HOOFDSTUK 2

Projectieve meetkunde

2.1 Inleiding: van affien vlak naar projectief vlak

De affiene meetkunde vertoont zekere nadelen, onder meer:

1. Veel stellingen worden gecompliceerd door het feit dat men verschillende gevallen moet onderscheiden over de snijding van affiene deelruimten (zie bijvoorbeeld de dimensiestelling (stelling 1.1.6))

2. Om vlakke tekeningen van ruimtelijke situaties te maken (voor ons oog) is perspectief noodzakelijk. Voor een wiskundige beschrijving hiervan is de affiene meetkunde ontoereikend.

Beide problemen (en nog andere die we hier niet vermelden) worden opgelost door het invoeren van de projectieve meetkunde:
Wat (1) betreft: zie verder stelling 2.2.1
Wat (2) betreft: in 3D-"computer graphics" gebruikt men projectieve meetkunde als de wiskundige onderbouw.
Bovendien is de projectieve classificatie van kegelsneden, resp. kwadrieken eenvoudiger dan de affiene, gezien in de cursus MLA van eerste kandidatuur (zie [KI]). Voor meer toepassingen van de projectieve meetkunde, zie [B-R].

Laat ons, als inleiding, de constructie van het reële projectieve vlak $\mathrm{P}^2(\mathbb{R})$ beschrijven, vertrekkende van het reële affiene vlak $\mathbb{R}^2$ (dit is de reële vectorruimte $\mathbb{R}^2$ beschouwd als affiene ruimte over zichzelf).

We willen ervoor zorgen dat elk paar van rechten van $\mathbb{R}^2$ elkaar, projectief gezien, zal snijden. Daartoe voeren we voor elke rechte R van $\mathbb{R}^2$ een "**punt op** ∞" of "oneigenlijk punt" in, dat we $\infty(R)$ noteren. Dit doen we natuurlijk zodanig dat $R /\!\!/ S \Leftrightarrow \infty(R) = \infty(S)$.

- $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax + b\}$ (horizontale of schuine rechte).
  R wordt aangevuld met $\infty(R)$, dat we (a) noteren en dus alleen afhangt van de richting van R (bepaald door de richtingscoëfficiënt a).

- $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = c\}$ (verticale rechte)
  T wordt aangevuld met $\infty(T)$, dat we (∞) noteren. Alle verticale rechten hebben dus hetzelfde punt op ∞, namelijk (∞).

De verzameling van deze punten op ∞ noteren we $\infty(\mathbb{R}^2)$. Dus

$$\infty(\mathbb{R}^2) = \{(a) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{(\infty)\}$$

Stel nu

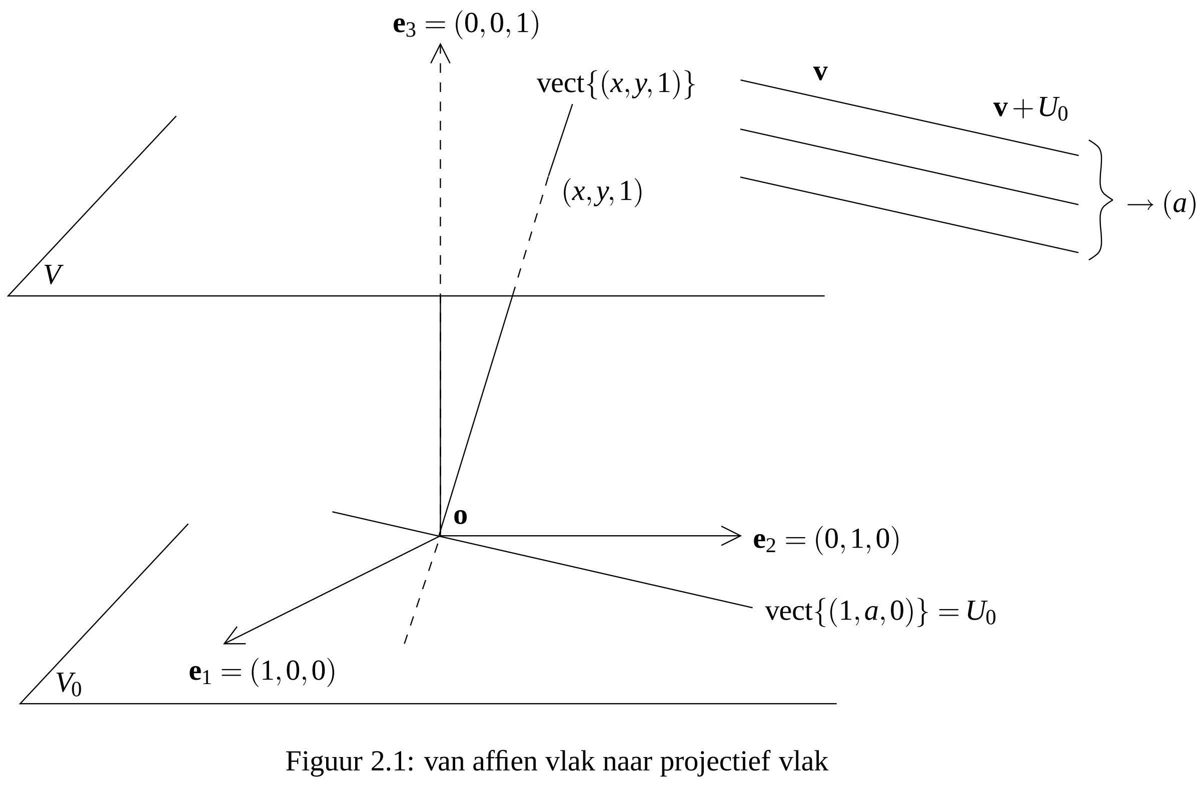
$$\widetilde{\mathbb{R}^2} = \mathbb{R}^2 \cup \infty(\mathbb{R}^2)$$

Projectief gezien, zouden alle punten van $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ dezelfde rol moeten spelen. Daartoe zoeken we een nieuwe beschrijving van $\widetilde{\mathbb{R}^2}$.

Identificeer $\mathbb{R}^2$ met het vlak $V = \{(x,y,1) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ van $\mathbb{R}^3$ d.m.v. de bijectie

$$\mathbb{R}^2 \to V : (x,y) \mapsto (x,y,1)$$

Zij V_0 het vlak door $\mathbf{o} = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ en $V_0 \mathbin{/\!/} V$, dus $V_0 = \{(x,y,0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
Een punt (x,y) van $\mathbb{R}^2$ (of $(x,y,1)$ van V) bepaalt precies één (ligt op precies één) 1-dimensionale deelruimte van $\mathbb{R}^3$, nl. $\langle \mathbf{o}, (x,y,1) \rangle = \text{vect}\{(x,y,1)\}$ (zie figuur 2.1).



Figuur 2.1: van affien vlak naar projectief vlak

Merk op dat *vect* $\{(x,y,1)\} \not\subset V_0$.
Omgekeerd: elke 1-dimensionale deelruimte vect$\{(\alpha,\beta,\gamma)\}$ van $\mathbb{R}^3$, die niet gelegen is in V_0, d.w.z. met $\gamma \neq 0$, snijdt V in precies 1 punt, nl. $(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}, 1)$, dat in onze identificatie correspondeert met het punt $(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma})$ van $\mathbb{R}^2$.

Een punt (a) van $\infty(\mathbb{R}^2)$ is het "punt op ∞" van alle rechten van $\mathbb{R}^2$ met richtingsvector $(1,a)$. Dit zijn, na onze identificatie van $\mathbb{R}^2$ met V precies de rechten van V die evenwijdig zijn (in $\mathbb{R}^3$) met de 1-dimensionale deelruimte $\text{vect}\{(1,a,0)\} \subset V_0 \setminus \text{vect}\{\mathbf{e}_2\}$.
Omgekeerd: elke 1-dimensionale deelruimte van V_0, verschillend van $\text{vect}\{\mathbf{e}_2\}$, d.w.z. elke 1-dimensionale deelruimte van $\mathbb{R}^3$ van de vorm $U_0 = \text{vect}\{(\alpha,\beta,0)\}$ met $\alpha \neq 0$ is de richting van alle rechten van V van de vorm $\mathbf{v}+U_0$ met $\mathbf{v} \in V$. Is $\mathbf{v} = (v_1,v_2,1)$, dan correspondeert zulke rechte $\mathbf{v}+U_0 = (v_1,v_2,1)+\text{vect}\{(\alpha,\beta,0)\} \subset V$ in onze identificatie met de rechte $R = (v_1,v_2)+\text{vect}\{(\alpha,\beta)\}$ van $\mathbb{R}^2$. Voor al deze rechten R van $\mathbb{R}^2$ geldt: $\infty(R) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$

Tenslotte correspondeert (∞) op analoge manier met een 1-dimensionale deelruimte $\text{vect}\{(0,1,0)\} = \text{vect}\{\mathbf{e}_2\}$ (verifieer).

Besluit: door te "projecteren" vanuit $\mathbf{o} \in \mathbb{R}^3$ hebben we een bijectie

$$\begin{aligned}\Psi : \quad \widetilde{\mathbb{R}^2} &\to \{\text{vect}\{\mathbf{v}\} \mid \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{o}\}\}\\ (x,y) &\mapsto \text{vect}\{(x,y,1)\}\\ (a) &\mapsto \text{vect}\{(1,a,0)\}\\ (\infty) &\mapsto \text{vect}\{(0,1,0)\}\end{aligned}$$

Door deze bijectie toe te passen kunnen we dus alle punten van $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ voorstellen door 1-dimensionale deelruimten van $\mathbb{R}^3$.
Men stelt $\mathrm{P}^2(\mathbb{R}) = \{\text{vect}\{\mathbf{v}\} \mid \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{o}\}\}$ en noemt dit het **reële projectieve vlak**.

$$\text{Merk op dat } \Psi^{-1} : \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{P}^2(\mathbb{R}) & \to & \widetilde{\mathbb{R}^2} \\ \underset{\text{met } (\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3\setminus\{\mathbf{o}\}}{\text{vect}\{(\alpha,\beta,\gamma)\}} & \mapsto & \begin{cases} \left(\frac{\alpha}{\gamma},\frac{\beta}{\gamma}\right) & \text{als } \gamma \neq 0 \\ \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) & \text{als } \gamma = 0,\ \alpha \neq 0 \\ (\infty) & \text{als } \gamma = \alpha = 0 \end{cases}\end{array}$$

Een stel (gewone) **homogene coördinaten** van een punt p van $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ is een tripel $(X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{o}\}$ zodanig dat $\Psi(p) = \text{vect}\{(X,Y,Z)\}$. (Merk op dat de homogene coördinaten van een punt dus slechts op een niet-nulle evenredigheidsfactor na bepaald zijn).

Wat doet deze bijectie met de **rechten van** $\widetilde{\mathbb{R}^2}$, dit zijn de gewone rechten van $\mathbb{R}^2$ aangevuld met hun punten op ∞, en een bijkomende **rechte op oneindig** van $\mathbb{R}^2$, die per definitie de verzameling $\infty(\mathbb{R}^2)$ van alle "punten op oneindig" is (zie hoger).

Zij $\widetilde{R} = \{(x,ax+b) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(a)\}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \Psi(\widetilde{R}) &= \bigcup_{x\in\mathbb{R}} \{\Psi(x,ax+b)\} \cup \{\Psi((a))\}\\ &= \bigcup_{x\in\mathbb{R}} \{\text{vect}\{(x,ax+b,1)\}\} \cup \{\text{vect}\{(1,a,0)\}\}\\ &\underset{\text{oef}}{=} \{\text{vect}\{\mathbf{v}\} \mid \mathbf{v} \in \langle(0,0,0),(1,a,0),(0,b,1)\rangle \setminus \{\mathbf{o}\}\}\end{aligned}$$

Het vlak $\langle(0,0,0),(1,a,0),(0,b,1)\rangle$ heeft als cartesische vergelijking:

$$det\begin{bmatrix} X & 1 & 0 \\ Y & a & b \\ Z & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow Y = aX + bZ \quad \text{(verifieer)}$$

$\Psi(\widetilde{R})$ is dus de verzameling van alle 1-dimensionale deelruimten van het vlak van $\mathbb{R}^3$ met cartesische vergelijking $Y = aX + bZ$.
Analoog is voor de aangevulde rechte

$$\widetilde{T} = \{(c,y) \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{(\infty)\},$$

$\Psi(\widetilde{T})$ de verzameling van alle 1-dimensionale deelruimten van het vlak van $\mathbb{R}^3$ met cartesische vergelijking $X = cZ$
Tenslotte is $\Psi(\infty(\mathbb{R}^2))$ de verzameling van alle $1-\dim$ deelruimten van het vlak van $\mathbb{R}^3$ met cartesische vergelijking $Z = 0$, d.w.z. het vlak V_0 uit figuur 2.1.
Een rechte van $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ wordt dus bepaald door een vlak door **o** van $\mathbb{R}^3$.
Een cartesische vergelijking van dit vlak is van de vorm $aX + bY + cZ = 0$ met $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Deze vergelijking noemt men de **homogene vergelijking** van de rechte.

Oefening. $\widetilde{\mathbb{R}^2}$ heeft de volgende eigenschappen:

$$p, q \in \widetilde{\mathbb{R}^2}, p \neq q \Rightarrow \exists!\ \text{rechte } \widetilde{R} \text{ van } \widetilde{\mathbb{R}^2} \text{ met } p, q \in \widetilde{R} \tag{P1}$$

$$\widetilde{R}, \widetilde{S} \text{ rechten van } \widetilde{\mathbb{R}^2}, \widetilde{R} \neq \widetilde{S} \Rightarrow \exists!\, p \in \widetilde{\mathbb{R}^2} \text{ met } p \in \widetilde{R} \text{ en } q \in \widetilde{S} \tag{P2}$$

$$\text{er bestaan ten minste 3 niet-collineaire punten in } \widetilde{\mathbb{R}^2} \tag{P3}$$

$$\text{elke rechte van } \widetilde{\mathbb{R}^2} \text{ bevat ten minste 3 punten} \tag{P4}$$

Deze eigenschappen zijn zo fundamenteel dat men ze als axiomastelsel neemt voor een **(axiomatisch) projectief vlak** P, d.i. dus de verzameling punten en rechten (deelverzamelingen van de verzameling punten) die de axioma's (P1), (P2), (P3), (P4) vervullen (met P i.p.v. $\widetilde{\mathbb{R}^2}$) (vergelijk met definitie 1.4.1 van een axiomatisch affien vlak).
Dit axiomastelsel (en analoge axiomastelsels voor hogerdimensionale projectieve ruimten) zijn het (de) uitgangspunt(en) van de zogenaamde **synthetische projectieve meetkunde**.
We zullen echter verder analytisch te werk gaan, steunend op de lineaire algebra en op hoofdstuk 1.

2.2 Projectieve ruimten

Definitie 1. *Zij V een $\mathbb{K}$-vectorruimte met* $\dim V \geq 1$.
De ***projectieve ruimte*** $P = \mathrm{P}(V)$ ***over*** V *is de verzameling van de 1-dimensionale deelruimten van V, die men de punten van* $\mathrm{P}(V)$ *noemt. De* ***(projectieve) dimensie*** *van* $\mathrm{P}(V)$ *is* $(\dim V) - 1$.
Een projectieve ruimte met (projectieve) dimensie
0, is een singleton.
1, heet een ***projectieve rechte****.*

*2, heet een **projectief vlak**.*
Is $U \leqslant V$ met $\dim U = m+1$, dan is

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(U) &= \{\mathrm{vect}\{\mathbf{u}\} \mid \mathbf{u} \in U \setminus \{\mathbf{o}\}\} \\ &= \{\mathrm{vect}\{\mathbf{u}\} \in \mathrm{P}(V) \mid \mathrm{vect}\{\mathbf{u}\} \subset U\} \end{aligned}$$

*en noemt men $\mathrm{P}(U)$ een m-dimensionale **projectieve deelruimte** van $\mathrm{P}(V)$. We noteren dit $\mathrm{P}(U) \leqslant_p \mathrm{P}(V)$. Een projectieve deelruimte van $\mathrm{P}(V)$ met (projectieve) dimensie $(\dim \mathrm{P}(V)) - 1$ heet een **(projectief) hypervlak** van $\mathrm{P}(V)$.*

Opmerkingen. 1. Men kan $\mathrm{P}(V)$ ook beschouwen als de quotiëntverzameling $(V \setminus \{\mathbf{o}\})/\sim$, waarbij $\sim$ de equivalentierelatie is op $V \setminus \{\mathbf{o}\}$ bepaald door:

$$\mathbf{v} \sim \mathbf{w} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : \mathbf{w} = \lambda \mathbf{v} \qquad (\Leftrightarrow \mathrm{vect}\{\mathbf{v}\} = \mathrm{vect}\{\mathbf{w}\})$$

Men noteert dan de quotiëntafbeelding:

$$p : V \setminus \{\mathbf{o}\} \to V \setminus \{\mathbf{o}\}/\sim : \mathbf{v} \mapsto (\mathrm{vect}\{\mathbf{v}\}) \setminus \{\mathbf{o}\}$$

Duidelijk:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{P}(V) & \leftrightarrow & V \setminus \{\mathbf{o}\}/\sim \\ \mathrm{vect}\{\mathbf{v}\} & \mapsto & (\mathrm{vect}\{\mathbf{v}\}) \setminus \{\mathbf{o}\} \end{array}$$

2. Een m-dimensionale projectieve deelruimte van $\mathrm{P}(V)$ correspondeert dus met een $(m+1)$-dimensionale deelruimte van V en omgekeerd. Meer precies hebben we een bijectie:

$$\begin{array}{rccc} \Lambda : & \mathscr{L} = \{U \mid U \leqslant V\} & \to & \mathscr{P} = \{Q \mid Q \leqslant_p \mathrm{P}(V)\} \\ & U & \mapsto & \mathrm{P}(U) \end{array}$$

die bovendien voldoet aan:

$$\forall U_1, U_2 \in \mathscr{L} : U_1 \subset U_2 \Leftrightarrow \Lambda(U_1) \subset \Lambda(U_2)$$

$$\text{en } \dim \Lambda(U) = (\dim U) - 1$$

(oefening: beschrijf $\Lambda^{-1} : \mathscr{P} \to \mathscr{L}$)

3. Is $V = \mathbb{K}^{n+1}$, dan schrijft men $\mathrm{P}^n(\mathbb{K})$ i.p.v. $\mathrm{P}(\mathbb{K}^{n+1})$ en spreekt men van de ***n*-dimensionale projectieve ruimte** over $\mathbb{K}$ (i.p.v. over V) (vergelijk met de notatie $\mathrm{P}^2(\mathbb{R})$ van paragraaf 2.1).

De homogene coördinaten, ingevoerd in 2.1, veralgemeent men als volgt:

Definitie 2. *Zij V een $(n+1)$-dimensionale $\mathbb{K}$-vectorruimte. Zij $A = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n+1})$ een basis van V. Zij $\mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{o}\}$ en $p = \mathrm{vect}\{\mathbf{v}\} \in \mathrm{P}(V)$. Dan noemt men, indien $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n+1} v_i \mathbf{a}_i$, $(v_1, \ldots, v_{n+1})$ een **stel van homogene coördinaten van** p **t.o.v.** A.*

$(w_1, \ldots, w_{n+1})$ is ook een stel van homogene coördinaten van p t.o.v. A

$$\Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0\} : (w_1,\ldots,w_{n+1}) = \lambda(v_1,\ldots,v_{n+1})$$

Een hypervlak H van $\mathrm{P}(V)$ wordt bepaald door een $n-\dim$ deelruimte U van V. Er bestaat een $f \in V^*\setminus\{\mathbf{o}\}$ zodanig dat $U = f^{-1}(0)$. Zij $f(\mathbf{a}_i) = \alpha_i$ met $i \in \{1,\ldots,n+1\}$. Dan geldt:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n+1} v_i\mathbf{a}_i \in U \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i v_i = 0 \qquad (*)$$

Bijgevolg: $p = \mathrm{vect}\{\mathbf{v}\} \in H = \mathrm{P}(U)$
$\Leftrightarrow$ elk stel homogene coördinaten $(v_1,\ldots,v_{n+1})$ van p t.o.v. A voldoet aan $(*)$.
$\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i x_i = 0$ heet de **homogene vergelijking** t.o.v. A van het hypervlak $H = \mathrm{P}(U)$.

Naar analogie met de eigenschappen van deelruimten van een vectorruimte kunnen we eigenschappen formuleren van projectieve deelruimten van een projectieve ruimte.

Eigenschap 1. *De doorsnede van een familie projectieve deelruimten van een projectieve ruimte is opnieuw een projectieve deelruimte. Meer precies:*

$$P_i = \mathrm{P}(U_i) \leqslant_p \mathrm{P}(V) \quad (i \in I) \Rightarrow \bigcap_{i\in I} P_i = \mathrm{P}\left(\bigcap_{i\in I} U_i\right) \leqslant_p \mathrm{P}(V)$$

Bewijs. (oefening) □

Toepassing. (verifieer als oefening)
Zij $\mathrm{P}(U) \leqslant_p \mathrm{P}(V)$ met $\dim\mathrm{P}(U) = m$, $\dim\mathrm{P}(V) = n$ ($0 \leq m \leq n$). Dan bestaan er $n-m$ hypervlakken $H_1,\ldots,H_{n-m}$ van $\mathrm{P}(V)$ zodanig dat $\mathrm{P}(U) = H_1\cap\ldots\cap H_{n-m}$. Bijgevolg heeft, na de keuze van een basis A van V, de deelruimte $\mathrm{P}(U)$ een stel homogene vergelijkingen t.o.v. A van de vorm:

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha_{1,1}x_1 + \ldots + \alpha_{1,n+1}x_{n+1} = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{n-m,1}x_1 + \ldots + \alpha_{n-m,n+1}x_{n+1} = 0 \end{array}\right. \quad \text{met} \quad \begin{array}{c} (\alpha_{i,1},\ldots,\alpha_{i,n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}\setminus\{\mathbf{o}\} \\ (i \in \{1,\ldots,n-m\}) \end{array}$$

De unie van projectieve deelruimten is i.h.a. geen projectieve deelruimte (voorbeeld?), maar naar analogie met $S+T = \mathrm{vect}(S\cup T)$ voor $S,T \leqslant V$, kunnen we een "projectieve som" van $P_1, P_2 \leqslant_p \mathrm{P}(V)$ invoeren door het projectieve analogon van "vect" in te voeren.

