UNIVERSITEIT GENT

Faculteit Wetenschappen

Vakgroep Wiskunde

Meetkundige constructies van twee-karakterverzamelingen

Lieve Vandewalle

Promotor: dr. Jan De Beule

Academiejaar 2014-2015

Masterproef ingediend tot het behalen van de academische graad van master in de wiskunde, afstudeerrichting zuivere wiskunde.

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

Inleiding

In dit hoofdstuk bespreken we enkele begrippen en belangrijke stellingen die we in de loop van deze thesis nodig zullen hebben. Voor meer informatie en details over de zaken die in dit hoofdstuk aan bod komen, verwijs ik graag naar de cursussen codeertheorie, grafentheorie, projectieve meetkunde en Galoismeetkunde uit de bachelor- en masteropleiding Wiskunde aan de Universiteit Gent.

1.1 Codeertheorie

Definitie 1.1.1. Een **lineaire** $[n, k]$**-code** C over GF(q) is een k-dimensionale deelruimte van de vectorruimte $V(n, q)$. De vectoren in C worden **codewoorden** genoemd.

Definitie 1.1.2. Het **gewicht** $w(x)$ van een vector $x \in V(n, q)$ is het aantal niet-nulposities van x. Een **twee-gewichtcode** is een code waarvoor $|\{i \mid i \neq 0 \wedge A_i \neq 0\}| = 2$, waarbij A_i het aantal codewoorden met gewicht i voorstelt. Het **minimum gewicht** $w(C)$ van een lineaire code C is het minimum van de gewichten van de codewoorden $x \in C \setminus \{0\}$.

Definitie 1.1.3. Zij C een $[n, k]$-code over GF(q). Dan is de **duale code** $C^\perp$ de verzameling vectoren van $V(n, q)$ die orthogonaal zijn met elke vector van C, m.a.w.

$$C^\perp = \{v \in V(n, q) \mid v \cdot u = 0,\ \forall u \in C\}.$$

Stelling 1.1.4. *Als C een lineaire $[n, k]$-code is over* GF(q)*, dan is $C^\perp$ een lineaire $[n, n-k]$-code over* GF(q)*.*

Definitie 1.1.5. Een matrix G waarvan de rijen een basis vormen voor de lineaire $[n, k]$-code C noemen we een **generatormatrix** van C. Een matrix H is een **pariteitcontrolematrix** voor C als H een generatormatrix van $C^\perp$ is.

Stelling 1.1.6. *Zij C een lineaire code met pariteitcontrolematrix H. Dan geldt*

$$C = \{x \in V(n, q) \mid xH^T = 0\}.$$

Definitie 1.1.7. De **afstand** $d(x, y)$ tussen twee vectoren x en y in $V(n, q)$ is het aantal posities waarin x en y verschillen. De **minimumafstand** $d(C)$ van de code C wordt gegeven door

$$d(C) = \min\{d(x, y) \mid x, y \in C,\ x \neq y\}.$$

Stelling 1.1.8. *Beschouw twee vectoren $x = (x_1, \ldots, x_n)$ en $y = (y_1, \ldots, y_n)$ in $V(n, q)$. Dan is $d(x, y) = w(x - y)$.*

Bewijs. Er geldt

$$d(x,y) = |\{i \in \{1,\ldots,n\} \mid\mid x_i \neq y_i\}| = |\{i \in \{1,\ldots,n\} \mid\mid x_i - y_i \neq 0\}| = w(x-y).$$

□

Stelling 1.1.9. *Voor elke lineaire code C geldt $d(C) = w(C)$.*

Bewijs. Er geldt

$$d(C) = \min_{\substack{x,y\in C\\ x\neq y}} d(x,y) = \min_{\substack{x,y\in C\\ x-y\neq 0}} w(x-y) = w(C).$$

□

We geven nu een belangrijk resultaat, waarvan het bewijs gegeven wordt zoals in de cursus codeertheorie van L. Storme [19].

