zij zijn met geen enkel element van Γ_i incident behalve dat $p_1 * R_1 * p * R_2 * p_2$ moet gelden. Op die manier wordt de afstand tussen p_1 en p_2 vier. We doen hetzelfde met alle paren van rechten met onderlinge afstand 6. De meetkunde Γ_i met alle toegevoegde elementen en bijkomende incidenties noemen we Γ_{i+1}. In Γ_{i+1} zijn er nu weer elementen op afstand 6 van elkaar zodat we geen veralgemeende 5-hoek kunnen hebben. We moeten dus de constructie blijven herhalen om alle afstanden te verkleinen.

    Bewijs dat de 'limietmeetkunde' die ontstaat als je deze constructie oneindig lang herhaalt, een dikke veralgemeende 5-hoek is. Deze constructie laat toe om voor elke $n > 1$ dikke veralgemeende n-hoek te maken en noemt men **vrije constructie**.

17. Bewijs dat een meetkunde dun is als en slechts als alle i-orden 1 zijn.

18. Beschouw de Pappus configuratie (zie stelling 2.4.1) als een meetkunde van rang twee met negen punten en negen rechten. Bepaal het diagram.

19. Bepaal het diagram van de rang 2 meetkunde met 5 punten, waarin de rechten alle paren van punten zijn. Dit is de meetkunde van de complete graf op 5 punten, analoog gedefinieerd als de meetkunde van oefening 6.

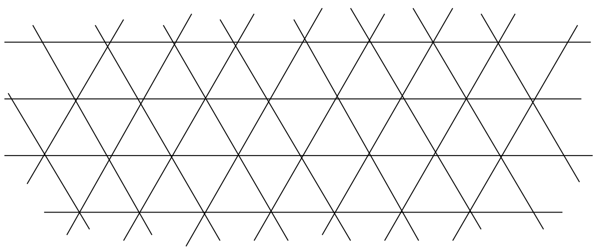
20. Bepaal het diagram van alle rang 2 truncaties van de kubus.

21. Is de kubus een veralgemeende vierhoek?

22. Bepaal het diagram van de dodecaëder, icosaëder, octaëder en tetraëder. Leg uit hoe dualiteit zich uit in deze diagrammen.

23. Een **correlatie** van een meetkunde $\Gamma = (X, *, I, t)$ is een permutatie van X die incidente elementen afbeeldt op incidente elementen en gelijkheid van types bewaart. Bewijs dat elke correlatie het diagram van Γ bewaart. Een correlatie van orde twee heet een **dualiteit**.

24. Bepaal het diagram van de betegeling van E^2 met gelijkzijdige driehoeken (zie figuur 3.12) waarmee men als volgt een meetkunde van rang 3 definieert. De elementen van type 0

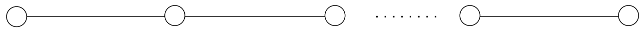
    

    Figuur 3.12: Betegeling van E^2 met gelijkzijdige driehoeken

    zijn de hoekpunten van de driehoeken, de elementen van type 1 zijn de zijden van de driehoeken en de elementen van type 2 zijn de driehoeken. Incidentie is de natuurlijke 'omvat of behoort tot'-relatie.

25. Geef een alternatief bewijs van stelling 3.5.1 door algemeen alle rang 2 residu's van $\mathrm{P}^n(\mathbb{K})$ te beschrijven.

26. Zij $\Gamma = (X, *, I, t)$ een residueel samenhangende meetkunde met diagram



Bewijs dat indien een orde van Γ eindig is, alle orden eindig en gelijk zijn. Gebruik stelling 3.5.4 niet! [HINT: Zij i het type met eindige orde s en $j \sim i$ een gebuur van i in het diagram. Gebruik stelling 3.3.1 en oefening 2.9.3 samen met lemma 3.4.1 om te bewijzen dat de orde van j ook s is.]

27. Onderstel dat men uit een aantal merken van stofzuigers wil bepalen welk merk het best beantwoordt aan de eisen van de hedendaagse huisvrouw. Men kan hiervoor een beroep doen op vrijwillige huisvrouwen die elk een aantal merken op proef krijgen en ze dan classeren volgens hun bevindingen. Opdat zulk een experiment goed zou werken, is het wenselijk dat

   - elke huisvrouw evenveel merken onderzoekt;
   - elk merk door evenveel huisvrouwen beoordeeld wordt;
   - elk paar merken hetzelfde aantal keer wordt vergeleken tijdens het experiment.

   Ontwerp zulk een experiment voor 13 merken en 13 huisvrouwen waarbij elke huisvrouw 4 merken van stofzuigers test, elk merk door 4 huisvrouwen wordt uitgeprobeerd en elk paar merken door juist één huisvrouw vergeleken wordt. Kan je voor andere getallen dan 4 en 13 zulk experiment ontwerpen? Zo ja, voor welke getallen?

   Voor natuurlijke getallen $t \leqslant k \leqslant v$ en λ noemt men een experiment waarbij v merken worden getest en waarbij elke vrouw k merken beoordeelt, zodanig dat elke verzameling van t merken door juist λ vrouwen wordt vergeleken, een **t-(v,k,λ)-design**. Voor $\lambda = 1$ spreekt men van een **Steiner systeem** $S(t,k,v)$.

28. Een **difference set** in $\mathbb{Z}_m$ is een deelverzameling $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$ van $\mathbb{Z}_m$ zodanig dat voor elke $k \in \mathbb{Z}_m \setminus \{0\}$ er een *uniek* koppel (a_i, a_j) in S bestaat met $k \equiv a_i - a_j \mod m$.

   (a) Zoek een difference set in $\mathbb{Z}_{13}$ en in $\mathbb{Z}_7$.

   (b) Gegeven een difference set, kan je daar dan altijd een projectief vlak mee construeren? Hoe? Hoeveel punten zal dit vlak hebben op elke rechte?

   (c) Kan je bewijzen dat voor een difference set steeds geldt $m = n^2 + n + 1$?

   (d) Controleer dat $\{0, 1, 4, 14, 16\}$ een difference set is. In welke ring?