Definitie 3. *Zij $A \subset \mathrm{P}(V)$. De **projectieve omhullende** van A in $\mathrm{P}(V)$ (of de door A voortgebrachte projectieve deelruimte van $\mathrm{P}(V)$) is de kleinste projectieve deelruimte van $\mathrm{P}(V)$ die A omvat. We noteren deze $\mathrm{proj}(A)$. M.a.w. $\mathrm{proj}(A) = \bigcap\{\mathrm{P}(U) \mid A \subset \mathrm{P}(U) \leqslant_p \mathrm{P}(V)\}$ (verklaar)*

Eigenschap 2. $A \subset \mathrm{P}(V) \Rightarrow \mathrm{proj}(A) = \mathrm{P}(\mathrm{vect}\{\mathbf{v} \in V\setminus\{\mathbf{o}\} \mid \mathrm{vect}\{\mathbf{v}\} \in A\})$
(i.h.b. geldt: $\mathrm{proj}(\varnothing) = \varnothing$)

Bewijs. Zij $\rho : V\setminus\{\mathbf{o}\} \to \mathrm{P}(V) : \mathbf{v} \to \mathrm{vect}\{\mathbf{v}\}$
$A \subset \mathrm{P}(U) \Leftrightarrow \rho^{-1}(A) \subset \rho^{-1}(\mathrm{P}(U)) = U\setminus\{\mathbf{o}\} \Leftrightarrow \rho^{-1}(A) \subset U$
en ook $\mathrm{P}(U) \leqslant_p \mathrm{P}(V) \Leftrightarrow U \leqslant V$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \operatorname{proj}(A) &= \bigcap\{\mathrm{P}(U) \mid A \subset \mathrm{P}(U) \leqslant_p \mathrm{P}(V)\} \\
&= \bigcap\{\mathrm{P}(U) \mid \rho^{-1}(A) \subset U \leqslant V\} \\
&= \mathrm{P}\left\{\bigcap\{U \mid \rho^{-1}(A) \subset U \leqslant V\}\right\} \\
&= \mathrm{P}\left\{\operatorname{vect}\{\rho^{-1}(A)\}\right\} \\
&= \mathrm{P}(\operatorname{vect}\{\mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{o}\} \mid \operatorname{vect}\{\mathbf{v}\} \in A\})
\end{aligned}$$

□

Gevolg 1. $S, T \leqslant V \Rightarrow \operatorname{proj}(\mathrm{P}(S) \cup \mathrm{P}(T)) = \mathrm{P}(S+T)$

Bewijs. (oefening) □

Toepassing. $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V \setminus \{\mathbf{o}\}$

$$\Rightarrow \operatorname{proj}(\{\operatorname{vect}\{\mathbf{v}_1\}, \ldots, \operatorname{vect}\{\mathbf{v}_n\}\}) = \mathrm{P}(\operatorname{vect}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\})$$

Dan kunnen we nu de dimensiestelling voor projectieve deelruimten aantonen, die heel wat eenvoudiger is dan de corresponderende stelling voor affiene deelruimten (zie stelling 1.1.6)

Stelling 1. *("Dimensiestelling voor projectieve deelruimten")*
Zij $P_1 = \mathrm{P}(S)$, $P_2 = \mathrm{P}(T)$ eindigdimensionale projectieve deelruimten van een projectieve ruimte $P = \mathrm{P}(V)$, dan geldt:

$$\dim P_1 + \dim P_2 = \dim(P_1 \cap P_2) + \dim(\operatorname{proj}(P_1 \cup P_2))$$

Bewijs.

$$\begin{aligned}
\dim P_1 + \dim P_2 &= (\dim S) - 1 + (\dim T) - 1 \\
&= \dim S + \dim T - 2 \\
&\overset{\text{Grassmann}}{=} \dim(S \cap T) + \dim(S+T) - 2 \\
&= \dim \mathrm{P}(S \cap T) + 1 + \dim \mathrm{P}(S+T) + 1 - 2 \\
&\underset{\text{gev 1}}{\overset{\text{eig 1}}{=}} \dim(P_1 \cap P_2) + \dim \operatorname{proj}(P_1 \cup P_2)
\end{aligned}$$

□

Gevolg 2. *Zij $P = \mathrm{P}(V)$ een eindigdimensionale projectieve ruimte. Dan geldt:*

1. *$P_1, P_2 \leqslant_p P$ en $\dim P_1 + \dim P_2 \geqslant \dim P \Rightarrow P_1 \cap P_2 \neq \varnothing$*
2. *H hypervlak van P, $p \in P \setminus H \Rightarrow$ elke projectieve rechte door p snijdt H in 1 punt.*

Bewijs. pas stelling 1 toe □

Merk op dat gevolg 2 niet meer geldig is als men projectief vervangt door affien (verklaar!). Volgende stelling kan gezien worden als een projectieve versie van stelling 1.1.7.

Stelling 2. *Zij* $\mathrm{P}(V)$ *een projectieve ruimte over* V.
Zij $p_1 = \mathrm{vect}\{\mathbf{v}_1\}, \ldots, p_n = \mathrm{vect}\{\mathbf{v}_n\}$ *punten van* $\mathrm{P}(V)$. *Dan zijn volgende voorwaarden equivalent:*

1. $\forall j \in \{1, \ldots, n\} : p_j \notin \mathrm{proj}\{p_1, \ldots, \widehat{p_j}, \ldots, p_n\}$
2. $\dim \mathrm{proj}\{p_1, \ldots, p_n\} = n-1$
3. $\dim \mathrm{vect}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} = n$
4. $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ *zijn lineair onafhankelijk in* V

Bewijs. (oefening) □

Definitie 4. *Punten* $p_1, \ldots, p_n$ *die voldoen aan één der voorwaarden (en dan automatisch aan de 4 voorwaarden) van stelling 2 heten* ***projectief onafhankelijk*** *in* $\mathrm{P}(V)$. *In dat geval vormen ze een* ***(projectief) simplex*** *van* $\mathrm{proj}\{p_1, \ldots, p_n\}$

Voorbeeld/Opmerking. Zij $V = \mathbb{R}^3$, dus $\mathrm{P}(V) = \mathrm{P}^2(\mathbb{R})$. Dan vormen $p_1 = \mathrm{vect}\{(1,0,0)\}$, $p_2 = \mathrm{vect}\{(0,1,0)\}$ en $p_3 = \mathrm{vect}\{(0,0,1)\}$ een projectief simplex van $\mathrm{P}^2(\mathbb{R})$. Nochtans noemen we (p_1, p_2, p_3) **geen** projectieve basis van $\mathrm{P}^2(\mathbb{R})$. Het probleem is dat evengoed geldt:

$$p_1 = \mathrm{vect}\{(1,0,0)\},\ p_2 = \mathrm{vect}\{(0,2,0)\},\ p_3 = \mathrm{vect}\{(0,0,3)\}$$

zodat voor het punt $p = \mathrm{vect}\{(1,2,3)\}$ geldt: $(1,2,3)$ is een stel homogene coördinaten van p als men de basis $((1,0,0),(0,1,0),\ (0,0,1))$ van $\mathbb{R}^3$ gebruikt, terwijl $(1,1,1)$ een stel homogene coördinaten van p is als men de basis $((1,0,0),(0,2,0),(0,0,3))$ van $\mathbb{R}^3$ gebruikt. Het projectief simplex (p_1, p_2, p_3) van $\mathrm{P}^2(\mathbb{R})$ laat dus niet toe om (zelfs op een niet-nulle evenredigheidsfactor na) ondubbelzinnig voor elk punt een stel homogene coördinaten te bepalen.

We lossen dit probleem als volgt op.

Definitie 5. *Zij* $\mathrm{P}(V)$ *een n-dimensionale projectieve ruimte. Een (geordende)* ***projectieve basis*** *van* $\mathrm{P}(V)$ *is een geordend* $(n+2)$*-tupel* $(p_1, \ldots, p_{n+1}, q)$ *van punten van* $\mathrm{P}(V)$ *waarvoor een basis* $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n+1})$ *van* V *bestaat zodanig dat*

$$\begin{cases} p_i = \mathrm{vect}\{\mathbf{e}_i\} & \text{voor } i \in \{1, \ldots, n+1\}, \text{ en} \\ q = \mathrm{vect}\{\mathbf{e}_1 + \ldots + \mathbf{e}_{n+1}\} \end{cases} \tag{$*$}$$

Het volgende lemma toont aan dat dit een goede definitie is.

Lemma 1 (of definitie 5'). *Zij* $(p_1, \ldots, p_{n+1}, q)$ *een projectieve basis van* $\mathrm{P}(V)$.
Zij $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n+1})$ *en* $(\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_{n+1})$ *basissen van* V *met eigenschappen* $(*)$. *Dan*

$$\exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : \mathbf{e}'_i = \lambda \mathbf{e}_i \quad \forall i \in \{1, \ldots, n+1\}$$

Bijgevolg heeft elk punt p *van* $\mathrm{P}(V)$ *een (op een factor van* $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ *na) welbepaald stel homogene coördinaten* $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ *dat men een stel* ***projectieve coördinaten*** *van* p *t.o.v. de projectieve basis* $(p_1, \ldots, p_{n+1}, q)$ *noemt. I.h.b. heeft* q *een stel projectieve coördinaten* $(1, \ldots, 1)$ *en daarom noemt men* q *het* ***eenheidspunt*** *van de projectieve basis.*

Bewijs. $(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_{n+1})$, $(\mathbf{e}'_1,\ldots,\mathbf{e}'_{n+1})$ zijn basissen van V met

$$\begin{cases}\text{vect}\{\mathbf{e}_i\}=p_i=\text{vect}\{\mathbf{e}'_i\} \quad \forall i\in\{1,\ldots,n+1\}\\ \text{vect}\{\ \mathbf{e}_1+\ldots+\mathbf{e}_{n+1}\}=q=\text{vect}\{\mathbf{e}'_1+\ldots+\mathbf{e}'_{n+1}\}\end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases}\forall i\in\{1,\ldots,n+1\}:\exists\lambda_i\in\mathbb{K}\setminus\{0\}:\mathbf{e}'_i=\lambda_i\mathbf{e}_i\\ \exists\lambda\in\mathbb{K}\setminus\{0\}:\mathbf{e}'_1+\ldots+\mathbf{e}'_{n+1}=\lambda\,(\mathbf{e}_1+\ldots+\mathbf{e}_{n+1})\end{cases}$$

$\Rightarrow \lambda_1\mathbf{e}_1+\ldots+\lambda_{n+1}\mathbf{e}_{n+1}=\lambda\,(\mathbf{e}_1+\ldots+\mathbf{e}_{n+1})$
$\Rightarrow \lambda_1=\ldots=\lambda_{n+1}=\lambda$ □

Gevolg 3. *Zij $P=\mathrm{P}(V)$ een n-dimensionale projectieve ruimte.*
Zij $(p_1,\ldots,p_{n+2})$ een geordend $(n+2)$-tal punten van $\mathrm{P}(V)$. Dan geldt:

$$(p_1,\ldots,p_{n+2}) \text{ is een projectieve basis}$$

$$\Leftrightarrow \forall j\in\{1,\ldots,n+2\}:\ p_1,\ldots,\widehat{p}_j,\ldots,p_{n+2} \text{ zijn projectief onafhankelijk in } P.$$

Bewijs.

- "⇒": Zij (volgens definitie 5) $(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_{n+1})$ een basis van V zodanig dat:

$$\begin{cases}p_i=\text{vect}\{\mathbf{e}_i\} & \text{voor } i\in\{1,\ldots,n+1\}\\ p_{n+2}=\text{vect}\left\{\sum\limits_{i=1}^{n+1}\mathbf{e}_i\right\}\end{cases}$$

  Uit stelling 2 volgt dan: $p_1,\ldots,p_{n+1}\,(,\ \widehat{p_{n+2}})$ zijn projectief onafhankelijk in P omdat $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_{n+1}$ lineair onafhankelijk zijn in V. Ook $p_1,\ldots,\widehat{p}_j,\ldots,p_{n+1}$, p_{n+2} zijn projectief onafhankelijk in P omdat $\mathbf{e}_1,\ldots,\widehat{\mathbf{e}}_j,\ldots,\mathbf{e}_{n+1}$, $\sum_{i=1}^{n+1}\mathbf{e}_i$ lineair onafhankelijk zijn in V ($j\in\{1,\ldots,n+1\}$).

- "⇐": Neem $j=n+2$.
  Dan zijn bij onderstelling $p_1=\text{vect}\{\mathbf{v}_1\}$,…, $p_{n+1}=\text{vect}\{\mathbf{v}_{n+1}\}$ projectief onafhankelijk in P.
  Stelling 2 impliceert dat $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{n+1}$ lineair onafhankelijk zijn in V en dus is $(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{n+1})$ een basis van V (omdat $\dim V=n+1$).

$$p_{n+2}=\text{vect}\{\mathbf{v}_{n+2}\}\Rightarrow\exists\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+1}\in\mathbb{K}:\mathbf{v}_{n+2}=\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i\mathbf{v}_i$$
$$\forall j\in\{1,\ldots,n+1\}:\lambda_j\neq 0$$

  (Immers $\lambda_j=0\Rightarrow\mathbf{v}_1,\ldots,\widehat{\mathbf{v}}_j,\ldots,\mathbf{v}_{n+1}\,\mathbf{v}_{n+2}$ zijn lineair afhankelijk
  $\overset{\text{St 2}}{\Rightarrow} p_1,\ldots,\widehat{p}_j,\ldots,p_{n+1},\ p_{n+2}$ zijn projectief afhankelijk, hetgeen strijdig is met de onderstelling).
  Stel $\mathbf{e}_i=\lambda_i\mathbf{v}_i \quad (i\in\{1,\ldots,n+1\})$

Dan is $(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_{n+1})$ nog een basis van V en geldt

$$\begin{cases} p_i = \text{vect}\{\mathbf{e}_i\} \qquad (i \in \{1,\ldots,n+1\}) \\ p_{n+2} = \text{vect}\left\{\sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{e}_i\right\} \end{cases}$$

zodat $(p_1,\ldots,p_{n+1},p_{n+2})$ een projectieve basis is van P.

$\square$

Voorbeeld 1. (p_1,p_2,p_3,q), met $p_1 = \text{vect}\{(1,0,0)\}$, $p_2 = \text{vect}\{(0,1,0)\}$, $p_3 = \text{vect}\{(0,0,1)\}$ en $q = \text{vect}\{(1,1,1)\}$, is een projectieve basis van $\mathrm{P}^2(\mathbb{R})$. $(1,2,3)$ is een stel projectieve coördinaten van $p = \text{vect}\{(1,2,3)\}$ t.o.v. (p_1,p_2,p_3,q).

2.3 Projectiviteiten

Definitie 1. *Zij $P = \mathrm{P}(V)$ een projectieve ruimte over een $\mathbb{K}$-vectorruimte V en $P' = \mathrm{P}(V')$ een projectieve ruimte over een $\mathbb{K}$-vectorruimte V'.*
*Een afbeelding $\pi : P \to P'$ heet **projectief** indien:*

$$\exists F \in \mathscr{L}(V;V') \text{ zodanig dat } \pi(\text{vect}\{\mathbf{v}\}) = \text{vect}\{F(\mathbf{v})\} \quad \forall \mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{o}\}$$

Opmerking 1. Als $\mathbf{v} \in \text{Ker}\,F$, dan is $F(\mathbf{v}) = \mathbf{o} \Rightarrow \text{vect}\{F(\mathbf{v})\} \notin P'$
Dus is π slechts gedefinieerd op:

$$\begin{aligned} \{\text{vect}\{\mathbf{v}\} \mid F(\mathbf{v}) \neq \mathbf{o}\} &= \{\text{vect}\{\mathbf{v}\} \mid \mathbf{v} \in V \setminus \text{Ker}\,F\} \\ &= \{\text{vect}\{\mathbf{v}\} \mid \mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{o}\}\} \setminus \{\text{vect}\{\mathbf{v}\} \mid \mathbf{v} \in \text{Ker}\,F \setminus \{\mathbf{o}\}\} \\ &= \mathrm{P}(V) \setminus \mathrm{P}(\text{Ker}\,F) \\ &= P \setminus \mathrm{P}(\text{Ker}\,F) \end{aligned}$$

Naar analogie met stelling 1.2.1 kunnen we ons afvragen of $F \in \mathscr{L}(V;V')$ met $\mathrm{P}(F) = \pi$ uniek is. Het antwoord is natuurlijk negatief omdat $\mathrm{P}(\lambda F) = \mathrm{P}(F) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ (verklaar). Wel geldt:

Stelling 1. *$F, G \in \mathscr{L}(V;V')$ bepalen dezelfde projectieve afbeelding π*

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : G = \lambda F$$

Bewijs. $\boxed{\Leftarrow}$: (triviaal)
$\boxed{\Rightarrow}$: $\pi = \mathrm{P}(F) = \mathrm{P}(G)$
$\Rightarrow \forall \mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{o}\} : \text{vect}\{F(\mathbf{v})\} = \text{vect}\{G(\mathbf{v})\}$
$\Rightarrow \forall \mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{o}\} : \exists \lambda_{\mathbf{v}} \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : G(\mathbf{v}) = \lambda_{\mathbf{v}} F(\mathbf{v})$
We moeten dus bewijzen dat we eenzelfde $\lambda_{\mathbf{v}}$ kunnen vinden voor elke $\mathbf{v} \in V \setminus \text{Ker}\,F$. (Voor $\mathbf{v} \in \text{Ker}\,F \setminus \{0\}$ is elke λ goed omdat dan $F(\mathbf{v}) = G(\mathbf{v}) = \mathbf{o}$.)
Voor een $\mathbf{w} \in \text{vect}\{\mathbf{v}\}$ kunnen we $\lambda_{\mathbf{v}} = \lambda_{\mathbf{w}}$ nemen omdat:

$$\mathbf{w} = \alpha \mathbf{v} \Rightarrow G(\mathbf{w}) = \alpha G(\mathbf{v}) = \alpha \lambda_{\mathbf{v}} F(\mathbf{v}) = \lambda_{\mathbf{v}} F(\mathbf{w})$$

Onderstel nu dat $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V \setminus \mathrm{Ker} F$ lineair onafhankelijk zijn. Twee gevallen zijn mogelijk:

(i). $\underline{\mathrm{vect}\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\} \cap \mathrm{Ker} F = \{\mathbf{o}\}}$
$\Rightarrow F(\mathbf{v})$ en $F(\mathbf{w})$ zijn lineair onafhankelijk, want

$$\begin{aligned} \alpha F(\mathbf{v}) + \beta F(\mathbf{w}) = 0 \quad & \Leftrightarrow F(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) = 0 \\ & \left.\begin{aligned} &\Rightarrow \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} \in \mathrm{Ker} F \\ &\text{en } \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} \in \mathrm{vect}\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} = \mathbf{o} \\ & \Rightarrow \alpha = \beta = 0 \end{aligned}$$

en uit

$$\begin{aligned} G(\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= \lambda_{\mathbf{v}+\mathbf{w}} F(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \lambda_{\mathbf{v}+\mathbf{w}} (F(\mathbf{v}) + F(\mathbf{w})) \\ &= G(\mathbf{v}) + G(\mathbf{w}) = \lambda_{\mathbf{v}} F(\mathbf{v}) + \lambda_{\mathbf{w}} F(\mathbf{w}) \end{aligned}$$

volgt dan:

$$\lambda_{\mathbf{v}} = \lambda_{\mathbf{v}+\mathbf{w}} = \lambda_{\mathbf{w}}$$

(ii). $\underline{\mathrm{vect}\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\} \cap \mathrm{Ker} F = \mathrm{vect}\{\mathbf{x}\}}$ met $\mathbf{x} \notin \mathrm{vect}\{\mathbf{v}\} \cup \mathrm{vect}\{\mathbf{w}\}$
$\Rightarrow \mathbf{x} \in \mathrm{vect}\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\} \cap \mathrm{Ker} F$
$\Rightarrow \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : \mathbf{x} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} G(\mathbf{x}) &= \lambda_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}) = \mathbf{o} \\ &= \alpha G(\mathbf{v}) + \beta G(\mathbf{w}) \\ &= \alpha\lambda_{\mathbf{v}} F(\mathbf{v}) + \beta\lambda_{\mathbf{w}} F(\mathbf{w}) \\ &= F(\alpha\lambda_{\mathbf{v}}\mathbf{v} + \beta\lambda_{\mathbf{w}}\mathbf{w}) = \mathbf{o} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha\lambda_{\mathbf{v}}\mathbf{v} + \beta\lambda_{\mathbf{w}}\mathbf{w} \in \mathrm{Ker} F$$

en $\alpha\lambda_{\mathbf{v}}\mathbf{v} + \beta\lambda_{\mathbf{w}}\mathbf{w} \in \mathrm{vect}\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$
$\Rightarrow \exists\, \gamma \in \mathbb{K} : \alpha\lambda_{\mathbf{v}}\mathbf{v} + \beta\lambda_{\mathbf{w}}\mathbf{w} = \gamma\mathbf{x}$ en $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}$
$\Rightarrow \alpha\lambda_{\mathbf{v}}\mathbf{v} + \beta\lambda_{\mathbf{w}}\mathbf{w} = \alpha\gamma\mathbf{v} + \beta\gamma\mathbf{w}$ en vermits $\mathbf{v}$ en $\mathbf{w}$ lineair onafhankelijk zijn geldt:

$$\left.\begin{aligned} \alpha\lambda_{\mathbf{v}} = \alpha\gamma, \quad \alpha \neq 0 \Rightarrow \lambda_{\mathbf{v}} = \gamma \\ \beta\lambda_{\mathbf{w}} = \beta\gamma, \quad \beta \neq 0 \Rightarrow \lambda_{\mathbf{w}} = \gamma \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda_{\mathbf{v}} = \gamma = \lambda_{\mathbf{w}}$$

Besluit: $\lambda_{\mathbf{v}}$ kan in alle gevallen onafhankelijk van $\mathbf{v}$ gekozen worden. □

Definitie 2. *Zij $P = \mathrm{P}(V)$ en $P' = \mathrm{P}(V')$ zoals in definitie 1. Een afbeelding $\pi : P \to P'$ die projectief is en bijectief is (en gedefinieerd op gans P!) heet een **projectief isomorfisme**. Een projectief isomorfisme van P naar zichzelf heet een **projectiviteit** van P.*

Eigenschap 1. *Zij V en V' twee $\mathbb{K}$-vectorruimten en stel $P = \mathrm{P}(V)$ en $P' = \mathrm{P}(V')$. Dan gelden volgende eigenschappen.*

1. *$\pi : P \to P'$ projectief isomorfisme*

$$\Leftrightarrow \exists F : V \to V' \text{ isomorfisme zodanig dat } \pi = \mathrm{P}(F)$$

I.h.b. π projectiviteit van $P \Leftrightarrow \exists F \in \mathrm{GL}(V) : \pi = \mathrm{P}(F)$

2. $\pi : P \to P'$ *projectief isomorfisme,* $\mathrm{P}(U) \leqslant_p P$ *met* $\dim \mathrm{P}(U) = m$
   $\Rightarrow \pi(\mathrm{P}(U)) \leqslant_p P'$ *met* $\dim \pi(\mathrm{P}(U)) = m$

3. $\dim \mathrm{P}(V) = n \Rightarrow \mathrm{P}(V)$ *is projectief isomorf met* $\mathrm{P}^n(\mathbb{K})$

Bewijs. (oefening) □

Stelling 2. *De projectiviteiten van* $P = \mathrm{P}(V)$ *vormen een permutatiegroep op P die men* $\mathrm{PGL}(V)$ *(of* $\mathrm{GP}(V)$*) noteert. De afbeelding*

$$\mathrm{P} : (\mathrm{GL}(V), \circ) \to (\mathrm{PGL}(V), \circ) : F \mapsto \mathrm{P}(F)$$

is een groepsepimorfisme met $\mathrm{Ker}\,\mathrm{P} = H_0(V) = \{\lambda 1_V \mid \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\}$

Bewijs.