Stelling 1.1.10. Fundamentele stelling van de codeertheorie. *Zij C een lineaire $[n,k]$-code over* GF(q) *met pariteitcontrolematrix H. Dan is de minimumafstand van C gelijk aan d als en slechts als elke $d-1$ kolommen van H lineair onafhankelijk zijn en er tenminste één stel van d lineair afhankelijke kolommen is.*

Bewijs. Veronderstel eerst dat $d(C) = d$. Uit de voorgaande stelling volgt dat ook $w(C) = d$. We noteren de kolommen van H als $h_1,\ldots,h_n$. Stel dat kolommen $h_{j_1}, h_{j_2},\ldots,h_{j_{d-1}}$ lineair afhankelijk zijn. Dan bestaan er elementen $x_{j_1}, x_{j_2},\ldots,x_{j_{d-1}}$ (niet allemaal 0), waarvoor

$$x_{j_1}h_{j_1} + x_{j_2}h_{j_2} + \ldots + x_{j_{d-1}}h_{j_{d-1}} = 0.$$

Zonder verlies van algemeenheid mogen we aannemen dat $j_1 < j_2 < \cdots < j_{d-1}$. Stel

$$x = (0,\ldots,0,x_{j_1},0,\ldots,0,x_{j_2},0,\ldots,0,x_{j_{d-1}},0,\ldots,0).$$

Dan is $xH^T = 0$, dus $x \in C$ met $w(x) \leq d-1$. Dit is echter strijdig, vermits $w(C) = d$. Elke $d-1$ kolommen van H zijn dus lineair onafhankelijk.
Aangezien $w(C) = d$, bestaat er een codewoord $z \in C$ met $w(z) = d$. We kunnen schrijven

$$z = (0,\ldots,0,z_{i_1},0,\ldots,0,z_{i_2},0,\ldots,0,z_{i_d},0,\ldots,0),$$

waarbij $z_{i_k} \neq 0$ voor $k = 1,\ldots,d$. Aangezien $z \in C$ geldt $zH^T = 0$. Hieruit volgt

$$z_{i_1}h_{i_1} + z_{i_2}h_{i_2} + \ldots + z_{i_d}h_{i_d} = 0,$$

waaruit we kunnen besluiten dat de kolommen $h_{i_1}, h_{i_2},\ldots,h_{i_d}$ van H lineair afhankelijk zijn.

Stel nu omgekeerd dat elke $d-1$ kolommen van H lineair onafhankelijk zijn en dat H minstens één stel van d lineair afhankelijke kolommen heeft. Stel $d(C) = w(C) = d'$, dan moeten we bewijzen dat $d' = d$. We veronderstellen eerst $d' > d$. Uit het vorige deel van het bewijs volgt dat elke $d'-1 \geq d$ kolommen van H lineair onafhankelijk zijn. Dan zijn ook elke d kolommen van H lineair onafhankelijk, een strijdigheid. Stel vervolgens $d' < d$. Dan bezit H minstens één stel van d' lineair afhankelijke kolommen. Elk stel van $d-1 \geq d'$ kolommen dat deze d' kolommen bevat, bestaat dan uit $d-1$ lineair afhankelijke kolommen, opnieuw een strijdigheid. Bijgevolgd is $d' = d$ en geldt $d(C) = d$. □

1.2 Grafentheorie

Definitie 1.2.1. Een **graaf** $G = (V, E)$ bestaat uit een eindige verzameling V van **toppen** en een verzameling E van paren elementen uit V, de **bogen** van de graaf.

Definitie 1.2.2. Twee toppen zijn **adjacent** als ze verbonden zijn door een boog.

Notatie. Als twee toppen x en y adjacent zijn, noteren we $x \sim y$.

Definitie 1.2.3. De **adjacentiematrix** $A = (a_{ij})$ van een graaf $G = (V, E)$ met $V = \{v_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ wordt bepaald door

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als } v_i \sim v_j, \\ 0 & \text{als } v_i \not\sim v_j. \end{cases}$$

Definitie 1.2.4. De **graad** van een top v in een graaf is het aantal toppen waarmee v adjacent is. Als elke top van een graaf dezelfde graad k heeft, noemen we die graaf k-**regulier**. We zeggen dan dat de graaf regulier is met **valentie** k.

Definitie 1.2.5. Een graaf $G = (V, E)$ is **sterk regulier met parameters** (n, k, λ, μ) als $n, k, \lambda, \mu \in \mathbb{N}$, $|V| = n$, G k-regulier is, elk paar adjacente toppen juist λ gemeenschappelijke buren heeft en elk paar niet-adjacente toppen juist μ gemeenschappelijke buren heeft.

We beschrijven nu een belangrijke stelling i.v.m. de eigenwaarden van de adjacentiematrix van een sterk reguliere graaf. Een bewijs van deze stelling is terug te vinden bij Brouwer et. al. [1], alsook in de cursus grafentheorie van H. Van Maldeghem [25]. Ik heb echter gekozen voor de versie in de thesis van L. Van Puyvelde [27], die gebaseerd is op [1].