1. $1_{\mathrm{P}} = \mathrm{P}(1_V) \in \mathrm{PGL}(V)$

2. $\mathrm{P}(F), \mathrm{P}(G) \in \mathrm{PGL}(V) \Rightarrow \mathrm{P}(G) \circ \mathrm{P}(F) \in \mathrm{PGL}(V)$
   inderdaad $\mathrm{P}(G) \circ \mathrm{P}(F) = \mathrm{P}(G \circ F)$ omdat $\forall \mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{o}\}$:

$$\begin{aligned}(\mathrm{P}(G) \circ \mathrm{P}(F))(\mathrm{vect}\{\mathbf{v}\}) &= \mathrm{P}(G)(\mathrm{vect}\{F(\mathbf{v})\}) \\ &= \mathrm{vect}\{G(F(\mathbf{v}))\} \\ &= \mathrm{vect}\{(G \circ F)(\mathbf{v})\} \\ &= (\mathrm{P}(G \circ F))(\mathrm{vect}\{\mathbf{v}\})\end{aligned}$$

   Daar $F, G \in \mathrm{GL}(V) \Rightarrow G \circ F \in \mathrm{GL}(V)$ volgt dat $\mathrm{P}(G \circ F) \in \mathrm{PGL}(V)$ (eigenschap 1(1))

3. $\mathrm{P}(F) \in \mathrm{PGL}(V) \Rightarrow \mathrm{P}(F)^{-1} = \mathrm{P}(F^{-1}) \in \mathrm{PGL}(V)$

Dus is $\mathrm{PGL}(V)$ een permutatiegroep op P. Uit stap 2 van dit bewijs volgt dat P een homomorfisme is. Bovendien geldt:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}\,\mathrm{P} &= \left\{F \in \mathrm{GL}(V) \mid \mathrm{P}(F) = 1_{\mathrm{P}(V)}\right\} \\ &= \{F \in \mathrm{GL}(V) \mid \mathrm{P}(F) = \mathrm{P}(1_V)\} \\ &\overset{\text{St 1}}{=} \{F \in \mathrm{GL}(V) \mid \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : F = \lambda 1_V\} \\ &= H_0(V)\end{aligned}$$

□

Stelling 3. $\mathrm{PGL}(V)$ *(met V eindigdimensionaal) werkt strikt transitief op de (geordende) projectieve basissen van* $\mathrm{P}(V)$.

Bewijs. Zij $\dim V = n + 1$ en $(p_1, \ldots, p_{n+1}, p_{n+2})$, $(q_1, \ldots, q_{n+1}, q_{n+2})$ twee projectieve basissen van $\mathrm{P}(V)$. Dan bestaan er basissen $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n+1})$, $(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n+1})$ van V zodanig dat

$$\begin{cases} p_i = \mathrm{vect}\{\mathbf{a}_i\},\ q_i = \mathrm{vect}\{\mathbf{b}_i\} \quad \forall i \in \{1, \ldots, n+1\} \\ p_{n+2} = \mathrm{vect}\left\{\sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{a}_i\right\},\ q_{n+2} = \mathrm{vect}\left\{\sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{b}_i\right\} \end{cases}$$

Definieer $F \in \mathrm{GL}(V)$ door $F(\mathbf{a}_i) = \mathbf{b}_i \quad \forall i \in \{1, \ldots, n+1\}$ en stel $\pi = \mathrm{P}(F)$. Dan geldt: $\pi \in \mathrm{PGL}(V)$ en geldt:

$$\begin{cases} \begin{aligned} \pi(p_i) &= \pi(\mathrm{vect}\{\mathbf{a}_i\}) \\ &= \mathrm{vect}\{F(\mathbf{a}_i)\} \\ &= \mathrm{vect}\{\mathbf{b}_i\} \\ &= q_i \end{aligned} \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n+1\} \\ \begin{aligned} \pi(p_{n+2}) &= \pi\left(\mathrm{vect}\left\{\sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{a}_i\right\}\right) \\ &= \mathrm{vect}\left\{F\left(\sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{a}_i\right)\right\} \\ &= \mathrm{vect}\left\{\sum_{i=1}^{n+1} F(\mathbf{a}_i)\right\} \\ &= \mathrm{vect}\left\{\sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{b}_i\right\} \\ &= q_{n+2} \end{aligned} \end{cases}$$

$\Rightarrow \mathrm{PGL}(V)$ werkt transitief op de (geordende) projectieve basissen van $\mathrm{P}(V)$

Zij nu $\pi' \in \mathrm{PGL}(V)$ een tweede projectiviteit die de projectieve basis $(p_1, \ldots, p_{n+2})$ op de projectieve basis $(q_1, \ldots, q_{n+2})$ stuurt.

Zij $F' \in \mathrm{GL}(V)$ met $\pi' = \mathrm{P}(F')$.

Stel $\left((F')^{-1} \circ F\right)(\mathbf{a}_i) = \mathbf{a}'_i \quad \forall i \in \{1, \ldots, n+1\}$. Dan geldt:

$$\begin{aligned} \mathrm{vect}\{\mathbf{a}'_i\} &= \mathrm{vect}\left\{\left((F')^{-1} \circ F\right) \mathbf{a}_i\right\} \\ &= \mathrm{P}\left((F')^{-1} \circ F\right)(\mathrm{vect}\{\mathbf{a}_i\}) \\ &= \left((\pi')^{-1} \circ \pi\right)(p_i) \\ &= (\pi')^{-1}(q_i) \\ &= p_i \\ &= \mathrm{vect}\{\mathbf{a}_i\} \end{aligned}$$

analoog geldt: (verifieer)

$$\mathrm{vect}\left\{\sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{a'}_i\right\} = \mathrm{vect}\left\{\sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{a}_i\right\}$$

Uit lemma 2.2.1 volgt: $\exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : \mathbf{a}'_i = \lambda \mathbf{a}_i \quad \forall i \in \{1, \ldots, n+1\}$

$\Rightarrow (F')^{-1} \circ F \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{P}$

$\Rightarrow \pi = \mathrm{P}(F) = \mathrm{P}(F') = \pi'$

$\Rightarrow \mathrm{PGL}(V)$ werkt *strikt* transitief op de (geordende) projectieve basissen van $\mathrm{P}(V)$. $\square$

Voorbeeld 1. (beschrijving van $\mathrm{PGL}(\mathbb{K}^{n+1})$)

$$\pi \in \mathrm{PGL}(\mathbb{K}^{n+1})$$

$$\Leftrightarrow \exists F \in \mathrm{GL}(\mathbb{K}^{n+1}) : \pi(\mathrm{vect}\{\mathbf{v}\}) = \mathrm{vect}\{F(\mathbf{v})\} \quad \forall \mathbf{v} \in (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{\mathbf{o}\}$$

Zij $E = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n+1})$ de gewone basis van $\mathbb{K}^{n+1}$ en zij $R = F_E \Rightarrow R \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$. Wegens stelling 1 is $\pi \in \mathrm{PGL}(\mathbb{K}^{n+1})$ dus bepaald door een $R \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ op een factor van $\mathbb{K}\setminus\{0\}$ na. Bijgevolg geldt:

$$\mathrm{PGL}(V)(\mathbb{K}^{n+1}) \cong \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K})/\{\lambda I_{n+1} \mid \lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0\}\}$$

$$\pi : \mathrm{P}^n(\mathbb{K}) \to \mathrm{P}^n(\mathbb{K}) : \mathrm{vect}\{(x_1,\ldots,x_{n+1})\} \mapsto \mathrm{vect}\{F(x_1,\ldots,x_{n+1})\}$$

wordt dan in gewone homogene coördinaten voorgesteld door

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \mapsto R \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$$

Men kan ook het beeld van een hypervlak H van $\mathrm{P}^n(\mathbb{K})$ door π eenvoudig beschrijven. H heeft een (gewone) homogene vergelijking van de vorm:

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{n+1}x_{n+1} = 0 \text{ met } (\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}\setminus\{\mathbf{o}\}$$

(zie definitie 2.2.2) H wordt dus volledig bepaald door een rijvector $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}\setminus\{\mathbf{o}\}$ (bepaald op een factor van $\mathbb{K}\setminus\{0\}$ na).

Oefening. $\pi(H)$ is dan het hypervlak bepaald door de rijvector

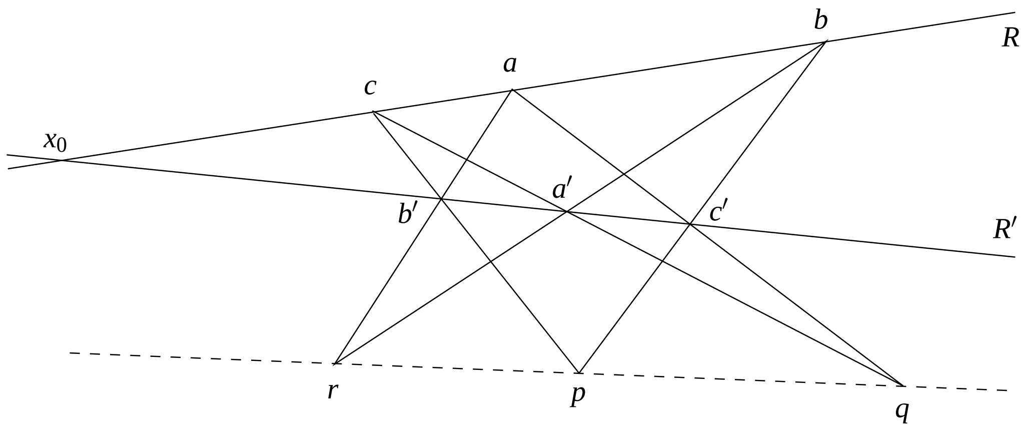
$$(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1})\cdot R^{-1}$$

Opmerking. Zoals in paragraaf 1.2 kan men ook projectieve collineaties definiëren van een projectieve ruimte $\mathrm{P}(V)$ met $\dim \mathrm{P}(V) \geq 2$. (Doe het!)
Deze vormen een permutatiegroep $\mathrm{P\Gamma L}(V)$ op $\mathrm{P}(V)$ die $\mathrm{PGL}(V)$ omvat. Geef een voorbeeld van een projectieve collineatie die geen projectiviteit is.
Wel geldt een fundamentele stelling analoog met stelling 1.2.5 (zie verder, stelling 2.6.6).

2.4 Projectieve stellingen van Pappus en Desargues

Stelling 1. *("Pappus, projectieve versie")*
Zij $R \neq R'$ snijdende rechten in een projectieve ruimte $\mathrm{P}(V)$. Stel $R\cap R' = \{x_0\}$ en zij $a, b, c \in R\setminus\{x_0\}$, $a \neq b \neq c \neq a$.
Zij $a', b', c' \in R'\setminus\{x_0\}$, $a' \neq b' \neq c' \neq a'$.
Dan snijden de rechten $\langle b,c'\rangle$ en $\langle b',c\rangle$ elkaar in een punt p, de rechten $\langle c,a'\rangle$ en $\langle c',a\rangle$ elkaar in een punt q en de rechten $\langle a,b'\rangle$ en $\langle a',b\rangle$ elkaar in een punt r en dan zijn de punten p, q en r collineair.

Bewijs. Zij $x_0 = \mathrm{vect}\{\mathbf{u}\}$, $a = \mathrm{vect}\{\mathbf{v}\}$, $a' = \mathrm{vect}\{\mathbf{v}'\}$ voor zekere $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V\setminus\{\mathbf{o}\}$.
$b \in R = \langle x_0, a\rangle \Rightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{K}\setminus\{0\} : b = \mathrm{vect}\{\mathbf{u}+\alpha\mathbf{v}\}$ (verklaar)
$b' \in R' = \langle x_0, a'\rangle \Rightarrow \exists\, \alpha' \in \mathbb{K}\setminus\{0\} : b' = \mathrm{vect}\{\mathbf{u}+\alpha'\mathbf{v}'\}$



Figuur 2.2: Pappus, projectieve versie

Stel $\alpha\mathbf{v} = \mathbf{w}$, $\alpha'\mathbf{v}' = \mathbf{w}'$. Dan is

$$a = \text{vect}\{\mathbf{w}\} \qquad a' = \text{vect}\{\mathbf{w}'\} \tag{*}$$
$$b = \text{vect}\{\mathbf{u}+\mathbf{w}\} \qquad b' = \text{vect}\{\mathbf{u}+\mathbf{w}'\}$$

$c \in R \Rightarrow \exists\beta \in \mathbb{K}\setminus\{0\} : c = \text{vect}\{\mathbf{u}+\beta\mathbf{w}\}$
$c' \in R' \Rightarrow \exists\beta' \in \mathbb{K}\setminus\{0\} : c' = \text{vect}\{\mathbf{u}+\beta'\mathbf{w}'\}$ (merk op dat ook β, $\beta' \in \mathbb{K}\setminus\{1\}$)
(*) $\Rightarrow \langle a,b'\rangle = \mathrm{P}(\text{vect}\{\mathbf{w},\mathbf{u}+\mathbf{w}'\})$, $\langle a',b\rangle = \mathrm{P}(\text{vect}\{\mathbf{w}',\mathbf{u}+\mathbf{w}\})$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \langle a,b'\rangle\cap\langle a',b\rangle &= \mathrm{P}\left(\text{vect}\{\mathbf{w},\mathbf{u}+\mathbf{w}'\}\cap\text{vect}\{\mathbf{w}',\mathbf{u}+\mathbf{w}\}\right)\\ &= \mathrm{P}\left(\text{vect}\{\mathbf{u}+\mathbf{w}+\mathbf{w}'\}\right) \text{ (verklaar)}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle a,b'\rangle\cap\langle a',b\rangle = \{r\} \text{ met } r = \text{vect}\underbrace{\{\mathbf{u}+\mathbf{w}+\mathbf{w}'\}}_{\text{stel } \mathbf{z}}$$

Analoog geldt:

$$\Rightarrow \langle c,a'\rangle\cap\langle c',a\rangle = \{q\} \text{ met } q = \text{vect}\underbrace{\{\mathbf{u}+\beta\mathbf{w}+\beta'\mathbf{w}'\}}_{\text{stel } \mathbf{y}}$$

Een beetje meer werkt vraagt:

$$\langle b,c'\rangle\cap\langle b',c\rangle = \mathrm{P}\left(\text{vect}\{\mathbf{u}+\mathbf{w},\, \mathbf{u}+\beta'\mathbf{w}'\}\cap\text{vect}\{\mathbf{u}+\mathbf{w}',\, \mathbf{u}+\beta\mathbf{w}\}\right)$$

Stel $\lambda(\mathbf{u}+\mathbf{w})+\mu(\mathbf{u}+\beta'\mathbf{w}') = \xi(\mathbf{u}+\mathbf{w}')+\eta(\mathbf{u}+\beta\mathbf{w})$.

$\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{w}'$ zijn lineair onafhankelijk in V (waarom ?)

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = \xi + \eta \\ \lambda = \eta\beta \\ \mu\beta' = \xi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = \eta\beta \\ \mu = \frac{\xi}{\beta'} \\ (\beta - 1)\eta = \left(1 - \frac{1}{\beta'}\right)\xi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{vect}\{\mathbf{u}+\mathbf{w}, \mathbf{u}+\beta'\mathbf{w}'\} \cap \text{vect}\{\mathbf{u}+\mathbf{w}', \mathbf{u}+\beta\mathbf{w}\}$$

$$= \text{vect}\underbrace{\left\{\left(\beta + \frac{\beta-1}{\beta'-1}\right)\mathbf{u} + \beta\mathbf{w} + \frac{\beta'(\beta-1)}{\beta'-1}\mathbf{w}'\right\}}_{\text{stel } \mathbf{x}}$$

$$\Rightarrow \langle b, c'\rangle \cap \langle b', c\rangle = \{p\} \text{ met } p = \text{vect}\{\mathbf{x}\}$$

Om te bewijzen dat p, q, r collineair zijn volstaat het te bewijzen dat $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ tot eenzelfde $2-$dim deelruimte U van V behoren, m.a.w. lineair afhankelijk zijn in V.
We weten dat $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z} \in \text{vect}\{\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{w}'\}$ en dat $B = (\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{w}')$ een basis is van $\text{vect}\{\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{w}'\}$.

$$\det\begin{pmatrix} \beta + \frac{\beta-1}{\beta'-1} & 1 & 1 \\ \beta & \beta & 1 \\ \frac{\beta'(\beta-1)}{\beta'-1} & \beta' & 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{(verifieer)}$$

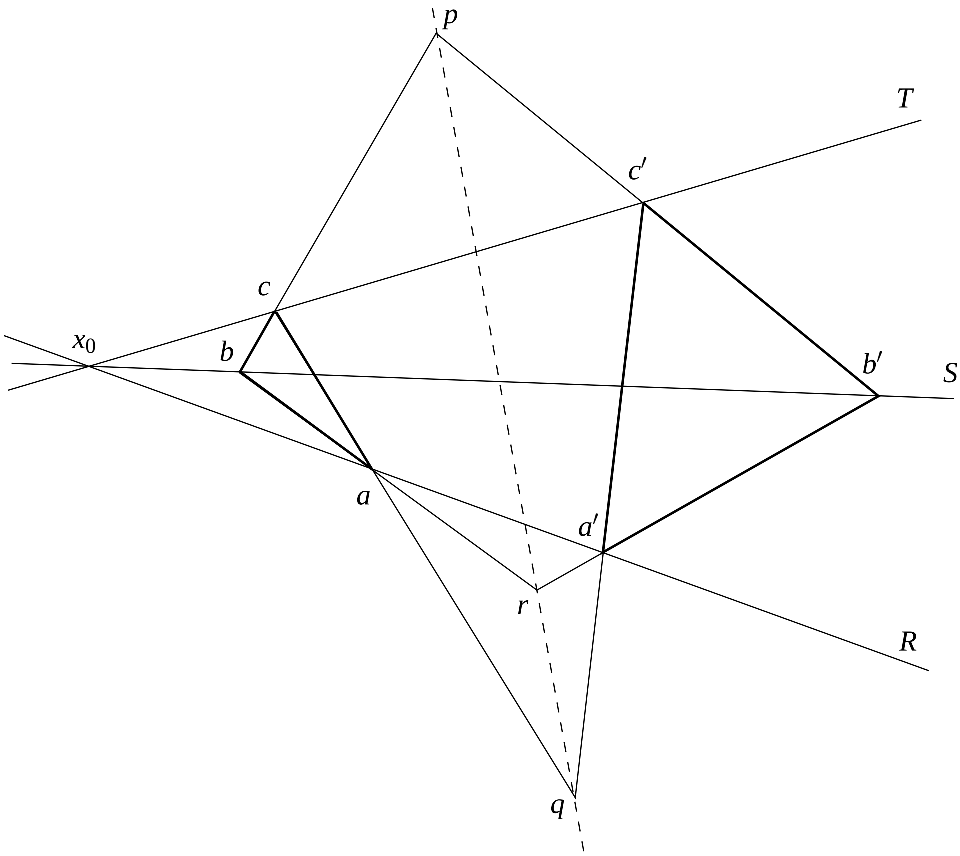
(De kolommen vormen het tripel $(\mathbf{x}_B, \mathbf{y}_B, \mathbf{z}_B)$) $\Rightarrow$ $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ en $\mathbf{z}$ zijn lineair afhankelijk
$\Rightarrow$ p, q en r zijn collineair ☐

Stelling 2. *("Desargues, projectieve versie") Zij R, S en T drie verschillende projectieve rechten in een projectieve ruimte $\mathrm{P}(V)$ met $R \cap S \cap T = \{x_0\}$. Zij $a, a' \in R \setminus \{x_0\}$, $a \neq a'$, $b, b' \in S \setminus \{x_0\}$, $b \neq b'$ en $c, c' \in T \setminus \{x_0\}$, $c \neq c'$.*
Dan snijden de rechten $\langle b, c\rangle$ en $\langle b', c'\rangle$ elkaar in een punt p, de rechten $\langle c, a\rangle$ en $\langle c', a'\rangle$ elkaar in een punt q en de rechten $\langle a, b\rangle$ en $\langle a', b'\rangle$ elkaar in een punt r en dan zijn de punten p, q en r collineair.

Bewijs. Zij $a = \text{vect}\{\mathbf{u}\}$, $b = \text{vect}\{\mathbf{v}\}$, $c = \text{vect}\{\mathbf{w}\}$ voor een zekere $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V \setminus \{\mathbf{o}\}$. Zijn a, b, c collineair, dan is de stelling triviaal (verklaar).
Onderstel dus a, b en c niet collineair. We moeten 2 gevallen onderscheiden.