Stelling 1.2.6. *Zij $A = (a_{ij})$ de adjacentiematrix van een samenhangende sterk reguliere graaf G met parameters (n, k, λ, μ). Dan heeft A drie verschillende eigenwaarden, namelijk k, e^+ en e^- met respectievelijke multipliciteiten 1, f^+ en f^- die gegeven worden door*

$$\begin{aligned} e^+ &= \frac{\lambda - \mu + \sqrt{(\lambda-\mu)^2 + 4(k-\mu)}}{2}, \\ e^- &= \frac{\lambda - \mu - \sqrt{(\lambda-\mu)^2 + 4(k-\mu)}}{2}, \\ f^+ &= \frac{k(e^- + 1)(k - e^-)}{(k + e^+e^-)(e^+ - e^-)}, \\ f^- &= \frac{k(e^+ + 1)(k - e^+)}{(k + e^+e^-)(e^- - e^+)}. \end{aligned}$$

Hierbij geldt $e^+ \geq 0$ en $e^- < 0$.

Bewijs. We bepalen eerst de elementen van $A^2 = (b_{ij})$.
Er geldt $b_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}a_{jr}$, wat betekent dat we een bijdrage één krijgen voor iedere combinatie van i en j waarvoor $a_{ir} = a_{jr} = 1$. Voor $i = j$ tellen we het aantal toppen die adjacent zijn met top v_i, dit is precies de valentie k. Als $i \neq j$ en toppen v_i en v_j adjacent zijn, tellen we het aantal toppen die zowel met v_i als met v_j adjacent zijn. Dat aantal is precies gelijk aan λ. Als $i \neq j$ en toppen v_i en v_j zijn niet adjacent, dan tellen we opnieuw het aantal toppen die zowel met v_i als met v_j adjacent zijn. In dit geval is dat aantal precies gelijk aan μ. We bekomen $A^2 = kI + \lambda A + \mu(J - I - A)$, waarbij I de identiteitsmatrix is van orde n en J de $(n \times n)$-matrix waarvan elk element gelijk is aan 1. Dit kunnen we nog herschrijven als

$$A^2 + (\mu - \lambda)A + (\mu - k)I = \mu J. \tag{1.1}$$

Veronderstel nu dat m een eigenwaarde is van A met eigenvector $w = (w_1, \ldots, w_n)$. Uit (1.1) volgt dat w ook een eigenvector is van de matrix μJ. Vermenigvuldigen we beide leden van (1.1) met w, dan vinden we

$$(m^2 + (\mu - \lambda)m + (\mu - k))w_j = \mu \sum_{i=1}^{n} w_i \qquad \text{voor } j = 1, \ldots, n. \tag{1.2}$$

Als het rechterlid van deze uitdrukking verschillend is van nul, zijn alle w_j's ($j = 1, \ldots, n$) gelijk. Dan is $m = k$ vermits $Aj = kj$, waarbij $j = (1, \ldots, 1)$.
In het bijzonder vinden we dan

$$k^2 + (\mu - \lambda)k + \mu - k = \mu n.$$

Omdat de eigenruimte horende bij de eigenwaarde k voortgebracht wordt door j, is deze ééndimensionaal. Omdat A symmetrisch is, en dus diagonaliseerbaar, is de algebraïsche multipliciteit van de eigenwaarde k gelijk aan de meetkundige multipliciteit en dit is gelijk aan 1.

Als het rechterlid van (1.2) gelijk is aan nul, is m een oplossing van de kwadratische vergelijking

$$x^2 + (\mu - \lambda)x + \mu - k = 0.$$

Aangezien A zeker een negatieve eigenwaarde heeft (de eigenwaarde $k > 0$ en de som van de eigenwaarden van A is 0) en de constante term $\mu - k$ van de kwadratische vergelijking kleiner dan of gelijk aan nul is, zijn er twee oplossingen, $x = e^+$ en $x = e^-$ met $e^+ \geq 0$ en $e^- < 0$.
We bekomen $e^+ = \frac{\lambda-\mu+\sqrt{(\lambda-\mu)^2+4(k-\mu)}}{2}$ en $e^- = \frac{\lambda-\mu-\sqrt{(\lambda-\mu)^2+4(k-\mu)}}{2}$.
Bovendien geldt $e^-e^+ = \mu - k$, $e^- + e^+ = \lambda - \mu$ en $(k - e^-)(k - e^+) = \mu n$. In het bijzonder is $k = e^+$ als en slechts als $\mu = 0$, wat niet kan wegens de gebruikte definitie van een sterk reguliere graaf en het feit dat de graaf in deze stelling samenhangend verondersteld wordt. Aangezien $n > 0$, volgt uit $(k - e^-)(k - e^+) = \mu n$ dat $k > e^+ > e^-$, want $e^- < 0$ impliceert $k - e^- > 0$.

Om de multipliciteiten f^+ resp. f^- van de eigenwaarden e^+ resp. e^- te berekenen, lossen we een stelsel op van twee lineaire vergelijkingen in twee onbekenden f^+ en f^-. Enerzijds weten we dat de som van de multipliciteiten gelijk is aan de orde van de adjacentiematrix: $1 + f^+ + f^- = n$, anderzijds moet de som van alle eigenwaarden, multipliciteiten meegerekend, gelijk zijn aan nul: $k + e^+f^+ + e^-f^- = 0$.
Men kan nagaan dat dit het volgende oplevert:

$$f^+ = \frac{k(e^- + 1)(k - e^-)}{(k + e^+e^-)(e^+ - e^-)} = \frac{(e^- + 1)k(k - e^-)}{\mu(e^- - e^+)}$$

en

$$f^- = \frac{k(e^+ + 1)(k - e^+)}{(k + e^+e^-)(e^- - e^+)} = n - 1 - f^+.$$

□

Ook de omgekeerde stelling is geldig. Het bewijs ervan komt uit de cursus eindige meetkunde van B. De Bruyn [4]. We geven eerst een definitie.

Definitie 1.2.7. Beschouw een $(n \times n)$- matrix A met eigenwaarden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (niet noodzakelijk verschillend). De **karakteristieke veelterm** van A is de veelterm

$$\chi_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n).$$

De **minimaalveelterm** $m(x)$ van A is de kleinste factor van de karakteristieke veelterm waarvoor $m(A) = 0$.

Stelling 1.2.8. *Zij G een samenhangende reguliere graaf waarvan de adjacentiematrix juist drie verschillende eigenwaarden heeft. Dan is G sterk regulier.*

Bewijs. Beschouw een samenhangende, k-reguliere graaf G met adjacentiematrix A t.o.v. een bepaalde volgorde van de toppen. De drie eigenwaarden van A stellen we gelijk aan k, λ_1 en λ_2. Aangezien A een symmetrische matrix is, wordt de minimaalveelterm van A gegeven door $m(X) = (X-k)(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)$. Stel $B := (A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)$ met I de $(n \times n)$-eenheidsmatrix. Aangezien $(A-kI)B = 0$, is elke niet-nul kolom van B een eigenvector van A bij de eigenwaarde k. Aangezien G een samenhangende k-reguliere graaf is, is de multipliciteit van k als eigenwaarde van A gelijk aan 1. De bijhorende eigenvector is $j = (1, \ldots, 1)$. Bijgevolg is elke kolom van B een veelvoud van j. Aangezien B symmetrisch is, moet B een veelvoud zijn van de $(n \times n)$-matrix J met op alle posities een 1. Bijgevolg kan A^2 geschreven worden als lineaire combinatie van de matrices I, J en A. Er bestaan dus reële getallen k', λ en μ zodat $A^2 = k'I + \lambda A + \mu(J - I - A)$. Hieruit volgt dat G regulier is met valentie k' (dus $k' = k$), elke twee verschillende adjacente toppen precies λ gemeenschappelijke buren hebben en elke twee verschillende niet-adjacente toppen juist μ gemeenschappelijke buren hebben. Aangezien k, λ en μ natuurlijke getallen zijn, is G een sterk-reguliere graaf met parameters (n, k, λ, μ). □

1.3 Meetkunde

1.3.1 Kwadrieken en Hermitische variëteiten

Definitie 1.3.1. Een **kwadriek** Q in PG(n,q) met $n \geq 1$ is elke verzameling punten van PG(n,q) die voldoen aan een vergelijking van de vorm

$$F = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i \leq j}}^{n} a_{ij} X_i X_j,$$

met $a_{ij} \in$ GF(q) en niet alle a_{ij}'s gelijk aan nul.