- $x_0 \in \text{proj}\{a, b, c\}$
  $\Rightarrow x_0 = \text{vect}\{\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w}\}$ voor een zekere $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$
  ($\alpha, \beta, \gamma \neq 0$, daar $x_0 \notin \langle a, b\rangle$, $x_0 \notin \langle b, c\rangle$ en $x_0 \notin \langle a, c\rangle$)
  Stel dan $\alpha\mathbf{u} = \mathbf{x}$, $\beta\mathbf{v} = \mathbf{y}$, $\gamma\mathbf{w} = \mathbf{z}$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} a = \text{vect}\{\mathbf{x}\} & b = \text{vect}\{\mathbf{y}\} \\ c = \text{vect}\{\mathbf{z}\} & x_0 = \text{vect}\{\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}\} \end{array}$$



Figuur 2.3: Desargues, projectieve versie

$$
\begin{aligned}
a' \in R = \langle x_0, a\rangle &\Rightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0\} : a' = \mathrm{vect}\{\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}+\lambda\mathbf{x}\}\\
b' \in S = \langle x_0, b\rangle &\Rightarrow \exists\, \mu \in \mathbb{K}\setminus\{0\} : b' = \mathrm{vect}\{\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}+\mu\mathbf{y}\}\\
c' \in T = \langle x_0, b\rangle &\Rightarrow \exists\, \nu \in \mathbb{K}\setminus\{0\} : c' = \mathrm{vect}\{\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}+\nu\mathbf{z}\}
\end{aligned}
$$

(merk op dat $\lambda \neq 0$ omdat $a' \neq x_0$; analoog $\mu, \nu \neq 0$) Dan volgt:

$$
\begin{aligned}
\langle a, b\rangle \cap \langle a', b'\rangle &= \mathrm{P}\left(\mathrm{vect}\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \cap \mathrm{vect}\{(1+\lambda)\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}, \mathbf{x}+(1+\mu)\mathbf{y}+\mathbf{z}\}\right)\\
&= \{r\} \text{ met } r = \mathrm{vect}\{\lambda\mathbf{x}-\mu\mathbf{y}\}
\end{aligned}
$$

analoog:

$$\langle b, c\rangle \cap \langle b', c'\rangle = \{p\} \text{ met } p = \mathrm{vect}\{\mu\mathbf{y}-\nu\mathbf{z}\}$$

$$\langle a, c\rangle \cap \langle a', c'\rangle = \{q\} \text{ met } q = \mathrm{vect}\{\nu\mathbf{z}-\lambda\mathbf{x}\}$$

$\lambda\mathbf{x}-\mu\mathbf{y}$, $\mu\mathbf{y}-\nu\mathbf{z}$ en $\nu\mathbf{z}-\lambda\mathbf{x}$ zijn duidelijk lineair afhankelijk in V. Bijgevolg zijn p, q en r collineair.

- $x_0 \notin \mathrm{proj}\{a, b, c\}$

$\Rightarrow x_0 = \mathrm{vect}\{\mathbf{t}\}$ voor een zekere $\mathbf{t} \in V \setminus \{\mathbf{o}\}$ met $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ en $\mathbf{t}$ lineair onafhankelijk.

$$\begin{aligned}
a' \in R = \langle x_0, a\rangle &\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : a' = \mathrm{vect}\{\mathbf{t} + \lambda \mathbf{u}\}\\
b' \in S = \langle x_0, b\rangle &\Rightarrow \exists \mu \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : b' = \mathrm{vect}\{\mathbf{t} + \mu \mathbf{v}\}\\
c' \in T = \langle x_0, b\rangle &\Rightarrow \exists \nu \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : c' = \mathrm{vect}\{\mathbf{t} + \nu \mathbf{w}\}
\end{aligned}$$

Dan volgt:

$$\begin{aligned}
\langle a, b\rangle \cap \langle a', b'\rangle &= \mathrm{P}\left(\mathrm{vect}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \cap \mathrm{vect}\{\mathbf{t} + \lambda\mathbf{u}, \mathbf{t} + \mu\mathbf{v}\}\right)\\
&= \{r\} \text{ met } r = \mathrm{vect}\{\lambda\mathbf{u} - \mu\mathbf{v}\}
\end{aligned}$$

analoog:

$$\langle b, c\rangle \cap \langle b', c'\rangle = \{p\} \text{ met } p = \mathrm{vect}\{\mu\mathbf{v} - \nu\mathbf{w}\}$$

$$\langle a, c\rangle \cap \langle a', c'\rangle = \{q\} \text{ met } q = \mathrm{vect}\{\nu\mathbf{w} - \lambda\mathbf{u}\}$$

$\lambda\mathbf{u} - \mu\mathbf{v}$, $\mu\mathbf{v} - \nu\mathbf{w}$ en $\nu\mathbf{w} - \lambda\mathbf{u}$ zijn duidelijk lineair afhankelijk in V. Bijgevolg zijn p, q en r collineair.

□

Opmerkingen. 1. Andere bewijzen van deze stellingen zijn mogelijk (zie o.a. verder in paragraaf 2.6 hoe men ze kan afleiden uit de affiene stellingen van Pappus en Desargues).

2. In de synthetische projectieve meetkunde zijn deze stellingen niet altijd geldig (bijvoorbeeld in het projectief vlak van Moulton).

3. Pappus-eigenschap $\Rightarrow$ Desargues-eigenschap (projectieve versie van de stelling van Hessenberg).

2.5 Dualiteit

Als men het axiomastelsel van een axiomatisch projectief vlak goed bekijkt (en eventueel (P1), (P2), (P3) en (P4) vervangt door het equivalent stel (P1), (P2), (P3)'en (P4) met (P3)': "elk punt ligt op ten minste 3 rechten", dan merkt men dat de axioma's geldig blijven als men volgende "vertaling" doorvoert:

	punt	$\leftrightarrow$	rechte
en	punt op rechte	$\leftrightarrow$	rechte door punt
(i.h.b.	collineaire punten	$\leftrightarrow$	concurrente rechten)

en dat ze opnieuw een axiomastelsel vormen van hetzelfde projectief vlak. We zullen deze zogenaamde "dualiteit" (tussen punten en rechten in een projectief vlak) nu in het algemeen beschrijven voor een projectieve ruimte $\mathrm{P}(V)$ over een eindigdimensionale vectorruimte V.
We zullen daartoe eerst een nuttig concept uit de lineaire algebra invoeren en bestuderen.

Definitie 1. *Zij V een eindigdimensionale $\mathbb{K}$-vectorruimte en $V^* = \mathscr{L}(V;\mathbb{K})$ de duale ruimte van V. Zij $X \subset V$.*
De ***annihilator*** *van X, genoteerd X°, is*

$$X^\circ = \{ f \in V^* \mid X \subset \operatorname{Ker} f \}$$

Eigenschap 1. *De annihilator voldoet aan volgende eigenschappen:*

1. $X^\circ = (\operatorname{vect} X)^\circ \leqslant V^*$
2. $X \subset Y \subset V \Rightarrow Y^\circ \subset X^\circ$ (i.h.a. $\not\Leftarrow$)
3. $(X \cap Y)^\circ \supset X^\circ + Y^\circ$ (i.h.a. $\not\subset$)
4. $(X + Y)^\circ \supset X^\circ \cap Y^\circ$ (i.h.a. $\not\subset$)

Voor deelruimten S, T van V kan men meer zeggen:

5. $S^\circ \leqslant V^*$ en $\dim S^\circ = \dim V - \dim S$ *(=* " codim S"*)*
6. $S \subset T \Leftrightarrow S^\circ \supset T^\circ$
7. $(S \cap T)^\circ = S^\circ + T^\circ$
8. $(S + T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ$

Oefening. Wat kun je zeggen over $(X^\circ)^\circ$, $(S^\circ)^\circ$?
HINT: gebruik $(\widehat{\cdot}) : V \to (V^*)^* : \mathbf{x} \mapsto (\widehat{\mathbf{x}} : V^* \to \mathbb{K} : f \mapsto f(\mathbf{x}))$

Definitie 2. $P^* = \mathrm{P}(V^*)$ *heet de* ***duale (projectieve) ruimte*** *van* $P = \mathrm{P}(V)$.

Notatie. $\mathscr{P}^* = \{Q \mid Q \leqslant_p P^*\}$ *(vergelijk met opmerking 2.2.2.2 (2))*

Stelling 1. *Zij* $\dim \mathrm{P}(V) = n$.
De afbeelding $()^* : \mathscr{P} \to \mathscr{P}^* : Q = \mathrm{P}(U) \mapsto Q^* = \mathrm{P}(U^\circ)$ *is een bijectie die bovendien voldoet aan:*

1. $\dim Q + \dim Q^* = n - 1$ $(Q \in \mathscr{P})$
2. $Q \subset R \Leftrightarrow Q^* \supset R^*$
3. $(Q \cap R)^* = \operatorname{proj}(Q^* \cup R^*)$ $(Q, R \in \mathscr{P})$
4. $(\operatorname{proj}(Q \cup R))^* = Q^* \cap R^*$

We bewijzen eerst volgend nuttig lemma, dat we zullen gebruiken in het bewijs van de stelling:

Lemma 1. $\forall f \in V^* : \operatorname{vect}\{f\} = (\operatorname{Ker} f)^\circ$

Bewijs. $\operatorname{vect}\{f\} \subset (\operatorname{Ker} f)^\circ$ volgt triviaal uit de definitie van $(\operatorname{Ker} f)^\circ$, maar beide zijn deelruimten en hebben dezelfde dimensie (zie eigenschap 1(5)) zodat

$$\operatorname{vect}\{f\} = (\operatorname{Ker} f)^\circ$$

□

Bewijs. Omdat $\mathscr{L} = \{U \mid U \leqslant V\} \to \mathscr{P} = \{Q \mid Q \leqslant_p \mathrm{P}(V)\} : U \mapsto \mathrm{P}(U)$ een bijectie is (zie opmerking 2.2.2.2) en evenzo $\mathscr{L}^* = \{W \mid W \leqslant V^*\} \to \mathscr{P}^* : W \mapsto \mathrm{P}(W)$, volstaat het te tonen dat $()^\circ : \mathscr{L} \to \mathscr{L}^* : U \mapsto U^\circ$ een bijectie is.

1. $()^\circ$ is surjectief
   Zij $W \in \mathscr{L}^*$, d.w.z. $W \leqslant V^*$. We onderscheiden twee gevallen.
   α) $W = \{\mathbf{o}\} \Rightarrow W = V^\circ$
   β) $W \neq \{\mathbf{o}\}$. Zij $f_1, \ldots, f_m$ een basis van W $(1 \leq m \leq n+1)$
   Dan geldt:

$$\begin{aligned} W &= \text{vect}\{f_1, \ldots, f_m\} \\ &= \text{vect}\{f_1\} + \ldots + \text{vect}\{f_m\} \\ &= (\text{Ker } f_1)^\circ + \ldots + (\text{Ker } f_m)^\circ && \text{(lemma 1)} \\ &= (\text{Ker } f_1 \cap \ldots \cap \text{Ker } f_m)^\circ && \text{(eigenschap 1(7))} \end{aligned}$$

   Dus $W = U^\circ$ met $U = \text{Ker } f_1 \cap \ldots \cap \text{Ker } f_m$

2. $()^\circ$ is injectief: gebruik eigenschap 1(6)

Bovendien geldt:
(1): Zij $Q = \text{P}(U)$ en dus $Q^* = \text{P}(U^\circ)$, dan geldt:

$$\begin{aligned} \dim Q + \dim Q^* &= \dim \text{P}(U) + \dim \text{P}(U^\circ) \\ &= (\dim U) - 1 + (\dim U^\circ) - 1 \\ &\overset{\text{eig 1(5)}}{=} (\dim V) - 2 \\ &= (n+1) - 2 \\ &= n - 1 \end{aligned}$$

(2), (3) en (4) zijn directe gevolgen van eigenschappen 1 (6), (7) en (8) en eigenschappen van de projectieve omhullende (verifieer). $\square$

Om deze dualiteit $()^*$ te kunnen benutten in de projectieve ruimte $\text{P}(V)$ zelf, gebruiken we ook nog de volgende bijectie tussen $\mathscr{P}$ en $\mathscr{P}^*$ die correspondeert met een isomorfisme tussen V en V^*.

Stelling 2. *Zij $E = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n+1})$ een basis van V.*
Zij $F : V \to V^*$ het isomorfisme dat E stuurt op zijn duale basis $E^* = (f_1, \ldots, f_{n+1})$ (d.w.z. f_i is de i-de coördinaatsfunctie t.o.v. de basis E, zie [KI])

$$\text{P}(F) : \text{P}(V) \to \text{P}(V^*) : \text{vect}\{\mathbf{v}\} \mapsto \text{vect}\{F(\mathbf{v})\}$$

is dan een projectief isomorfisme , dat een bijectie

$$\Gamma : \mathscr{P} \to \mathscr{P}^* : \text{P}(U) \mapsto \text{P}(F(U))$$

induceert, die bovendien voldoet aan:

1. $\dim Q = \dim \Gamma(Q)$
2. $Q \subset R \Leftrightarrow \Gamma(Q) \subset \Gamma(R)$ $\quad (Q, R \in \mathscr{P})$
3. $\Gamma(Q \cap R) = \Gamma(Q) \cap \Gamma(R)$
4. $\Gamma(\mathrm{proj}(Q \cup R)) = \mathrm{proj}(\Gamma(Q) \cup \Gamma(R))$

Bewijs. (oefening) □

We combineren nu de twee bijecties van stellingen 1 en 2 als volgt om een **dualiteit** te bekomen tussen de projectieve deelruimten van $\mathrm{P}(V)$.

Stelling 3. *Stel* $D = (()^*)^{-1} \circ \Gamma : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$.
Dan is D een bijectie met de eigenschappen:

1. $\dim D(Q) = (n-1) - \dim Q$
2. $Q \subset R \Leftrightarrow D(Q) \supset D(R)$ $\quad (Q, R \in \mathscr{P})$
3. $D(Q \cap R) = \mathrm{proj}(D(Q) \cup D(R))$
4. $D(\mathrm{proj}(Q \cup R)) = D(Q) \cap D(R)$

Bewijs. direct gevolg van stellingen 1 en 2. □

Opmerkingen.

1. Eigenschap (2) van stelling 3 drukt men uit door te zeggen dat de dualiteit D de "incidentierelatie" tussen projectieve deelruimten bewaart. $Q, R \in \mathscr{P}$ heten **incident** indien

$$\begin{aligned} &Q \subset R \quad \text{als } \dim Q < \dim R \\ &Q = R \quad \text{als } \dim Q = \dim R \\ &Q \supset R \quad \text{als } \dim Q > \dim R \end{aligned}$$

   Deze incidentierelatie in $\mathscr{P}$ is reflexief en symmetrisch, maar niet transitief. (Verklaar)

2. Wegens eigenschap (1) van stelling 3 stuurt D een 0-dimensionale projectieve deelruimte (dit is een singleton bepaald door een punt) op een $(n-1)$-dimensionale projectieve deelruimte, d.w.z. een (projectief) hypervlak. Meer precies:

$$\begin{aligned} Q = \{p\} &= \{\mathrm{vect}\{\mathbf{v}\}\} = \mathrm{P}(\mathrm{vect}\{\mathbf{v}\}) && (\mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{o}\}) \\ \Rightarrow D(Q) &= (()^*)^{-1}(\Gamma(Q)) \\ &= (()^*)^{-1}(\{\mathrm{vect}\{F(\mathbf{v})\}\}) && (F \text{ zoals in stelling 2}) \\ &= \mathrm{P}(\mathrm{Ker}\, F(\mathbf{v})) && (\text{zie lemma 1}) \end{aligned}$$

   Door eigenschap (4) van stelling 3 is dan D inductief bepaald op hogerdimensionale projectieve deelruimten.

   bijvoorbeeld: $D(\langle p, q \rangle) = D(\mathrm{proj}\{p, q\}) = D(\{p\}) \cap D(\{q\})$

Voorbeeld. (verifieer als oefening)
Beschouw de projectieve ruimte $\mathrm{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathrm{P}^n(\mathbb{K})$.
Zij $E = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n+1})$ de gewone basis van $\mathbb{K}^{n+1}$, dan is $E^* = (f_1, \ldots, f_{n+1})$ met $f_i : \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K} : (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto x_i$

Verifieer dat voor een punt $p = \mathrm{vect}\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})\}$ met gewone homogene coördinaten $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ geldt:

$$D(\{p\}) = \text{hypervlak } \mathrm{P}(U) \text{ met } U = \mathrm{Ker}\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f_i\right)$$

Opmerking. $D(\{p\})$ noteren we abusievelijk ook $D(p)$.

$\mathrm{P}(U)$ heeft dus als gewone homogene vergelijking:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = 0$$

Het belangrijkste gevolg van stelling 3 is:

Gevolg 1. *("Dualiteitsprincipe in* $\mathrm{P}(V)$*")*
Elke stelling in $\mathrm{P}(V)$ *uitgedrukt in projectieve deelruimten van* $\mathrm{P}(V)$ *(en de "bewerkingen"* $(Q,R) \mapsto Q \cap R$ *en* $(Q,R) \mapsto \mathrm{proj}(Q \cup R)$*) en de incidenties is geldig dan en alleen dan als de "duale stelling" geldig is in* $\mathrm{P}(V)$.
*(De **duale stelling** bekomt men door elke Q te vervangen door* $D(Q)$ *met inachtname van alle eigenschappen van D.)*

Toepassing. (verifieer als oefening)

1. Beschouw de stelling van Desargues (stelling 2.4.2), maar dan in een projectief **vlak** $\mathrm{P}(V)$. Formuleer de duale stelling in $\mathrm{P}(V)$. Welk verband houdt deze met de rechtstreekse stelling van Desargues?

2. Hoe luidt de duale stelling van Pappus in een projectief vlak?

2.6 De projectieve uitbreiding van een affiene ruimte en de affiene beperking van een projectieve ruimte

In deze paragraaf gaan we de uitbreiding van de affiene ruimte $\mathbb{R}^2$ tot $\mathrm{P}^2(\mathbb{R})$ van paragraaf 2.1 veralgemenen en ook vaststellen hoe we omgekeerd een projectieve ruimte kunnen beperken tot een affiene ruimte. We zoeken daarbij ook een verband tussen de optredende projectiviteiten en affiniteiten.
Zij X een affiene ruimte over een n-dimensionale $\mathbb{K}$-vectorruimte V.
Zij V' een $(n+1)$-dimensionale $\mathbb{K}$-vectorruimte zodanig dat $V \leqslant V'$.
(In 2.1 is $X = \mathbb{R}^2$, $V = \{(x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\} \leqslant V' = \mathbb{R}^3$)

$$\begin{aligned} \text{Zij } \infty(X) &= \{\text{rechten van X}\}/\!/\!/ \\ &= \{\text{equivalentieklassen van parallelle rechten in } X\} \end{aligned}$$

Dan geldt:

Stelling 1 (of definitie 1). *Er bestaat een bijectie*

$$\varphi : X \cup \infty(X) \to \mathrm{P}(V')$$

zodanig dat

$$\varphi(\infty(X)) = \mathrm{P}(V)$$

Door middel van deze bijectie kan men $X \cup \infty(X)$ *identificeren met de projectieve ruimte* $\mathrm{P}(V')$, *die men dan de* ***projectieve uitbreiding*** *van* X *noemt. Daarbij wordt* $\infty(X)$ *geïdentificeerd met het hypervlak* $\mathrm{P}(V)$ *van* $\mathrm{P}(V')$.

Bewijs. Kies een “oorsprong” $x_0 \in X$ en kies een $\mathbf{y}_0' \in V' \setminus V$. Er bestaat een lineaire vorm $\ell \in (V')^*$ met $\ell^{-1}(0) = V$ en $\ell(\mathbf{y}_0') = 1$ (verklaar). Stel $X_\ell = \ell^{-1}(1)$. Dan is $X_\ell = \mathbf{y}_0' + V$ en dus een hypervlak van V', parallel met V.
Men verifieert dat X_ℓ een affiene ruimte is over V, d.m.v. de linkse actie

$$\lambda : V \times X_\ell \to X_\ell : (\mathbf{v}, \mathbf{y}_0' + \mathbf{w}) \mapsto \mathbf{y}_0' + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

X_ℓ is affien isomorf met X, d.m.v.

$$f : X \to X_\ell : x \mapsto \mathbf{y}_0' + (x - x_0).$$

Met behulp van f definiëren we de gezochte bijectie

$$\begin{array}{lccl} \varphi : & X \cup \infty(X) & \to & \mathrm{P}(V') \\ & X \ni x & \mapsto & \mathrm{vect}\{f(x)\} = \mathrm{vect}\{\mathbf{y}_0' + (x - x_0)\} \\ & \infty(X) \ni \text{ klasse van } R & \mapsto & \mathrm{vect}\{\mathbf{v}\} \\ & \text{met} R = x + \mathrm{vect}\{\mathbf{v}\} & & \end{array}$$

φ is inderdaad een bijectie met invers (verifieer):

$$\begin{array}{lrcl} \varphi^{-1} : & \mathrm{P}(V') = (\mathrm{P}(V') \setminus \mathrm{P}(V)) \cup \mathrm{P}(V) & \to & X \cup \infty(X) \\ & \mathrm{P}(V') \setminus \mathrm{P}(V) \ni \mathrm{vect}\{\mathbf{v}'\} & \mapsto & x = x_0 + (\underbrace{\mathbf{v}'/\ell(\mathbf{v}') - \mathbf{y}_0'}_{\in \ell^{-1}(0) = V}) \in X \\ & \parallel & & \\ & \mathrm{vect}\,\{\underbrace{\mathbf{v}'/\ell(\mathbf{v}')}_{\in X_\ell}\} & & \\ & \mathrm{P}(V) \ni \mathrm{vect}\{\mathbf{v}\} & \mapsto & \text{klasse van } x_0 + \mathrm{vect}\{\mathbf{v}\} \in \infty(X) \end{array}$$

□

(Ter illustratie: In 2.1 hebben we een bijzonder geval van deze constructie met $X = \mathbb{R}^2$, $V = \{(x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\} \leqslant V' = \mathbb{R}^3$, $x_0 = (0,0)$, $\mathbf{y}_0' = (0,0,1)$

$$\ell : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto z,$$

$$X_\ell = \ell^{-1}(1) = \{(x,y,1) \mid x,y \in \mathbb{R}\} = \mathbf{y}_0' + V,$$

$$f : X = \mathbb{R}^2 \to X_\ell : (x,y) \mapsto (0,0,1) + (x,y,0) = (x,y,1)$$

en tenslotte $\varphi : \widetilde{\mathbb{R}^2} = \mathbb{R}^2 \cup \infty(\mathbb{R}^2) \to \mathrm{P}(\mathbb{R}^3) = \mathrm{P}^2(\mathbb{R})$, de afbeelding Ψ van 2.1)

Stelling 2. $A \leqslant_a X \Rightarrow \varphi(A \cup \infty(A)) \leqslant_p \varphi(X \cup \infty(X)) = \mathrm{P}(V')$

Bewijs. (oefening) □

De volgende stelling toont hoe we met een affiene basis van X een projectieve basis $\mathrm{P}(V')$ kunnen associëren.