Definitie 1.3.2. Zij X een niet-lege puntenverzameling van PG(n,q) waarvan alle punten gelegen zijn in een r-dimensionale deelruimte Σ_r van PG(n,q). Zij Σ_s $(s \neq -1)$ een s-dimensionale deelruimte van PG(n,q) scheef aan Σ_r. De **kegel** $\Sigma_s X$ bestaat uit alle punten op de rechten tx met $t \in \Sigma_s$ en $x \in X$. We noemen Σ_s de **top** van de kegel en X de **basis**.

Definitie 1.3.3. Beschouw een kwadriek Q in PG(n,q). Een punt p van PG(n,q) is **singulier** voor Q als voor elke rechte L door p geldt $L \cap Q = \{p\}$ of $L \cap Q = L$. Een kwadriek Q is **singulier** als Q een singulier punt bevat.

Stelling 1.3.4. *Zij Q een kwadriek in $PG(n,q)$, dan is de verzameling van alle singuliere punten een deelruimte van* PG(n,q).

Stelling 1.3.5. *Zij Q een singuliere kwadriek in* PG(n,q) *verschillend van een hypervlak. Dan is Q een kegel $\pi_{n-r-1}Q'$ met als top de $(n-r-1)$-dimensionale deelruimte van de singuliere punten van Q, $n > r$ en als basis een niet-singuliere kwadriek in een deelruimte* PG(r,q) *van* PG(n,q) *die scheef is aan π_{n-r-1}.*

Op een coördinatentransformatie na zijn er slechts drie mogelijkheden voor niet-singuliere kwadrieken: parabolische, hyperbolische en elliptische kwadrieken.

Definitie 1.3.6. Een **parabolische kwadriek** $Q(2m,q)$, $m \geq 2$ is elke verzameling punten van $\mathsf{PG}(2m,q)$ die behoren tot een irreducibele kwadriek met standaardvergelijking

$$X_0X_1 + \ldots + X_{2m-2}X_{2m-1} + X_{2m}^2 = 0.$$

Definitie 1.3.7. Een **hyperbolische kwadriek** $Q^+(2m+1,q)$, $m \geq 2$ is elke verzameling punten van $\mathsf{PG}(2m+1,q)$ die behoren tot een irreducibele kwadriek met standaardvergelijking

$$X_0X_1 + \ldots + X_{2m}X_{2m+1} = 0.$$

Definitie 1.3.8. Een **elliptische kwadriek** $Q^-(2m+1,q)$, $m \geq 2$ is elke verzameling punten van $\mathsf{PG}(2m+1,q)$ die behoren tot een irreducibele kwadriek met standaardvergelijking

$$X_0X_1 + \ldots + X_{2m-2}X_{2m-1} + f(X_{2m}, X_{2m+1}) = 0,$$

met f een irreducibel homogeen polynoom van graad twee over $\mathsf{GF}(q)$.

Stelling 1.3.9. *Voor niet-singuliere kwadrieken geldt:*

$$\begin{aligned}
|Q(2m,q)| &= \frac{q^{2m}-1}{q-1},\\
|Q^-(2m+1,q)| &= \frac{(q^m-1)(q^{m+1}+1)}{q-1} = \frac{q^{2m+1}-q^{m+1}+q^m-1}{q-1},\\
|Q^+(2m+1,q)| &= \frac{(q^m+1)(q^{m+1}-1)}{q-1} = \frac{q^{2m+1}+q^{m+1}-q^m-1}{q-1}.
\end{aligned}$$

Stelling 1.3.10. *Beschouw een niet-singuliere kwadriek Q in $\mathsf{PG}(n,q)$. Dan snijdt een hypervlak Σ van $\mathsf{PG}(n,q)$ de kwadriek Q in ofwel een niet-singuliere kwadriek van $\mathsf{PG}(n-1,q) \equiv \Sigma$, ofwel is Σ een raakhypervlak en is $\Sigma \cap Q$ een kegel met top het raakpunt P en basis een niet-singuliere kwadriek van hetzelfde type als Q in een deelruimte van dimensie $n-2$ scheef aan P.*

Stelling 1.3.11. *Beschouw een niet-singuliere parabolische kwadriek $Q(2m,q)$ in $\mathsf{PG}(2m,q)$ met q even en $m \geq 1$. Dan hebben alle raakhypervlakken van $Q(2m,q)$ juist één punt N gemeen.*

Definitie 1.3.12. Als de voorwaarden uit de vorige stelling voldaan zijn, noemen we het punt N de **kern** van de niet-singuliere parabolische kwadriek $Q(2m,q)$.

Definitie 1.3.13. Een **ovaal** in $\mathsf{PG}(2,q)$ is een verzameling van $q+1$ punten in $\mathsf{PG}(2,q)$ waarvan er geen drie collineair zijn.