Stelling 3. *Zij $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ een affiene basis van X over V.*
Zij $x_0 \in X$, $\mathbf{y}'_0 \in V' \setminus V$ zoals in stelling 1. Stel $\mathbf{b}_1 = x_1 - x_0, \ldots, \mathbf{b}_n = x_n - x_0$ en $\mathbf{b}_{n+1} = \mathbf{y}'_0$
Stel $p_1 = \mathrm{vect}\{\mathbf{b}_1\}, \ldots, p_n = \mathrm{vect}\{\mathbf{b}_n\}$, $p_{n+1} = \mathrm{vect}\{\mathbf{b}_{n+1}\}$ en $q = \mathrm{vect}\left\{\sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{b}_i\right\}$
Dan is $Q = (p_1, \ldots, p_{n+1}, q)$ een projectieve basis van $\mathrm{P}(V')$.
Bovendien geldt:

1. *$(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ affiene coördinaten van $y \in X$ t.o.v. $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$*
   $\Rightarrow (\beta_1, \ldots, \beta_n, 1)$ projectieve coördinaten van $\varphi(y)$ t.o.v. Q

2. *een punt van $\varphi(\infty(X)) = \mathrm{P}(V)$ heeft projectieve coördinaten van de vorm $(\beta_1, \ldots, \beta_n, 0)$*

Bewijs. $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ affiene basis van X
$\Rightarrow (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ basis van V (Stelling 1.1.7)
$\Rightarrow (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n+1})$ basis van V', aangepast aan $V \leqslant V'$.
$\Rightarrow Q = (p_1, \ldots, p_{n+1}, q)$ een projectieve basis van $\mathrm{P}(V')$ (zie definitie 2.2.5). Bovendien geldt:

1. $y = \sum_{i=0}^{n} \beta_i x_i$ met $\sum_{i=0}^{n} \beta_i = 1$
   $\Rightarrow y = x_0 + \sum_{i=0}^{n} \beta_i (x_i - x_0) = x_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{b}_i$
   $\Rightarrow \varphi(y) = \mathrm{vect}\{\mathbf{y}'_0 + (y - x_0)\} = \mathrm{vect}\left\{\sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{b}_i + \mathbf{b}_{n+1}\right\}$
   $\Rightarrow (\beta_1, \ldots, \beta_n, 1)$ is een stel projectieve coördinaten van $\varphi(y)$ t.o.v. Q.

2. (oefening)

□

Zij nu $i = \varphi|_X : X \to \mathrm{P}(V')$ de injectie van het affien vlak X in zijn projectieve uitbreiding $\mathrm{P}(V')$. Dan stellen we ons de vraag; kunnen we een affiniteit f van X uitbreiden tot een projectiviteit π van $\mathrm{P}(V')$, d.w.z. bestaat er een $\pi \in \mathrm{PGL}(V')$ zodanig dat $\pi \circ i = i \circ f$?

m.a.w. zodanig dat
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ i \downarrow & & \downarrow i \\ \mathrm{P}(V') & \underset{\pi}{- \to} & \mathrm{P}(V') \end{array}$$
een commutatief diagram is?

Stelling 4. *Zij X een n-dimensionale affiene ruimte over V en zij $\mathrm{P}(V')$ haar projectieve uitbreiding (zie stelling 1). Zij $f \in \mathrm{GA}(X)$ en $L_f \in \mathrm{GL}(V)$ geassocieerd met f (zie definitie 1.2.2). Definieer $F \in \mathrm{GL}(V')$ door*

$$\begin{array}{rcll} F : V' = & V \oplus \mathrm{vect}\{\mathbf{y}'_0\} & \to & V' \\ & \mathbf{v} + \alpha \mathbf{y}'_0 & \mapsto & L_f(\mathbf{v}) + \alpha(\mathbf{y}'_0 + f(x_0) - x_0) \qquad (\alpha \in \mathbb{K}) \end{array}$$

Dan is $\pi = \mathrm{P}(F) \in \mathrm{PGL}(V')$ met $\pi \circ i = i \circ f$.
Bovendien is $\pi|_{\mathrm{P}(V)} = \mathrm{P}(L_f) \in \mathrm{PGL}(V)$.

Bewijs. $f \in \mathrm{GA}(X) \Rightarrow \forall x \in X: f(x) - f(x_0) = L_f(x - x_0)$ met $L_f \in \mathrm{GL}(V)$ (Stelling 1.2.1). Definieer

$$\begin{array}{rlcl} F : V' = & V \oplus \mathrm{vect}\{\mathbf{y}_0'\} & \to & V' \\ & \mathbf{v} + \alpha\mathbf{y}_0' & \mapsto & L_f(\mathbf{v}) + \alpha(\mathbf{y}_0' + f(x_0) - x_0) \quad (\alpha \in \mathbb{K}) \end{array}$$

- F is lineair (oefening).
- F is ook bijectief, want

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker} F &= \{\mathbf{v} + \alpha\mathbf{y}_0' \mid L_f(\mathbf{v}) + \alpha(\mathbf{y}_0' + f(x_0) - x_0) = \mathbf{o}\} \\ &\qquad \Leftrightarrow \underbrace{L_f(\mathbf{v}) + \alpha(f(x_0) - x_0)}_{\in V} = \underbrace{-\alpha\mathbf{y}_0'}_{\in \mathrm{vect}\{\mathbf{y}_0'\}} \in V \cap \mathrm{vect}\{\mathbf{y}_0'\} = \{\mathbf{o}\} \\ &= \{\mathbf{v} + \alpha\mathbf{y}_0' \mid L_f(\mathbf{v}) + \alpha(f(x_0) - x_0) = \mathbf{o} \text{ en } \alpha = 0\} \\ &= \{\mathbf{v} \mid L_f(\mathbf{v}) = \mathbf{o}\} \\ &= \mathrm{Ker} L_f \\ &= \{\mathbf{o}\} \end{aligned}$$

Bijgevolg is F injectief en, wegens de alternatiefstelling, ook surjectief.
Dus $F \in \mathrm{GL}(V') \Rightarrow \pi = \mathrm{P}(F) \in \mathrm{PGL}(V')$ en bovendien geldt: $\forall x \in X$:

$$\begin{aligned} (\pi \circ i)(x) &= \pi(\mathrm{vect}\{\mathbf{y}_0' + (x - x_0)\}) \\ &= \mathrm{vect}\{F(\mathbf{y}_0' + (x - x_0))\} \\ &= \mathrm{vect}\left\{L_f(x - x_0) + (\mathbf{y}_0' + f(x_0) - x_0)\right\} \\ &= \mathrm{vect}\{f(x) - f(x_0) + \mathbf{y}_0' + f(x_0) - x_0\} \\ &= \mathrm{vect}\{\mathbf{y}_0' + f(x) - x_0\} \\ &= (i \circ f)(x) \end{aligned}$$

zodat $\pi \circ i = i \circ f$.
Bovendien geldt: $\forall\, \mathrm{vect}\{\mathbf{v}\} \in \mathrm{P}(V)$:

$$\pi(\mathrm{vect}\{\mathbf{v}\}) = \mathrm{vect}\{F(\mathbf{v})\} = \mathrm{vect}\{L_f(\mathbf{v})\} = \mathrm{P}(L_f)(\mathrm{vect}\{\mathbf{v}\})$$

zodat $\pi|_{\mathrm{P}(V)} = \mathrm{P}(L_f)$

□

Opmerking 1. De uitbreiding van f tot π is uniek.
Immers zij $\pi' \in \mathrm{PGL}(V')$ een tweede projectiviteit met $\pi' \circ i = i \circ f$

Daar $i(X) = \mathrm{P}(V') \setminus \mathrm{P}(V)$ geldt alvast dat:

$$\begin{array}{rll}
& \pi'|_{\mathrm{P}(V')\setminus\mathrm{P}(V)} = \pi|_{\mathrm{P}(V')\setminus\mathrm{P}(V)} & \text{(verklaar)} \\
\Rightarrow & \left((\pi')^{-1}\circ\pi\right)|_{\mathrm{P}(V')\setminus\mathrm{P}(V)} = 1_{\mathrm{P}(V')\setminus\mathrm{P}(V)} & \\
\Rightarrow & \Big(\underbrace{(\pi')^{-1}\circ\pi}_{=\mathrm{P}\left((F')^{-1}\circ F\right)}\Big)\mathrm{P}(V) = \mathrm{P}(V) \qquad (\text{waar } \pi' = \mathrm{P}(F')) & \text{(verklaar)} \\
\Rightarrow & \left((F')^{-1}\circ F\right)(V) = V & \\
\Rightarrow & F'(V) = F(V) = V & \\
\Rightarrow & \begin{array}{rcl} F' : V' = V\oplus\mathrm{vect}\{\mathbf{y}_0'\} & \to & V' \\ \mathbf{v}+\alpha\mathbf{y}_0' & \mapsto & \underbrace{F'(\mathbf{v})}_{\in V}+\alpha\underbrace{F'(\mathbf{y}_0')}_{\in V'\setminus V} \end{array} & (F' \text{ lineair})
\end{array}$$

Nu geldt:

$$F'(\mathbf{y}_0') \in \mathrm{vect}\{F'(\mathbf{y}_0')\} = \pi'\big(\underbrace{\mathrm{vect}\{\mathbf{y}_0'\}}_{\in\mathrm{P}(V')\setminus\mathrm{P}(V)}\big) = \pi(\mathrm{vect}\{\mathbf{y}_0'\}) = \mathrm{vect}\{F(\mathbf{y}_0')\}$$

zodat $\exists\beta\in\mathbb{K}\setminus\{0\} : F'(\mathbf{y}_0') = \beta F(\mathbf{y}_0')$ (*)
Analoog geldt voor $\mathbf{v}\in V$:

$$F'(\mathbf{v}+\mathbf{y}_0') \in \mathrm{vect}\{F'(\mathbf{v}+\mathbf{y}_0')\} = \pi'(\mathrm{vect}\{\mathbf{v}+\mathbf{y}_0'\}) = \pi(\mathrm{vect}\{\mathbf{v}+\mathbf{y}_0'\}) = \mathrm{vect}\{F(\mathbf{v})+F(\mathbf{y}_0')\}$$

zodat $\exists\mu\in\mathbb{K}\setminus\{0\} : F'(\mathbf{v}+\mathbf{y}_0') = \mu(F(\mathbf{v})+F(\mathbf{y}_0'))$
$\overset{F'\text{ lineair}}{\underset{(*)}{\Rightarrow}} \mu(F(\mathbf{v})+F(\mathbf{y}_0')) = F'(\mathbf{v})+\beta F(\mathbf{y}_0')$
$\Rightarrow (\beta-\mu)\underbrace{F(\mathbf{y}_0')}_{\in V'\setminus V} = \underbrace{\mu F(\mathbf{v})-F'(\mathbf{v})}_{\in V}$
$\Rightarrow \mu = \beta$
$\Rightarrow F'(\mathbf{v}) = \beta F(\mathbf{v})$ (**)
en dit $\forall\mathbf{v}\in V$

$$(*),(**) \Rightarrow F' = \beta F$$

$$\Rightarrow \pi' = \mathrm{P}(F') = \mathrm{P}(\beta F) = \mathrm{P}(F) = \pi$$

De uitbreidingsstellingen 1 en 4 geven een indicatie hoe we omgekeerd moeten te werk gaan om een projectieve ruimte en haar projectiviteiten te "beperken" tot een affiene ruimte en haar affiniteiten.

Stelling 5. *Zij V' een $(n+1)$-dimensionale vectorruimte over $\mathbb{K}$ en zij $V \leqslant V'$ met $\dim V = n$, dan is $\mathrm{P}(V)$ een hypervlak van $\mathrm{P}(V')$ en heeft $X = \mathrm{P}(V')\setminus\mathrm{P}(V)$ de structuur van een affiene ruimte over V.*
Bovendien geldt dat:

$$\pi\in\mathrm{PGL}(V') \text{ met } \pi(\mathrm{P}(V)) = \mathrm{P}(V) \Rightarrow \pi|_X \in \mathrm{GA}(X)$$

Bewijs. Kies weer een $\mathbf{y}_0' \in V' \setminus V$ en een $\ell \in (V')^*$ met $\mathrm{Ker}\,\ell = V$ en $\ell(\mathbf{y}_0') = 1$. Stel:

$$\begin{array}{rccl} \rho : X = & \mathrm{P}(V') \setminus \mathrm{P}(V) & \to & \mathbf{y}_0' + V = X_\ell = \ell^{-1}(1) \\ & \mathrm{vect}\{\mathbf{v}'\} & \mapsto & \frac{\mathbf{v}'}{\ell(\mathbf{v}')} \end{array}$$

($\frac{\mathbf{v}'}{\ell(\mathbf{v}')}$ is het snijpunt van $\mathrm{vect}\{\mathbf{v}'\}$ met het hypervlak $\ell^{-1}(1)$ van V')
ρ is een bijectie met

$$\rho^{-1}(\mathbf{y}_0' + \mathbf{v}) = \mathrm{vect}\{\mathbf{y}_0' + \mathbf{v}\}$$

$\mathbf{y}_0' + V = X_\ell$ is een affiene ruimte over V (vergelijk met het bewijs van stelling 1) en dus ook X d.m.v. de volgende linkse actie (verifieer).

$$\begin{array}{rccl} \lambda : & V \times X & \to & X \\ & (\mathbf{u}, \mathrm{vect}\{\mathbf{v}'\}) & \mapsto & \mathrm{vect}\left\{\frac{\mathbf{v}'}{\ell(\mathbf{v}')} + \mathbf{u}\right\} = \mathrm{vect}\{\mathbf{v}' + \ell(\mathbf{v}')\mathbf{u}\} \end{array}$$

Zij nu $\pi \in \mathrm{PGL}(V')$ met $\pi(\mathrm{P}(V)) = \mathrm{P}(V)$.
Daar π een bijectie is volgt dat

$$\begin{aligned} \pi(X) &= \pi\left(\mathrm{P}(V') \setminus \mathrm{P}(V)\right) \\ &= \pi\left(\mathrm{P}(V')\right) \setminus \pi\left(\mathrm{P}(V)\right) \\ &= \mathrm{P}(V') \setminus \mathrm{P}(V) \\ &= X \end{aligned}$$

Stel $f = \pi|_X : X \to X$, dan is f nog een bijectie en rest te bewijzen dat f affien is.

$$\pi \in \mathrm{PGL}(V') \Rightarrow \exists F \in \mathrm{GL}(V') : \pi = \mathrm{P}(F)$$

Uit de voorwaarde $\pi(\mathrm{P}(V)) = \mathrm{P}(V)$ volgt dat $F|_V \in \mathrm{GL}(V)$ (verklaar).

$$\mathbf{y}_0' \in V' \setminus V \Rightarrow F(\mathbf{y}_0') = \mathbf{v}_0' \in V' \setminus V \Rightarrow \ell(\mathbf{v}_0') = \beta \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$$

Stel dat $G = \frac{1}{\beta} F$. Dan geldt:

$$\pi = \mathrm{P}(F) = \mathrm{P}(G) \text{ en } \ell(G(\mathbf{y}_0')) = \frac{1}{\beta} \ell(F(\mathbf{y}_0')) = 1$$

$$\begin{aligned} G(\mathbf{y}_0' + V) &= G(\mathbf{y}_0') + G(V) \\ &= G(\mathbf{y}_0') + V && \text{daar } G|_V \in \mathrm{GL}(V) \\ &= \mathbf{y}_0' + V && \text{daar } G(\mathbf{y}_0') - \mathbf{y}_0' \in \ell^{-1}(0) = V \end{aligned}$$

G bewaart dus globaal $\mathbf{y}_0' + V = \ell^{-1}(1)$.

We bewijzen nu dat $\forall x_1, x_2 \in X :\ f(x_2) - f(x_1) = G(x_2 - x_1)$ (hetgeen betekent dat f affien is met $L_f = G|_V$).
Wat betekent "$-$" in de affiene structuur van X?
Voor $i \in \{1,2\}$ stellen we $x_i = \mathrm{vect}\{\mathbf{v}_i'\}$ met $\mathbf{v}_i' \in \ell^{-1}(1)$ (waarom mogen we dit veronderstellen?)

Dan betekent $x_2 - x_1 = \mathbf{u} \in V$ dat:

$$\begin{aligned}
& \lambda(\mathbf{u}, x_1) = x_2 \\
\Leftrightarrow\quad & \lambda(\mathbf{u}, \mathrm{vect}\{\mathbf{v}_1'\}) = \mathrm{vect}\{\mathbf{v}_2'\} \\
\Leftrightarrow\quad & \mathrm{vect}\{\mathbf{v}_1' + \ell(\mathbf{v}_1')\mathbf{u}\} = \mathrm{vect}\{\mathbf{v}_2'\} \\
& \quad = \mathrm{vect}\{\mathbf{v}_1' + \mathbf{u}\} \\
\Leftrightarrow\quad & \mathbf{v}_1' + \mathbf{u} = \mathbf{v}_2' \qquad \text{daar ook } \ell(\mathbf{v}_1' + \mathbf{u}) = \ell(\mathbf{v}_1') + \ell(\mathbf{u}) = 1 + 0 = \ell(\mathbf{v}_2') \\
\Leftrightarrow\quad & \mathbf{u} = \mathbf{v}_2' - \mathbf{v}_1'
\end{aligned}$$

Dus $x_2 - x_1 = \mathbf{v}_2' - \mathbf{v}_1'$
Bijgevolg is $G(x_2 - x_1) = G(\mathbf{u}) = G(\mathbf{v}_2' - \mathbf{v}_1')$.
Anderzijds geldt:

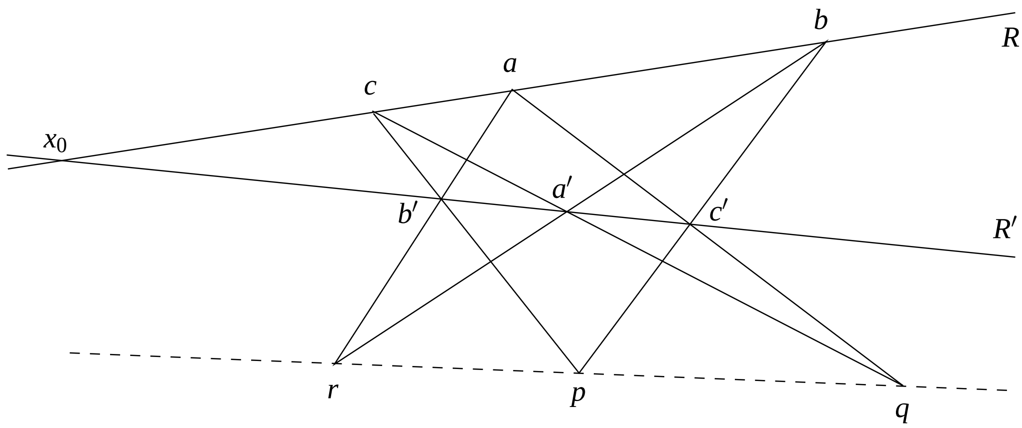
$$\begin{aligned}
f(x_2) - f(x_1) &= \pi(x_2) - \pi(x_1) \\
&= \mathrm{vect}\{G(\mathbf{v}_2')\} - \mathrm{vect}\{G(\mathbf{v}_1')\} \\
&= G(\mathbf{v}_2') - G(\mathbf{v}_1') \qquad \text{zoals hoger omdat } G(\mathbf{v}_i') \in \ell^{-1}(1) = \mathbf{y}_0' + V \\
&= G(\mathbf{v}_2' - \mathbf{v}_1')
\end{aligned}$$

waarmee de stelling bewezen is. □

Eigenschap 1. *Met de notaties van stelling 5 onderstellen we dat* $\mathrm{P}(U) \leqslant_p \mathrm{P}(V')$. *Dan hebben we dat* $\mathrm{P}(U) \cap X \leqslant_a X$

Bewijs. (oefening) □

Toepassing. Alternatief bewijs van de stelling van Pappus, projectieve versie (stelling 2.4.1). Zij R, R' twee verschillende snijdende rechten in een projectieve ruimte $\mathrm{P}(V)$ en stel $R \cap R' =$



Figuur 2.4: Pappus, projectieve versie

$\{x_0\}$. Zij $a, b, c \in R \setminus \{x_0\}$, $a \neq b \neq c \neq a$. Zij $a', b', c' \in R' \setminus \{x_0\}$, $a' \neq b' \neq c' \neq a'$. Dan snijden de rechten $\langle b, c' \rangle$ en $\langle b', c \rangle$ elkaar in een punt p, de rechten $\langle c, a' \rangle$ en $\langle c', a \rangle$ elkaar in een punt q en de rechten $\langle a, b' \rangle$ en $\langle a', b \rangle$ elkaar in een punt r en zijn de punten p, q en r collineair.

Bewijs. $\mathrm{proj}(R \cup R') = \mathrm{P}(U) \leqslant_p \mathrm{P}(V)$ met $\dim \mathrm{P}(U) = 2$

$$\langle b, c' \rangle,\ \langle b', c \rangle,\ \langle c, a' \rangle,\ \langle c', a \rangle,\ \langle a, b' \rangle,\ \langle a', b \rangle \leqslant_p \mathrm{P}(U)$$

Bovendien (verklaar)

$$\langle b,c'\rangle \neq \langle b',c\rangle,\ \langle c,a'\rangle \neq \langle c',a\rangle,\ \langle a,b'\rangle \neq \langle a',b\rangle$$

Dus bestaan $p,\ q,\ r \in \mathrm{P}(U)$ zodanig dat

$$\langle b,c'\rangle \cap \langle b',c\rangle = \{p\},\ \langle c,a'\rangle \cap \langle c',a\rangle = \{q\},\ \langle a,b'\rangle \cap \langle a',b\rangle = \{r\}$$

Stel nu $H = \langle p,r\rangle$, dan is H een hypervlak van $\mathrm{P}(U)$. Er bestaat dus een $W \leqslant U$ met $\dim W = 2 = (\dim U) - 1$ zodat $H = \mathrm{P}(W)$. Wegens stelling 5 is $X = \mathrm{P}(U) \setminus \mathrm{P}(W)$ een affien vlak over W.

$$\langle a,b'\rangle \setminus \{r\} = \langle a,b'\rangle \cap X \text{ en } \langle a',b\rangle \setminus \{r\} = \langle a',b\rangle \cap X$$

zijn affiene rechten in X die evenwijdig zijn (want lege doorsnede).
Analoog voor $\langle b,c'\rangle \setminus \{p\}$ en $\langle b',c\rangle \setminus \{p\}$.
Uit de affiene stelling van Pappus (stelling 1.3.2) volgt dat

$$\big(\langle c,a'\rangle \cap X\big) /\!\!/ \big(\langle c',a\rangle \cap X\big) \Rightarrow \langle c,a'\rangle \cap \langle c,a'\rangle = \{q\} \subset H$$

en dus geldt $p,\ q,\ r \in H$, m.a.w. zijn $p,\ q$ en r collineair.
Vraagje: Ben je zeker dat $a,\ b,\ c \in R \cap X,\ a',\ b',\ c' \in R' \cap X$? (verifieer) □

Oefening. Vind een analoog bewijs voor de projectieve stelling van Desargues dat gebruik maakt van de affiene stelling 1.3.3.

Als tweede toepassing zullen we een fundamentele stelling van de reële projectieve meetkunde afleiden uit stelling 1.2.5.

Definitie 2. *Zij* $\mathrm{P}(V)$ *een projectieve ruimte met* $\dim \mathrm{P}(V) \geq 2$. *Een permutatie* σ *van* $P(V)$ *met de eigenschap*

$$\forall\, p,\ q \in \mathrm{P}(V),\ p \neq q :\ r \in \langle p,q\rangle \Leftrightarrow \sigma(r) \in \langle \sigma(p), \sigma(q)\rangle$$

heet een (projectieve) ***collineatie*** *van* $\mathrm{P}(V)$.

Zoals in 1.2 toont men dat de collineaties van $\mathrm{P}(V)$ een permutatiegroep op $\mathrm{P}(V)$ vormen die $\mathrm{PGL}(V)$ omvat. Zoek een voorbeeld van een collineatie die geen projectiviteit is.

Stelling 6. *("Fundamentele stelling van de reële projectieve meetkunde")*
Zij $\mathrm{P}(V)$ *een eindigdimensionale projectieve ruimte over een* ***reële*** *vectorruimte* V *en zij* $n = \dim \mathrm{P}(V) \geq 2$. *Dan is elke collineatie van* $\mathrm{P}(V)$ *ook een projectiviteit van* $\mathrm{P}(V)$.

Bewijs. (Schets)
Zij $\sigma : \mathrm{P}(V) \to \mathrm{P}(V)$ een collineatie. Kies $U \leqslant V$ met $\dim U = n = (\dim V) - 1$.
Zij $p_1, \ldots, p_{n+1}$ een projectief simplex van $\mathrm{P}(V)$ "aangepast aan $\mathrm{P}(U)$", d.w.z. zodanig dat $\mathrm{P}(U) = \mathrm{proj}\{p_1, \ldots, p_n\}$.
Zoals in stap 1 van de stelling 1.2.5 toont men (oefening) dat

$$\sigma(\mathrm{P}(U)) = \mathrm{proj}\{\sigma(p_1), \ldots, \sigma(p_n)\}$$

$$\text{en dat } \dim \sigma(\mathrm{P}(U)) = \dim \mathrm{P}(U) = n-1$$

Dus $\exists U' \leqslant V$ met $\dim U' = \dim U = n$ zodanig dat $\sigma(\mathrm{P}(U)) = \mathrm{P}(U')$.
$\exists F \in \mathrm{GL}(V)$ met $F(U) = U'$ (verklaar)
Stel dan $\pi = \mathrm{P}(F)$

$$\begin{aligned} \pi \in \mathrm{PGL}(V) \quad &\Rightarrow \pi \text{ is een collineatie} \\ &\Rightarrow \pi^{-1} \circ \sigma \text{ is ook een collineatie} \end{aligned}$$

Noem deze collineatie τ. Dan geldt:

$$\begin{aligned} \tau(\mathrm{P}(U)) \quad &= \pi^{-1}(\sigma(\mathrm{P}(U))) \\ &= \pi^{-1}(\mathrm{P}(U')) \\ &= \mathrm{P}(F^{-1}(U')) \\ &= \mathrm{P}(U) \end{aligned}$$

En dus ook $\tau(X) = X$, waar $X = \mathrm{P}(V) \setminus \mathrm{P}(U)$ een affiene ruimte is over U wegens stelling 5.
τ projectieve collineatie $\Rightarrow \tau|_X : X \to X$ affiene collineatie (verklaar).
Wegens stelling 1.2.5 is $\tau|_X \in \mathrm{GA}(X)$ die, wegens stelling 4 en opmerking 1, uniek kan uitgebreid worden tot een $\rho \in \mathrm{PGL}(V)$.
Tenslotte toont men (oefening) dat $\pi^{-1} \circ \sigma = \rho \Rightarrow \sigma = \pi \circ \rho \in \mathrm{PGL}(V)$. □

2.7 Dubbelverhouding

We beschouwen vier punten p, q, r en s op een projectieve rechte $P = \mathrm{P}(V)$ (dus $\dim_{\mathbb{K}} V = 2$) met $p \neq q \neq r \neq p$. Beschouw $\mathbb{K}$ als affiene ruimte over zichzelf. Noteer $\infty(\mathbb{K}) = \{\infty\}$. We kunnen $\mathrm{P}^1(\mathbb{K}) = \mathrm{P}(\mathbb{K}^2)$ beschouwen als projectieve uitbreiding van $\mathbb{K}$ d.m.v. de bijectie (vergelijk met stelling 2.6.1)

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbb{K} \cup \{\infty\} \quad &\to \quad \mathrm{P}^1(\mathbb{K}) \\ \mathbb{K} \ni \alpha \quad &\mapsto \quad \mathrm{vect}\{(0,1) + (\alpha,0) - (0,0)\} = \mathrm{vect}\{(\alpha,1)\} \\ \infty \quad &\mapsto \quad \mathrm{vect}\{(1,0)\} \end{aligned}$$

(p,q,r) is een projectieve basis B van $\mathrm{P}(V)$ (waarom?)
Er bestaat dus juist één projectief isomorfisme (stelling 2.3.3)

$$\sigma_B : P \to \mathrm{P}^1(\mathbb{K}) \text{ met } \begin{cases} \sigma_B(p) = \mathrm{vect}\{(1,0)\} \\ \sigma_B(q) = \mathrm{vect}\{(0,1)\} \\ \sigma_B(r) = \mathrm{vect}\{(1,1)\} \end{cases}$$

(omdat $\mathrm{vect}\{(1,0)\}$, $\mathrm{vect}\{(0,1)\}$, $\mathrm{vect}\{(1,1)\}$ een projectieve basis is van $\mathrm{P}^1(\mathbb{K})$)
Stel $\rho_B = \varphi^{-1} \circ \sigma_B : P \to \mathbb{K} \cup \{\infty\}$. We hebben dus $\rho_B(p) = \infty$, $\rho_B(q) = 0$, $\rho_B(r) = 1$. Merk op dat ρ_B een bijectie is.

Definitie 1. *De* ***dubbelverhouding*** *("cross-ratio") van het geordend collineair puntenviertal*

(p,q,r,s) *met* $p \neq q \neq r \neq p$ *is*

$$\mathrm{CR}(p,q,r,s) = \rho_B(s) \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$$

We tonen dadelijk een fundamentele eigenschap van de dubbelverhouding aan.

Stelling 1. *Zij R, R' projectieve rechten in een projectieve ruimte $\mathrm{P}(V)$. Zij (p,q,r,s), resp. (p',q',r',s') twee puntenviertallen van R, resp. R' met $p \neq q \neq r \neq p$, resp. $p' \neq q' \neq r' \neq p'$. Dan geldt:*

$$\exists\, \pi \in \mathrm{PGL}(V) : \pi(p) = p',\, \pi(q) = q',\, \pi(r) = r',\, \pi(s) = s'$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{CR}(p,q,r,s) = \mathrm{CR}(p',q',r',s')$$

Bewijs. 1. "$\Rightarrow$": Kies een projectieve basis $Q = (p_1, \ldots, p_{n+1}, p_{n+2})$ van $\mathrm{P}(V)$ met $p_1 = p$ en $p_2 = q$

Zij $\pi \in \mathrm{PGL}(V)$ met $\pi(p) = p'$, $\pi(q) = q'$, $\pi(r) = r'$, $\pi(s) = s'$.

Dan is $\pi(Q) = (\underbrace{\pi(p_1)}_{=p'}, \underbrace{\pi(p_2)}_{=q'}, \ldots, \pi(p_{n+1}), \pi(p_{n+2}))$ opnieuw een projectieve basis van $\mathrm{P}(V)$

$$\pi(R) = \pi(\langle p,q \rangle) = \langle \pi(p), \pi(q) \rangle = \langle p', q' \rangle = R'$$

Dus is $\pi|_R : R \to R'$ een projectief isomorfisme. Dan geldt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{CR}(p',q',r',s') &= \mathrm{CR}(\underbrace{\pi(p)}_{=p'}, \underbrace{\pi(q)}_{=q'}), \underbrace{\pi(r)}_{=r'}, \pi(s)) \\
&= \rho_{B'}(\pi(s)) && (B' = (p',q',r') \text{ is proj. basis van } R') \\
&\overset{(*)}{=} \rho_B(s) && (B = (p,q,r) \text{ is proj. basis van } R) \\
&= \mathrm{CR}(p,q,r,s)
\end{aligned}$$

((*) omdat $\rho_{B'} \circ \pi|_R = \rho_B$; verklaar!)

2. "$\Leftarrow$": Zij $\mathrm{CR}(p,q,r,s) = \mathrm{CR}(p',q',r',s')$

Kies een basis $A = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n+1})$ van V zodanig dat $p = \mathrm{vect}\{\mathbf{a}_1\}$, $q = \mathrm{vect}\{\mathbf{a}_2\}$.

Kies een basis $A' = (\mathbf{a}'_1, \ldots, \mathbf{a}'_{n+1})$ van V zodanig dat $p' = \mathrm{vect}\{\mathbf{a}'_1\}$, $q' = \mathrm{vect}\{\mathbf{a}'_2\}$. $r \in R \setminus \{p, q\} = \mathrm{P}(\mathrm{vect}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}) \setminus \{p, q\}$

$$\Rightarrow \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : r = \mathrm{vect}\{\alpha \mathbf{a}_1 + \beta \mathbf{a}_2\}$$

Analoog $r' \in R' \setminus \{p', q'\}$

$$\Rightarrow \exists\, \alpha', \beta' \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : r' = \mathrm{vect}\{\alpha' \mathbf{a}'_1 + \beta' \mathbf{a}'_2\}$$

Definieer $F \in \mathrm{GL}(V)$ door

$$\begin{aligned}
F(\alpha \mathbf{a}_1) &= \alpha' \mathbf{a}'_1 && \text{m.a.w. } F(\mathbf{a}_1) = \tfrac{\alpha'}{\alpha} \mathbf{a}'_1 \\
F(\beta \mathbf{a}_2) &= \beta' \mathbf{a}'_2 && \text{m.a.w. } F(\mathbf{a}_2) = \tfrac{\beta'}{\beta} \mathbf{a}'_2 \\
F(\mathbf{a}_i) &= \mathbf{a}'_i && \text{voor } i \in \{3, \ldots, n+1\}
\end{aligned}$$

Stel nu $\pi = \mathrm{P}(F)$

$$\Rightarrow \pi \in \mathrm{PGL}(V) \text{ en } \pi(p) = p', \pi(q) = q', \pi(r) = r' \text{ (verklaar)}$$

Dan geldt, met $B' = (p', q', r')$:

$$\begin{aligned} \rho_{B'}(s') &= \mathrm{CR}(p', q', r', s') = \mathrm{CR}(p, q, r, s) \\ &\overset{\text{stap 1}}{=} \mathrm{CR}(\pi(p), \pi(q), \pi(r), \pi(s)) \\ &= \mathrm{CR}(p', q', r', \pi(s)) \\ &= \rho_{B'}(\pi(s)) \end{aligned}$$

en dus ook $\pi(s) = s'$.

$\square$

Opmerking 1. Het feit dat dat $\mathrm{CR}(p,q,r,s) = \mathrm{CR}(\pi(p), \pi(q), \pi(r), \pi(s))$ voor $\pi \in \mathrm{PGL}(V)$ drukt men uit door te zeggen dat de dubbelverhouding een **projectieve invariant** is.

De dubbelverhouding blijft ook bewaard onder zogenaamde "perspectiviteiten".

Definitie 2. *Zij R en R' projectieve rechten in een projectief vlak $\mathrm{P}(V)$ en zij $c \in \mathrm{P}(V) \setminus (R \cup R')$. De afbeelding $\pi_c : R \to R'$, gedefinieerd door $\{\pi_c(p)\} = \langle c, p \rangle \cap R'$ heet **perspectiviteit** van R naar R' met **centrum** c.*

Opmerking 2. Men kan meer algemeen een perspectiviteit definiëren van een hypervlak H naar een hypervlak H' in een projectieve ruimte $\mathrm{P}(V)$ met centrum $c \in \mathrm{P}(V) \setminus (H \cup H')$.

Stelling 2. *Zij $\pi_c : R \to R'$ zoals in definitie 2. Dan is π_c een projectief isomorfisme van R naar R'. Voor elk puntenviertal (p,q,r,s) van R met $p \neq q \neq r \neq p$ geldt dan:*

$$\mathrm{CR}(p,q,r,s) = \mathrm{CR}(\pi_c(p), \pi_c(q), \pi_c(r), \pi_c(s))$$

Bewijs. Er bestaan 2-dimensionale deelruimten U en U' van de 3-dimensionale ruimte V zodanig dat $R = \mathrm{P}(U)$, $R' = \mathrm{P}(U')$. $\exists \mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{o}\} : c = \mathrm{vect}\{\mathbf{v}\}$. Daar $c \notin R \cup R'$ geldt: $\mathbf{v} \notin U \cup U'$
I.h.b. volgt dat $V = U' \oplus \mathrm{vect}\{\mathbf{v}\}$. (verklaar)
Stel

$$F : U \to U' : \mathbf{u} = \mathbf{u}' + \alpha \mathbf{v} \mapsto \mathbf{u}'$$

Verifieer dat F een isomorfisme is en dat $\mathrm{P}(F) = \pi_c$.
Bijgevolg is $\pi_c : R \to R'$ een projectief isomorfisme.
Uit het bewijs van stelling 1 "$\Rightarrow$" volgt dat

$$\mathrm{CR}(p,q,r,s) = \mathrm{CR}(\pi_c(p), \pi_c(q), \pi_c(r), \pi_c(s))$$

voor elk puntenviertal van R met $p \neq q \neq r \neq p$. $\square$

Oefening. Elk projectief isomorfisme tussen twee verschillende projectieve rechten R en R' in een projectief vlak is ofwel een perspectiviteit ofwel de samenstelling van twee perspectiviteiten. $R \to S$, $S \to R'$ waarbij S een derde rechte is.

Oefening. Wat kun je, naar analogie met voorgaande oefening zeggen over een projectiviteit van R?

We zoeken nu praktische berekeningsmethodes voor de dubbelverhouding van (p,q,r,s) (met $p \neq q \neq r \neq p$) op een projectieve rechte $\mathrm{P}(V)$.

Stelling 3. *(p,q,r) is een projectieve basis van $\mathrm{P}(V)$. Zij $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$ een basis van V zodanig dat $p = \mathrm{vect}\{\mathbf{e}_1\}$, $q = \mathrm{vect}\{\mathbf{e}_2\}$ en $r = \mathrm{vect}\{\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\}$. Dan geldt:*

$$s = \mathrm{vect}\{h\mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_2\} \Rightarrow \mathrm{CR}(p,q,r,s) = \begin{cases} \frac{h}{k} & \textit{als } k \neq 0 \\ \infty & \textit{als } k = 0 \end{cases}$$

Bewijs. Omdat $p \neq q \neq r \neq p$, is $B = (p,q,r)$ een projectieve basis van $\mathrm{P}(V)$ (gebruik gevolg 2.2.3). Wegens definitie 2.2.5 bestaat dan een basis $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$ van V zodanig dat $p = \mathrm{vect}\{\mathbf{e}_1\}$, $q = \mathrm{vect}\{\mathbf{e}_2\}$ en $r = \mathrm{vect}\{\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\}$. Dan stuurt $\sigma_B : \mathrm{P}(V) \to \mathrm{P}^1(\mathbb{K})$, $\mathrm{vect}\{\mathbf{e}_1\}$ op $\mathrm{vect}\{(1,0)\}$, $\mathrm{vect}\{\mathbf{e}_2\}$ op $\mathrm{vect}\{(0,1)\}$, en $\mathrm{vect}\{\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\}$ op $\mathrm{vect}\{(1,1)\}$ (zie hoger).
Bijgevolg geldt: $\sigma_B = \mathrm{P}(F)$ met $F \in \mathscr{L}(V;\mathbb{K}^2)$ bepaald door $F(\mathbf{e}_1) = (1,0)$, $F(\mathbf{e}_2) = (0,1)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sigma_B(s) &= \sigma_B(\mathrm{vect}\{h\mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_2\}) \\ &= \mathrm{vect}\{F(h\mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_2)\} \\ &= \mathrm{vect}\{(h,k)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathrm{CR}(p,q,r,s) &= \rho_B(s) \\ &= \varphi^{-1}(\sigma_B(s)) \\ &= \varphi^{-1}(\mathrm{vect}\{(h,k)\}) \\ &= \begin{cases} \frac{h}{k} & \text{als } k \neq 0 \\ \infty & \text{als } k = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

wegens de definitie van $\varphi : \mathbb{K} \cup \{\infty\} \to \mathrm{P}^1(\mathbb{K})$ (zie hoger) $\square$

Gevolg 1. *Zij $A = (\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)$ een willekeurige basis van V.*
Zij $p = \mathrm{vect}\{\mathbf{x}\}$, $q = \mathrm{vect}\{\mathbf{y}\}$, $r = \mathrm{vect}\{\mathbf{z}\}$, $s = \mathrm{vect}\{\mathbf{t}\}$. Dan geldt:

$$\mathrm{CR}(p,q,r,s) = \frac{\det(\mathbf{x}_A,\mathbf{z}_A)\cdot\det(\mathbf{y}_A,\mathbf{t}_A)}{\det(\mathbf{x}_A,\mathbf{t}_A)\cdot\det(\mathbf{y}_A,\mathbf{z}_A)} \qquad (\text{als } s \neq p)$$

(als $s = p$, $\mathrm{CR}(p,q,r,s) = \infty$)

Bewijs. Noteer $\mathbf{x}_A = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y}_A = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{z}_A = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ $\mathbf{t}_A = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$
$p \neq q \Rightarrow (\mathbf{x},\mathbf{y})$ is ook een basis van V (verklaar)

$$\Rightarrow \exists\, \alpha,\beta \in \mathbb{K} : \mathbf{z} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y},\ \exists\, \gamma,\delta \in \mathbb{K} : \mathbf{t} = \gamma\mathbf{x} + \delta\mathbf{y}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Cramer}}{\Rightarrow} \alpha = \frac{\det(\mathbf{z}_A, \mathbf{y}_A)}{\det(\mathbf{x}_A, \mathbf{y}_A)} \quad \beta = \frac{\det(\mathbf{x}_A, \mathbf{z}_A)}{\det(\mathbf{x}_A, \mathbf{y}_A)}$$
$$\gamma = \frac{\det(\mathbf{t}_A, \mathbf{y}_A)}{\det(\mathbf{x}_A, \mathbf{y}_A)} \quad \delta = \frac{\det(\mathbf{x}_A, \mathbf{t}_A)}{\det(\mathbf{x}_A, \mathbf{y}_A)}$$

(Merk op dat $r \neq q \Rightarrow \alpha \neq 0$, $r \neq p \Rightarrow \beta \neq 0$)
Stel $\mathbf{e}_1 = \alpha \mathbf{x}$, $\mathbf{e}_2 = \beta \mathbf{y}$

$$\begin{aligned} \text{Dan geldt: } p &= \text{vect}\{\mathbf{e}_1\}, \\ q &= \text{vect}\{\mathbf{e}_2\}, \\ r &= \text{vect}\{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\} \\ \text{en } s &= \text{vect}\{\frac{\gamma}{\alpha}\mathbf{e}_1 + \frac{\delta}{\beta}\mathbf{e}_2\} \end{aligned}$$

$$\text{Stelling 3} \Rightarrow \text{CR}(p,q,r,s) = \begin{cases} \frac{\gamma}{\alpha} : \frac{\delta}{\beta} = \frac{\beta\gamma}{\alpha\delta} & \text{als } \delta \neq 0, \text{ d.w.z. } s \neq p \\ \infty & \text{als } \delta = 0, \text{ d.w.z. } s = p \end{cases}$$

waaruit de gevraagde formule volgt. □

Gevolg 2. *(verband met de deelverhouding van collineaire punten op een affiene rechte) Zij p,q,r,s (met $p \neq q \neq r \neq p$) punten op een affiene rechte X over V en zij $i : X \to \mathrm{P}(V')$ de inbedding van X in haar projectieve uitbreiding P (zie stelling 2.6.1). Dan geldt:*

$$\text{CR}(i(p), i(q), i(r), i(s)) = \frac{DV(q,r,s)}{DV(p,r,s)} \quad (\text{als } s \neq p)$$

(als $s = p$, $\text{CR}(i(p), i(q), i(r), i(s)) = \infty$)

Bewijs. (p,q) is een affiene basis van $X = \langle p,q \rangle$. Kies $x_0 = p$, $\mathbf{y}'_0 \in V' \setminus V$ (cfr. stelling 2.6.1). Dan is $A = (\mathbf{a}_1 = q - p, \mathbf{a}_2 = \mathbf{y}'_0)$ een basis van V'.

$$\begin{aligned} i(p) &= \text{vect}\{\mathbf{y}'_0 + (p - x_0)\} &&= \text{vect}\{\mathbf{y}'_0\} &&= \text{vect}\{\mathbf{a}_2\} \\ i(q) &= \text{vect}\{\mathbf{y}'_0 + (q - x_0)\} &&= \text{vect}\{\mathbf{y}'_0 + (q - p)\} &&= \text{vect}\{\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r \in \langle p,q \rangle &\Rightarrow \exists!\, \alpha \in \mathbb{K} : \quad r = (1-\alpha)p + \alpha q \qquad (\alpha \notin \{0,1\}, \text{ daar } p \neq r \neq q) \\ s \in \langle p,q \rangle &\Rightarrow \exists!\, \beta \in \mathbb{K} : \quad s = (1-\beta)p + \beta q \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} i(r) &= \text{vect}\{\mathbf{y}'_0 + (r - x_0)\} &&= \text{vect}\{\mathbf{y}'_0 + \alpha(q - p)\} &&= \text{vect}\{\alpha\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2\} \\ i(s) &= \text{vect}\{\mathbf{y}'_0 + (s - x_0)\} &&= \text{vect}\{\mathbf{y}'_0 + \beta(q - p)\} &&= \text{vect}\{\beta\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2\} \end{aligned}$$

$$\overset{\text{gev 1}}{\Rightarrow} \text{CR}(i(p), i(q), i(r), i(s)) = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)}$$

$$\begin{aligned} r-p &= \alpha(q-p) \\ s-p &= \beta(q-p) \\ \Rightarrow s-p &= \frac{\beta}{\alpha}(r-p) \\ \Rightarrow \mathrm{DV}(p,r,s) &= \frac{\beta}{\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s-q &= (s-p)+(p-q) = (\beta-1)(q-p) \\ r-q &= (r-p)+(p-q) = (\alpha-1)(q-p) \\ \Rightarrow s-q &= \frac{\beta-1}{\alpha-1}(r-q) \\ \Rightarrow DV(q,r,s) &= \frac{\beta-1}{\alpha-1} \end{aligned}$$

Besluit:

$$\frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)} = \frac{DV(q,r,s)}{DV(p,r,s)}$$

□

Gevolg 3. *Zij q,r en s punten op een affiene rechte X over V met $q \neq r$ en zij $\{p\} = \infty(X)$. Zij $\varphi : X \cup \infty(X) \to \mathrm{P}(V')$ zoals in stelling 2.6.1 . Dan geldt* $\mathrm{CR}(\varphi(p),\varphi(q),\varphi(r),\varphi(s)) = DV(q,r,s)$

Bewijs. (q,r) is een affiene basis van X. Kies $x_0 = q$, $\mathbf{y}'_0 \in V' \setminus V$ (cfr. stelling 2.6.1). Dan is $A = (\mathbf{a}_1 = r-q, \mathbf{a}_2 = \mathbf{y}'_0)$ een basis van V'.

$$\begin{aligned} \varphi(p) &= \mathrm{vect}\{r-q\} && = \mathrm{vect}\{\mathbf{a}_1\} \quad \text{(verklaar)} \\ \varphi(q) &= i(q) = \mathrm{vect}\{\mathbf{y}'_0 + (q-x_0)\} = \mathrm{vect}\{\mathbf{y}'_0\} && = \mathrm{vect}\{\mathbf{a}_2\} \\ \varphi(r) &= i(r) = \mathrm{vect}\{\mathbf{y}'_0 + (r-x_0)\} && = \mathrm{vect}\{\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2\} \end{aligned}$$

$\Rightarrow (\varphi(p),\varphi(q),\varphi(r))$ is projectieve basis van $\mathrm{P}(V')$

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= i(s) \\ &= \mathrm{vect}\{\mathbf{y}'_0 + (s-x_0)\} \\ &= \mathrm{vect}\{\mathbf{y}'_0 + \lambda(r-q)\} \qquad \text{waar } \lambda = DV(q,r,s) \\ &= \mathrm{vect}\{\lambda \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2\} \end{aligned}$$

$$\overset{\text{st 3}}{\Rightarrow} \mathrm{CR}(\varphi(p),\varphi(q),\varphi(r),\varphi(s)) = \frac{\lambda}{1} = DV(q,r,s)$$

□

Oefening. Zij (p,q,r,s) vier verschillende punten op een projectieve rechte. Dan geldt:

$$\begin{aligned} \mathrm{CR}(p,q,r,s) &= (\mathrm{CR}(q,p,r,s))^{-1} \\ &= (\mathrm{CR}(p,q,s,r))^{-1} \\ &= 1 - \mathrm{CR}(p,r,q,s) \end{aligned}$$

Leid hieruit $\mathrm{CR}(\pi(p),\pi(q),\pi(r),\pi(s))$ af voor elke $\pi \in S(\{p,q,r,s\})$.

Oefening. Vind een alternatief bewijs van stelling 2, steunend op gevolg 3.

Oefening. (cfr. gevolg 3) p, q en r op een affiene rechte X, $\{s\} = \infty(X)$, $p \neq q \neq r \neq p$

$$\Rightarrow \mathrm{CR}(\varphi(p), \varphi(q), \varphi(r), \varphi(s)) = DV(r,q,p)$$

Voor het vervolg van deze paragraaf onderstellen we dat $1+1 \neq 0$ in $\mathbb{K}$.

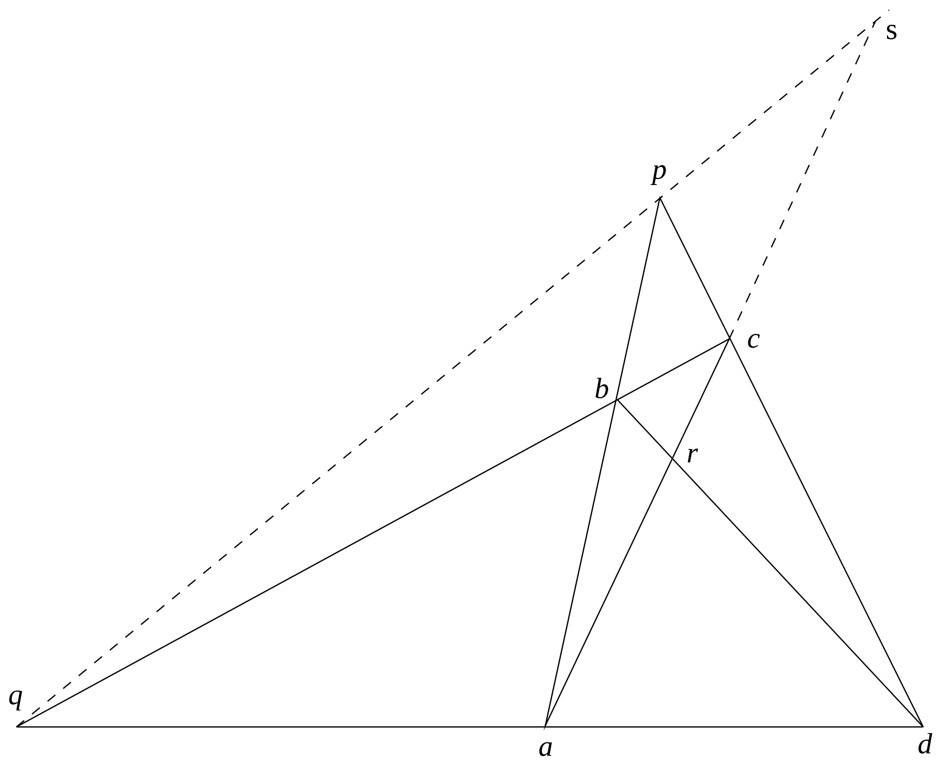
Definitie 3. *Zij p, q, r en s vier verschillende punten op een projectieve rechte. Het puntenviertal (p,q,r,s) heet **harmonisch** indien $\mathrm{CR}(p,q,r,s) = -1$. Men zegt ook dat s **harmonisch toegevoegd** is aan r t.o.v. p en q.*

Voorbeeld 1. (verifieer als oefening)
Zij q, r en s 3 verschillende punten op een affiene rechte X. Zij $\{p\} = \infty(X)$. Het puntenviertal $(\varphi(p), \varphi(q), \varphi(r), \varphi(s))$ is harmonisch $\Leftrightarrow$ q is het midden van het segment $[r,s]$.

Voorbeeld 2. (verifieer als oefening)
Analoog p, q en r drie verschillende punten op een affiene rechte X. Zij $\{s\} = \infty(X)$, dan is $(\varphi(p), \varphi(q), \varphi(r), \varphi(s))$ harmonisch $\Leftrightarrow$ r is het midden van het segment $[p,q]$.

Zekere figuren, zoals een “volledige vierhoek”, leveren harmonische puntenviertallen.

Definitie 4. *Een **volledige vierhoek** in een projectief vlak $\mathrm{P}(V)$ is een figuur gevormd door vier punten a, b, c, d die een projectieve basis van $\mathrm{P}(V)$ vormen en de zes verbindingsrechten $\langle a,b\rangle$, $\langle c,d\rangle$, $\langle a,d\rangle$, $\langle b,c\rangle$, $\langle a,c\rangle$ en $\langle b,d\rangle$.*



Figuur 2.5: een volledige vierhoek

Stelling 4. *Zij $\{p\} = \langle a,b\rangle \cap \langle c,d\rangle$, $\{q\} = \langle a,d\rangle \cap \langle b,c\rangle$, $\{r\} = \langle a,c\rangle \cap \langle b,d\rangle$, $\{s\} = \langle a,c\rangle \cap \langle p,q\rangle$ in de volledige vierhoek hierboven. Dan is (a,c,r,s) een harmonisch puntenviertal.*

Bewijs. $X = \mathrm{P}(V) \setminus \langle p, q \rangle$ is een affien vlak. In X zijn a, b, c en d de hoekpunten van een parallellogram (verklaar).
$\Rightarrow r$ is het midden van $[a, c]$ en $\{s\} = \infty(\langle a, c \rangle)$
$\overset{\text{vb } 2}{\Rightarrow} (a, c, r, s)$ harmonisch. □

Gevolg 4. *Zij in de figuur hierboven* $\{t\} = \langle a, d \rangle \cap \langle p, r \rangle$. *Dan is ook* (a, d, t, q) *een harmonisch puntenviertal.*

Bewijs. Vind een perspectiviteit die (a, c, r, s) op (a, d, t, q) stuurt en gebruik stelling 2. (Vind ook nog andere harmonische puntenviertallen). □

Toepassing. Leid uit het voorgaande een constructie af voor het punt p_4, harmonisch toegevoegd aan een gegeven punt p_3 t.o.v. gegeven punten p_1 en p_2. (p_1, p_2 en p_3 collineair en verschillend).

Uit stelling 1 (of stelling 2) kunnen we afleiden dat een projectiviteit van een projectieve rechte harmonische puntenviertallen op harmonische puntenviertallen stuurt. Het merkwaardige is dat, o.a. in het reële geval, het omgekeerde ook geldt. (Dit is een bijzonder geval van een meer algemene stelling van Von Staudt.)

Stelling 5. *Zij* V *een reële vectorruimte met dimensie 2 en zij* $\pi : \mathrm{P}(V) \to \mathrm{P}(V)$ *een bijectie met de eigenschap*
(a, b, c, d) *harmonisch in* $\mathrm{P}(V) \Rightarrow (\pi(a), \pi(b), \pi(c), \pi(d))$ *harmonisch in* $\mathrm{P}(V)$.
Dan is π *een projectiviteit van* $\mathrm{P}(V)$.

Bewijs. Kies een projectieve basis $B = (p, q, r)$ van $\mathrm{P}(V)$
$\Rightarrow p \neq q \neq r \neq p$
$\Rightarrow \pi(p) \neq \pi(q) \neq \pi(r) \neq \pi(p)$
$\Rightarrow \pi(B) = (\pi(p), \pi(q), \pi(r))$ is een projectieve basis van $\mathrm{P}(V)$.
Zij $\pi' \in \mathrm{PGL}(V)$ de unieke projectiviteit van $\mathrm{P}(V)$ die B op $\pi(B)$ stuurt. We willen tonen dat $\pi = \pi'$.

$$(\pi')^{-1} \circ \pi : \mathrm{P}(V) \to \mathrm{P}(V)$$

is een bijectie die B bewaart. Stel $f = \rho_B \circ (\pi')^{-1} \circ \pi \circ \rho_B^{-1}$ met $\rho_B : \mathrm{P}(V) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ zoals in definitie 1. Verifieer dat $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(\infty) = \infty$ zodat de bijectie

$$f : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

kan beperkt worden tot een bijectie $g = f|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Het volstaat nu te tonen dat $g = 1_{\mathbb{R}}$, immers dan volgt (verklaar) dat $f = 1_{\mathbb{R} \cup \{\infty\}}$ en $(\pi')^{-1} \circ \pi = 1_{\mathrm{P}(V)}$, en dus $\pi = \pi' \in \mathrm{PGL}(V)$. Daartoe volstaat weer te tonen dat g een automorfisme is van het veld $\mathbb{R}$ (vergelijk met het bewijs van stelling 1.2.5).

1. $g(x + y) = g(x) + g(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$
   Zij $x, y \in \mathbb{R}$ (willekeurig)
   Wegens voorbeeld 1 is $\left(\varphi(\infty), \varphi\left(\frac{x+y}{2}\right), \varphi(x), \varphi(y)\right)$ en harmonisch puntenviertal van

$P^1(\mathbb{R})$, waar

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{R}\cup\{\infty\} & \to & P^1(\mathbb{R}) \\ & \mathbb{R}\ni\alpha & \mapsto & \mathrm{vect}\{(\alpha,1)\} \\ & \infty & \mapsto & \mathrm{vect}\{(1,0)\} \end{array}$$

Merk op dat

$$\begin{aligned} \varphi\circ f &= \underbrace{\varphi\circ\rho_B}_{\sigma_B}\circ(\pi')^{-1}\circ\pi\circ\underbrace{\rho_B^{-1}}_{\sigma_B^{-1}\circ\varphi} \\ &= \underbrace{\sigma_B\circ(\pi')^{-1}\circ\pi\circ\sigma_B^{-1}}_{\text{stel }\mu}\circ\varphi \end{aligned}$$

met σ_B zoals in definitie 1 . Omdat $\sigma_B : P(V)\to P^1(\mathbb{R})$ een projectief isomorfisme is, $\pi' : P(V)\to P(V)$ eveneens, en $\pi : P(V)\to P(V)$ een bijectie is die harmonische puntenviertallen bewaart, is $\mu : P^1(\mathbb{R})\to P^1(\mathbb{R})$ eveneens een bijectie die harmonische puntenviertallen bewaart.
Bijgevolg geldt, door toepassing van μ op $\left(\varphi(\infty),\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right),\varphi(x),\varphi(y)\right)$:

$$\left(\varphi(f(\infty)),\varphi\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right),\varphi(f(x)),\varphi(f(y))\right)$$

is een harmonisch puntenviertal van $P^1(\mathbb{R})$.
Bijgevolg hebben we $\mathrm{CR}(\mathrm{vect}\{(1,0)\},\mathrm{vect}\{(\gamma,1)\},\mathrm{vect}\{(\alpha,1)\},\mathrm{vect}\{(\beta,1)\})=-1$ omdat $\varphi(f(\infty))=\varphi(\infty)=\mathrm{vect}\{(1,0)\}$, $\varphi\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)=\mathrm{vect}\{(\gamma,1)\}$, $\varphi(f(x))=\mathrm{vect}\{(\alpha,1)\}$ en $\varphi(f(y))=\mathrm{vect}\{(\beta,1)\}$ voor zekere $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$. Wegens gevolg 1 (met A de gewone basis van $\mathbb{R}^2$)

$$\Rightarrow \frac{\det\begin{pmatrix}1&\alpha\\0&1\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}\gamma&\beta\\1&1\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}1&\beta\\0&1\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}\gamma&\alpha\\1&1\end{pmatrix}}=\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}=-1$$

$$\Rightarrow \gamma=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Leid hieruit af dat $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}$, en dus, daar $x,y\in\mathbb{R}$, dat

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{g(x)+g(y)}{2}$$

I.h.b. (neem $y=0$): $g\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}g(x)$ daar $g(0)=0$
<u>Besluit:</u> $g(x+y)=g(x)+g(y) \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}$

2. $g(x\cdot y)=g(x)\cdot g(y) \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}$
Zij $x,y\in\mathbb{R}$ (willekeurig).
Toon eerst aan dat $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1,-1\}$ het puntenviertal $\left(\varphi(1),\varphi\left(x^2\right),\varphi(x),\varphi(-x)\right)$ harmonisch is. Zoals in stap 1 van het bewijs volgt dan:

$$(\underbrace{\varphi(f(1))}_{=\varphi(1)},\varphi\left(f\left(x^2\right)\right),\varphi(f(x)),\underbrace{\varphi(f(-x))}_{=\varphi(-f(x))}$$

is harmonisch. (verklaar)
Leid hieruit af dat:

$$f\left(x^2\right) = (f(x))^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Pas dit nu toe op $x+y$ i.p.v. x

$$\begin{aligned} f\left((x+y)^2\right) = & \quad (f(x+y))^2 \overset{\text{stap 1}}{=} (f(x)+f(y))^2 \\ \text{maar ook } = & \quad f(x^2+2xy+y^2) \overset{\text{stap 1}}{=} f(x^2)+2f(xy)+f(y^2) \end{aligned}$$

Hieruit volgt dus dat $f(xy) = f(x)f(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$ (verklaar)
Besluit: $g(x \cdot y) = g(x) \cdot g(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$

g is dus een automorfisme van het veld $\mathbb{R} \Rightarrow g = 1_{\mathbb{R}}$ □

2.8 Projectieve kegelsneden en de stelling van Pascal

We besluiten dit hoofdstuk met een korte studie van kegelsneden in een projectief vlak. Dit met een dubbel doel:

1. we constateren dat de projectieve classificatie van kegelsneden in het uitgebreide affiene vlak veel eenvoudiger is dan de affiene classificatie.

2. we leiden een merkwaardige stelling van Pascal af, die de stelling van Pappus veralgemeent.

Definitie 1. *Zij* $\mathrm{P}(V)$ *een projectief vlak en zij* $q : V \to \mathbb{K}$ *een niet-nulle kwadratische vorm op* V*. De (projectieve)* ***kegelsnede*** $\mathscr{Q}_q$*,* ***geassocieerd met*** q*, is de deelverzameling van* $\mathrm{P}(V)$ *gedefinieerd door:*

$$\mathscr{Q}_q = \{\mathrm{vect}\{\mathbf{v}\} \in \mathrm{P}(V) \mid q(\mathbf{v}) = 0\}$$

Opmerkingen.

1. $q(\mathbf{v}) = 0 \Leftrightarrow q(\lambda\mathbf{v}) = 0 \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ (verklaar)

2. Is $\mathrm{P}(V)$ een 3-dimensionale projectieve ruimte, dan kan men op dezelfde manier (projectieve) kwadrieken definiëren: zie literatuur.

Eigenschap 1. *Zij* $B = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ *een projectieve basis van* $\mathrm{P}(V)$*.*
Zij $E = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ *een basis van* V *met* $p_1 = \mathrm{vect}\{\mathbf{e}_1\}$*,* $p_2 = \mathrm{vect}\{\mathbf{e}_2\}$*,*
$p_3 = \mathrm{vect}\{\mathbf{e}_3\}$*,* $p_4 = \mathrm{vect}\{\sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i\}$*. Dan is de homogene vergelijking van* $\mathscr{Q}_q$ *t.o.v. de projectieve basis* B *van de vorm:*

$$\sum_{i,j=1}^{3} g_{ij}x_ix_j = 0 \quad \text{met } [g_{ij}] = \mathrm{Mat}_E\,(q)$$

(d.w.z. $\mathrm{vect}\{\sum_{i=1}^{3} x_i\mathbf{e}_i\} \in \mathscr{Q}_q \Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij}x_ix_j = 0$ *)*

Bewijs. (oefening) □

We zullen deze algemene vergelijking van een (projectieve) kegelsnede herschrijven als

$$f_1x_1^2 + f_2x_2^2 + f_3x_1x_2 + f_4x_1x_3 + f_5x_2x_3 + f_6x_3^2 = 0$$

(na substitutie $f_1 = g_{11},\ f_2 = g_{22},\ f_3 = 2g_{12},\ f_4 = 2g_{13},\ f_5 = 2g_{23}$ en $f_6 = g_{33}$) omdat dit ook de gedaante is, die we bekomen als we een (affiene) kegelsnede

$$f_1x_1^2 + f_2x_2^2 + f_3x_1x_2 + f_4x_1 + f_5x_2 + f_6 = 0 \text{ in } \mathbb{R}^2$$

uitbreiden met haar punten op ∞ en beschouwen als (projectieve) kegelsnede in $\mathrm{P}^2(\mathbb{R}) \leftrightarrow \mathbb{R}^2 \cup \infty(\mathbb{R}^2) = \widetilde{\mathbb{R}^2}$ met:

$$\mathrm{P}^2(\mathbb{R}) = \{\mathrm{vect}\{(x_1,x_2,1)\} \mid (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2\} \cup \{\mathrm{vect}\{(x_1,x_2,0)\} \mid (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\}$$

Voor de eenvoudige classificatie van de kegelsneden in $\mathrm{P}^2(\mathbb{R})$ verwijzen we naar oefening 2.9.18 op het einde van dit hoofdstuk.
Om de belangrijke stelling van Pascal voor te bereiden, bewijzen we eerst

Stelling 1. *Zij a, b, c, d en e vijf verschillende punten in een projectief vlak $\mathrm{P}(V)$ waarvan geen vier collineair zijn. Dan bestaat er juist één kegelsnede $\mathscr{Q}$ in $\mathrm{P}(V)$ die a, b, c, d en e bevat.*

Bewijs. a, b, c en d zijn niet collineair. We kunnen het geval waar 3 van deze 4 punten collineair zijn vlug afhandelen. Zijn bijvoorbeeld a, b en c collineair, dan is $\mathscr{Q}$ noodzakelijk de “ontaarde” kegelsnede $\langle a,b\rangle \cup \langle d,e\rangle$ (verklaar). Onderstel dus nu: geen 3 van de 4 punten a, b, c en d zijn collineair. Dan is (a,b,c,d) een projectieve basis van $\mathrm{P}(V)$. Bijgevolg bestaat er een basis $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$ van V met $a = \mathrm{vect}\{\mathbf{e}_1\},\ b = \mathrm{vect}\{\mathbf{e}_2\},\ c = \mathrm{vect}\{\mathbf{e}_3\}$ en $d = \mathrm{vect}\left\{\sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i\right\}$. De gezochte kegelsnede $\mathscr{Q}$ heeft dan een homogene vergelijking van de vorm (zie hoger):

$$f_1x_1^2 + f_2x_2^2 + f_3x_1x_2 + f_4x_1x_3 + f_5x_2x_3 + f_6x_3^2 = 0$$

We drukken uit dat a, b, c, d, $e = \mathrm{vect}\left\{\sum_{i=1}^3 \alpha_i\mathbf{e}_i\right\} \in \mathscr{Q}$. Dit levert achtereenvolgens

$$\begin{cases} f_1 = 0 \\ f_2 = 0 \\ f_6 = 0 \\ f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 = 0 \\ f_1\alpha_1^2 + f_2\alpha_2^2 + f_3\alpha_1\alpha_2 + f_4\alpha_1\alpha_3 + f_5\alpha_2\alpha_3 + f_6\alpha_3^2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{of } \left\{ \begin{array}{l} f_1 = f_2 = f_6 = 0 \\ \left. \begin{array}{l} f_3 + f_4 + f_5 = 0 \\ f_3\alpha_1\alpha_2 + f_4\alpha_1\alpha_3 + f_5\alpha_2\alpha_3 = 0 \end{array} \right\} (S) \end{array} \right.$$

Bekijken we het stelsel (S). Minstens 1 van de 3 determinanten

$$\Delta_1 = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1\alpha_2 & \alpha_1\alpha_3 \end{pmatrix}, \Delta_2 = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1\alpha_2 & \alpha_2\alpha_3 \end{pmatrix}, \Delta_3 = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1\alpha_3 & \alpha_2\alpha_3 \end{pmatrix}$$

is verschillend van 0. (bewijs dit als oefening: $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ zou impliceren dat e samenvalt met één van de andere punten) Zij bijvoorbeeld $\Delta_1 \neq 0$, dan beschrijven we (S) als

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1\alpha_2 & \alpha_1\alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_5 \\ -f_5\alpha_2\alpha_3 \end{pmatrix}$$

lossen we dit op naar f_3 en f_4, dan vinden we:

$$\Rightarrow f_3 = \frac{\det \begin{pmatrix} -f_5 & 1 \\ -f_5\alpha_2\alpha_3 & \alpha_1\alpha_3 \end{pmatrix}}{\det \Delta_1} = \frac{-f_5\alpha_3(\alpha_1-\alpha_2)}{\alpha_1(\alpha_3-\alpha_2)} = \frac{f_5\alpha_3(\alpha_1-\alpha_2)}{\alpha_1(\alpha_2-\alpha_3)}$$

$$\text{en } f_4 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & -f_5 \\ \alpha_1\alpha_2 & -f_5\alpha_2\alpha_3 \end{pmatrix}}{\det \Delta_1} = \frac{-f_5\alpha_2(\alpha_3-\alpha_1)}{\alpha_1(\alpha_3-\alpha_2)} = \frac{f_5\alpha_2(\alpha_3-\alpha_1)}{\alpha_1(\alpha_2-\alpha_3)}$$

$$\Rightarrow \mathscr{Q} \equiv \alpha_3(\alpha_1-\alpha_2)x_1x_2 + \alpha_2(\alpha_3-\alpha_1)x_1x_3 + \alpha_1(\alpha_2-\alpha_3)x_2x_3 = 0 \quad (*)$$

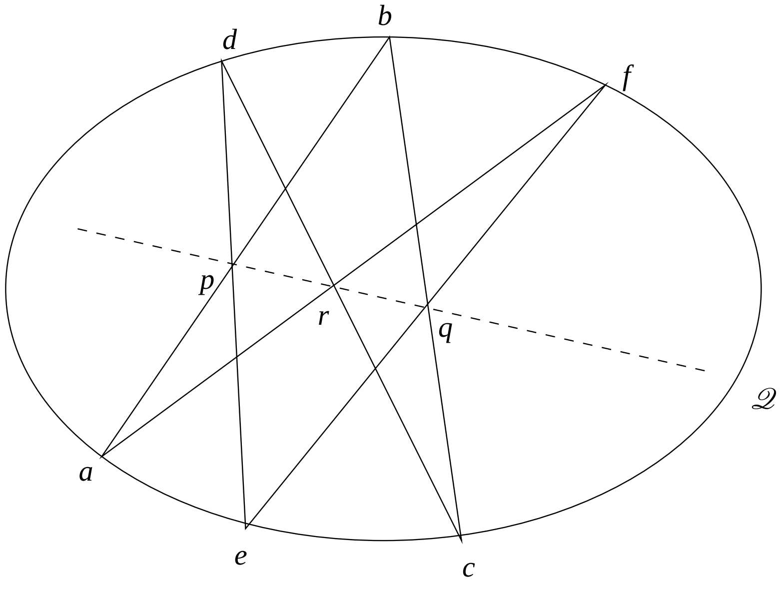
(waarom $f_5 \neq 0$?) (Merk op dat de andere gevallen $\Delta_2 \neq 0$, $\Delta_3 \neq 0$ ook tot dezelfde vergelijking leiden!)
<u>Besluit:</u> $\mathscr{Q}$ is de enige kegelsnede die a, b, c, d en e bevat. □

Stelling 2. ***(Pascal)***
Zij a, b, c, d, e en f zes verschillende punten in een projectief vlak $\mathrm{P}(V)$, waarvan geen vier collineair zijn. Zij $\{p\} = \langle a,b\rangle \cap \langle d,e\rangle$, $\{q\} = \langle b,c\rangle \cap \langle e,f\rangle$, $\{r\} = \langle c,d\rangle \cap \langle f,a\rangle$. Dan geldt:

$$p, q \text{ en } r \text{ collineair}$$

$$\Leftrightarrow \exists \text{ kegelsnede } \mathscr{Q} \text{ in } \mathrm{P}(V) \text{ met } a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f \in \mathscr{Q}$$

(deze kegelsnede is bovendien uniek)



Figuur 2.6: Pascal

Bewijs. 1. De “niet-ontaarde” situatie.

Onderstel dat geen 3 punten onder a, b, c en d collineair zijn.

Dan is (a,b,c,d) een projectieve basis van $\mathrm{P}(V)$.

$\Rightarrow \exists$ basis $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$ van V met $a = \operatorname{vect}\{\mathbf{e}_1\}$, $b = \operatorname{vect}\{\mathbf{e}_2\}$, $c = \operatorname{vect}\{\mathbf{e}_3\}$ en $d = \operatorname{vect}\left\{\sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i\right\}$. Zij, volgens stelling 1 , $\mathscr{Q}$ de unieke kegelsnede die a, b, c, d en $e = \operatorname{vect}\left\{\sum_{i=1}^3 \alpha_i \mathbf{e}_i\right\}$ bevat. Deze heeft vergelijking $(*)$ (zie hoger).

We bepalen nu p, q en r.

$$\begin{aligned}
\{p\} &= \langle a,b\rangle \cap \langle d,e\rangle \\
&= \mathrm{P}(\operatorname{vect}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}) \cap \mathrm{P}\left(\operatorname{vect}\left\{\sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i, \sum_{i=1}^3 \alpha_i \mathbf{e}_i\right\}\right) \\
&= \mathrm{P}\left(\operatorname{vect}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \cap \operatorname{vect}\left\{\sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i, \sum_{i=1}^3 \alpha_i \mathbf{e}_i\right\}\right)
\end{aligned}$$

Een eenvoudige oefening van lineaire algebra toont dat: (oefening)

$$\operatorname{vect}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \cap \operatorname{vect}\left\{\sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i, \sum_{i=1}^3 \alpha_i \mathbf{e}_i\right\} = \operatorname{vect}\{(\alpha_3-\alpha_1)\mathbf{e}_1 + (\alpha_3-\alpha_2)\mathbf{e}_2\},$$

zodat $p = \operatorname{vect}\{(\alpha_3-\alpha_1)\mathbf{e}_1 + (\alpha_3-\alpha_2)\mathbf{e}_2\}$.

Analoge berekeningen tonen aan dat, als $f = \operatorname{vect}\left\{\sum_{i=1}^3 \beta_i \mathbf{e}_i\right\}$: (oefening)

$$q = \operatorname{vect}\{(\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2)\mathbf{e}_2 + (\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)\mathbf{e}_3\} \text{ en } r = \operatorname{vect}\{\beta_2\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3\}$$

Dus zijn p, q en r collineair als en slechts als de drie vectoren

$$\begin{array}{c}
(\alpha_3-\alpha_1)\mathbf{e}_1 + (\alpha_3-\alpha_2)\mathbf{e}_2, \\
(\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2)\mathbf{e}_2 + (\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)\mathbf{e}_3 \\
\text{en } \beta_2\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3
\end{array} \quad \text{lineair afhankelijk zijn in } V.$$

Dit is equivalent met

$$\det\begin{pmatrix} \alpha_3-\alpha_1 & 0 & \beta_2 \\ \alpha_3-\alpha_2 & \alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2 & \beta_2 \\ 0 & \alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3 & \beta_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha_3(\alpha_1-\alpha_2)\beta_1\beta_2 + \alpha_2(\alpha_3-\alpha_1)\beta_1\beta_3 + \alpha_1(\alpha_2-\alpha_3)\beta_2\beta_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow f \in \mathscr{Q}$$

$$\Leftrightarrow a, b, c, d, e, f \in \mathscr{Q}$$

(verklaar alle stappen.)

2. Het “ontaarde” geval.

Onderstel dat er 3 collineaire punten bestaan onder a, b, c en d. Bijvoorbeeld onderstel

a, b en d collineair (werk zelf de andere gevallen uit).
In dit geval geldt:

$$\{p\} = \langle a,b\rangle \cap \langle d,e\rangle = \{d\} \Rightarrow p = d$$

$$\{r\} = \langle c, \underbrace{d}_{=p} \rangle \cap \langle f,a\rangle \Rightarrow \langle p,r\rangle = \langle c,d\rangle$$

(a) Onderstel p, q en r collineair

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{rl} \Rightarrow & q \in \langle p,r\rangle = \langle c,d\rangle \\ & \text{ook } q \in \langle b,c\rangle \quad \text{(per definitie)} \end{array}\right\} \Rightarrow q = c \\ \text{Maar ook } q \in \langle e,f\rangle \quad \text{(per definitie)} \qquad\qquad \end{array}\right\} \Rightarrow c,\ e \text{ en } f \text{ collineair}$$

$\Rightarrow a, b, c, d, e\ f$ op de ontaarde kegelsnede bestaande uit de rechten $\langle a,b\rangle$ (waarop d) en $\langle e,f\rangle$ (waarop c).

(b) Onderstel $a, b, c, d, e, f \in \mathcal{Q}$ met $\mathcal{Q}$ een kegelsnede van het vlak $\mathrm{P}(V)$.
Daar a, b en d collineair zijn, moet $\mathcal{Q}$ bestaan uit 2 verschillende rechten. (verklaar)
$\Rightarrow c, e$ en f collineair. (waarom?)

$$\left.\begin{array}{rrcccc} \Rightarrow & \{p\} & = & \langle a,b\rangle \cap \langle d,e\rangle & = & \{d\} \\ & \{q\} & = & \langle b,c\rangle \cap \langle e,f\rangle & = & \{c\} \\ \text{en} & \{r\} & = & \langle c,d\rangle \cap \langle f,a\rangle & \subset & \langle c,d\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow p, q, r \text{ collineair.}$$

$\square$

Oefening. Leid de projectieve stelling van Pappus (stelling 2.4.1) af uit de stelling van Pascal. Formuleer ook de omgekeerde stelling van Pappus die ook uit de stelling van Pascal volgt.

Opmerking. Men kan de dualiteit van $\mathrm{P}(V)$ definiëren die een kegelsnede "invariant" laat (zie literatuur). Zulke *polariteit* stuurt dan een punt (*pool*) op zijn *poollijn* t.o.v. die kegelsnede (en vice-versa). De duale stelling van de stelling van Pascal is dan de zogenaamde *stelling van Brianchon*. Zoek deze op.

2.9 Oefeningen bij hoofdstuk 2

1. Construeer het kleinste axiomatisch projectief vlak. Soms noemt men dit het **Fano-vlak**. Kan je homogene coördinaten invoeren in dit vlak?

2. Is het mogelijk om in het Euklidische vlak $n \geqslant 3$ punten te kiezen zodanig dat elke rechte door twee van de n punten een derde gekozen punt bevat? Zijn er veel mogelijkheden?

3. Bewijs dat in een projectief vlak alle rechten hetzelfde aantal punten hebben. Dit aantal noemen we de **orde** van het projectief vlak. Onderstel dat het vlak in kwestie eindige orde n heeft. Hoeveel rechten gaan er door een vast punt? Hoeveel punten zijn er dan in dat projectief vlak? Hoeveel rechten?

4. Ga na of er al dan niet axiomatische projectieve vlakken kunnen bestaan met volgend aantal punten: 121, 111, 112, 212, 222.

5. Wat als men in vorige oefening het woord “axiomatische” weglaat? Voor welke eindige orden bestaan er zeker projectieve vlakken?

6. Definieer een verzameling $\mathscr{P} := \{p_0, p_1, \ldots, p_{12}\}$ van punten en een verzameling $\mathscr{R} := \{R_0, R_1, \ldots, R_{12}\}$ van rechten. We spreken af dat een punt p_i op een rechte R_j ligt als en slechts als $i + j \equiv 0$, 1, 3 of 9 mod 13. Verifieer dat $(\mathscr{P}, \mathscr{R})$ een (axiomatisch) projectief vlak definiëren. Geef coördinaten aan de punten van dit vlak. Kan dit vlak geïdentificeerd worden met een projectief vlak over een vectorruimte? Zo ja, over dewelke?

7. Zij V een vectorruimte van dimensie $\geqslant 3$. Bewijs dat $A \subset P(V)$ een projectieve deelruimte is van $P(V)$ als en slechts als

$$\forall a, b \in A : \mathrm{proj}\{a, b\} \subset A$$

8. Bestudeer $P^3(\mathbb{F}_2)$. Hoeveel punten, rechten en vlakken heeft deze ruimte? Bestudeer de doorsneden van deelruimten van deze ruimte in functie van hun dimensie.

9. Op de eenheidssfeer $S^2 := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ van $\mathbb{R}^3$ kan men volgende equivalentierelatie definiëren:

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \pm\mathbf{y}$$

   Bepaal aan de hand van de constructie van definitie 2.2.1 een bijectie Φ van $P^2(\mathbb{R})$ naar het quotiënt $S^2/_\sim$. Wat zijn de beelden van de rechten van $P^2(\mathbb{R})$ door Φ? Hoe zou je een topologie plaatsen op $P^2(\mathbb{R})$? Is $P^2(\mathbb{R})$ Hausdorff, samenhangend, compact, … voor deze topologie?

10. Toon aan dat, wanneer je in de definitie van een axiomatisch projectief vlak axioma (P3) vervangt door (P3)’: “Elk punt ligt op tenminste 3 rechten”, je een equivalente definitie krijgt.

11. Uit de theorie weet je dat een hypervlak H van een projectieve ruimte $P(V)$ overeenkomt met een punt H^* van de duale ruimte $P(V^*)$. Zij U een (projectieve) deelruimte van $P(V)$. Bewijs dat

$$U^* = \{H^* \mid H \text{ hypervlak van } P(V) \text{ en } U \subset H\}$$

   Zij $(L, \leqslant)$ een partieel geordende verzameling. $(L, \leqslant)$ heet een **tralie** indien voor elk paar $x, y \in L$ een kleinste bovengrens $x \vee y$ en een grootste ondergrens $x \wedge y$ bestaat. Bewijs dat de verzameling van alle projectieve deelruimten van $P(V)$ met de inclusie als orderelatie een tralie vormt. Men noemt dit de **tralie geassocieerd** met $P(V)$.

   Met elke tralie $(L, \leqslant)$ kan men een **duale tralie** $(L^*, \leqslant^*)$ definiëren door te stellen $L^* = L$ en $x \leqslant^* y \Longleftrightarrow y \leqslant x$. Twee tralies $(L, \leqslant)$ en $(L', \leqslant')$ heten **isomorf** indien er een bijectie $f : L \longrightarrow L'$ bestaat met de eigenschap $\forall x, y \in L : f(x \vee y) = f(x) \vee' f(y)$ en $f(x \wedge y) = f(x) \wedge' f(y)$. Toon aan dat de tralie geassocieerd met $P(V^*)$ isomorf is met de duale van de tralie geassocieerd met $P(V)$.

12. Construeer een projectief vlak van orde 4 (d.w.z. met 5 punten op elke rechte).

13. Zij X een affiene ruimte en f een affiniteit van X. Je kan X uitbreiden tot een projectieve ruimte met de bijectie $\varphi : X \cup \infty(X) \longrightarrow P(V')$ gegeven in stelling 2.6.1 . Volgens stelling 2.6.4 bestaat er een unieke afbeelding $\pi \in PGL(V')$ met $\pi|_{P(V)} = P(L_f)$ en $\pi \circ i = i \circ f$. Bewijs dat f een dilatatie is als en slechts als $(\varphi^{-1} \circ \pi \circ \varphi)|_{\infty(X)} = 1_{\infty(X)}$.

14. Zij $\pi : P(V) \longrightarrow P(V^*)$ een projectief isomorfisme en definieer
$$D_\pi : \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{P} : Q \longmapsto \bigcap_{q \in Q} \xi(\pi(q))$$
Waarbij $\xi : P(V^*) \longrightarrow \mathscr{P} : \mathrm{vect}\{f\} \longmapsto P(\ker f)$. Bewijs dat D_π de eigenschappen heeft van de afbeelding D uit stelling 2.5.3 .
Omgekeerd, voor welke π is $D_\pi = D$?

15. Op een blad papier staan twee (stukken van) rechten getekend, die elkaar snijden buiten het blad. Je moet een derde rechte tekenen die door het snijpunt van de andere twee loopt. Vind een constructie.

16. Zij a_1, a_2, a_3 en a_4 vier affiene punten waarvan de eerste 3 verschillend zijn. Kies een affiene basis en zij $\mathbf{x}_i$ de affiene coördinaten van de punten a_i t.o.v. die basis. Door een laatste coördinaat gelijk aan 1 toe te voegen aan die coördinaten, kunnen we overgaan op projectieve coördinaten. Toon aan dat de dubbelverhouding van die 4 punten gegeven wordt door volgende formule:
$$\frac{(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_2)}{(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_1)}$$

17. In een axiomatisch projectief vlak $(\mathscr{P}, \mathscr{L})$ van orde $n > 1$ beschouwt men een verzameling Q van $n+1$ punten met volgende eigenschappen:
    - Geen drie punten van Q zijn collineair;
    - Voor elke $q \in Q$ bestaat er een unieke rechte $T_q \in \mathscr{L}$ met $T_q \cap Q = \{q\}$.

    (a) Bepaal de verzameling $I := \{\#(R \cap Q) \mid R \in \mathscr{L}\}$.
    (b) Geef voor elke $i \in I$ het aantal rechten $R \in \mathscr{L}$ met $\#(R \cap Q) = i$.

18. Zij $q : V \longrightarrow \mathbb{K}$ een kwadratische vorm op een eindigdimensionale vectorruimte V. De verzameling $\mathscr{Q}_q := \{\mathrm{vect}\{\mathbf{v}\} \mid q(\mathbf{v}) = 0\} \subset P(V)$ noemt men de **projectieve kwadriek** geassocieerd met q. Als $P(V)$ van dimensie 2 is, spreekt met van *projectieve kegelsnede*. De **rang** van $\mathscr{Q}_q$ is de rang van q verminderd met 1. We bestuderen de kegelsneden van rang 2 in $P^2(\mathbb{R})$.

    (a) Toon aan dat je, door een goede basis te kiezen, de vergelijking van een kegelsnede van rang 2 steeds kan terugbrengen tot één van de volgende vormen:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$
$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \qquad (1)$$
$$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0 \qquad (2)$$
$$-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$$

(b) De niet-lege projectieve kegelsneden kunnen enkel vormen (1) en (2) aannemen en bovendien kan (2) in (1) getransformeerd worden door de volgorde van de basispunten te veranderen. Besluit dat alle niet-lege projectieve kegelsneden van rang 2 in $P^2(\mathbb{R})$ *projectief equivalent* zijn.

(c) Geef een beschrijving van de reële affiene kegelsneden van rang 2 aan de hand van het aantal "punten op oneindig" van hun projectieve uitbreiding.

19. In het Euklidische vlak $\mathbb{R}^2$ hebben alle cirkels een vergelijking van de vorm

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$$

We kunnen $\mathbb{R}^2$ inbedden in $\mathbb{C}^2$ dat we dan (als affiene ruimte over zichzelf) uitbreiden tot $P^2(\mathbb{C})$ door toevoeging van een "rechte op oneindig" met vergelijking $z = 0$. De verzamelingen van punten van $P^2(\mathbb{C})$ die voldoen aan een homogene vergelijking van de vorm $x^2 + y^2 + mxz + nyz + pz^2 = 0$ noemen we ook **cirkels**. Merkwaardig is dat sommige punten van het complexe projectieve vlak behoren tot *alle* cirkels. Bepaal de twee punten van de rechte $z = 0$ die op alle cirkels liggen. Men noemt ze **cyclische punten** en noteert ze k en l.

Als men in $\mathbb{R}^2$ twee rechten A en B heeft die elkaar snijden in een punt s, kunnen we de projectieve punten $a = \varphi(\infty(A))$ en $b = \varphi(\infty(B))$ beschouwen en stelt men

$$\angle(A,B) = \left| \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \operatorname{CR}(k,l,a,b) \right|$$

Toon aan dat $\angle(A,B)$ overeenkomt met de gebruikelijke Euklidische hoek tussen de rechten A en B. [HINT: goniometrische vorm van een complex getal.]

Opmerkingen: De logarithme werd met een hoofdletter genoteerd omdat de complexe logarithme eigenlijk niet goed gedefinieerd is doordat e^z een periode $2\pi i$ heeft. Je zal dit volgend jaar in detail zien in de cursus complexe analyse.

Deze definitie laat toe om ook hoeken te definiëren in niet-Euklidische vlakken. De formule blijft dezelfde maar de punten k en l worden anders gedefinieerd (zie cursus Differentiaalmeetkunde).