Definitie 1.3.14. Een rechte L in $\mathsf{PG}(2,q)$ is een **raaklijn** aan de ovaal O als L juist één punt met O gemeen heeft.

Stelling 1.3.15. *Zij O een ovaal in $\mathsf{PG}(2,q)$, q even, dan gaan de raaklijnen aan O door eenzelfde punt.*

Bewijs. Beschouw een punt $x \in O$. Dit punt x spant met elk van de q andere punten van O een rechte op. Aangezien er $q+1$ rechten gaan door x, is er een raaklijn door x aan O. Beschouw nu een punt $y \notin O$. Stel dat de rechten door y juist 0 of 2 punten met O gemeen hebben. Dan volgt dat $|O|$ even is. Aangezien $|O| = q+1$ volgt hieruit dat q oneven is, een strijdigheid. Bijgevolg ligt y op een raaklijn aan O. De $q+1$ raaklijnen aan O bedekken dus alle punten van $\mathsf{PG}(2,q)$. Een verzameling van k rechten bevat hoogstens $kq+1$ punten, waarbij gelijkheid geldt als en slechts als de rechten concurrent zijn, i.e. door eenzelfde punt gaan. Hieruit volgt dat de $q+1$ raaklijnen aan O concurrent zijn. $\square$

Definitie 1.3.16. Beschouw een ovaal O in PG$(2,q)$. Het unieke punt N dat bevat is in alle raaklijnen aan O noemen we de **kern** van O.

Voorbeeld 1.3.17. Kegelsneden in een projectief vlak zijn voorbeelden van ovalen.

Definitie 1.3.18. Een **hyperovaal** in PG$(2,q)$ is een verzameling van $q+2$ punten waarvan er geen drie collineair zijn.

Stelling 1.3.19. *Zij O een hyperovaal in* PG$(2,q)$*, dan is q noodzakelijk even.*

Bewijs. We bewijzen eerst dat elke rechte van PG$(2,q)$ de hyperovaal snijdt in 0 of 2 punten. Wegens de definitie van hyperovaal kan een rechte geen 3 punten met O gemeen hebben. Beschouw een punt $x \in O$. Dit punt x spant met elk van de $q+1$ andere punten van O een rechte op. Elk van deze rechten heeft 2 punten met O gemeen. Aangezien er juist $q+1$ rechten door x gaan in PG$(2,q)$, zijn er geen andere rechten door x. Door x gaan dus geen raaklijnen.
Beschouw een punt $p \notin O$. Elk van de rechten door p heeft 0 of 2 punten met O gemeen. Bijgevolg is $|O| = q+2$ even, waaruit volgt dat q even is. □

Definitie 1.3.20. Een **Hermitische variëteit** $H(n,q^2)$ van PG(n,q^2) met $n \geq 1$ is elke verzameling punten van PG(n,q^2) die voldoen aan een vergelijking van de vorm

$$F = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij} X_i X_j^{\theta},$$

waarbij $a_{ij} \in$ GF(q^2), niet alle a_{ij}'s gelijk zijn aan nul, $\theta \in Aut(q^2)$ met $\theta \neq 1$, $\theta^2 = 1$ en $a_{ij}^{\theta} = a_{ji}$.

Opmerking 1.3.21. Aangezien we werken over het eindig veld GF(q^2), is er slechts één mogelijkheid voor θ: θ is het unieke involutorische veldautomorfisme van GF(q^2) dat $x \in$ GF(q^2) afbeeldt op $x^q \in$ GF(q^2).

Stelling 1.3.22. *Is H een Hermitische variëteit in* PG(n,q^2)*, dan is H op een coördinatentransformatie na de verzameling punten die voldoen aan een vergelijking van de vorm*

$$X_0^{q+1} + X_1^{q+1} + \ldots + X_r^{q+1}, \qquad 0 \leq r \leq n.$$

H is niet-singulier als en slechts als $r = n$.

Stelling 1.3.23. *Het aantal punten gelegen op een niet-singuliere Hermitische variëteit $H(n,q^2)$ in* PG(n,q^2) *is gelijk aan*

$$|H(n,q^2)| = \frac{q^{2n+1} + (-1)^{n+1}q^{n+1} + (-1)^n q^n - 1}{q^2 - 1}.$$

Stelling 1.3.24. *Zij H_n een niet-singuliere Hermitische variëteit in* PG(n,q^2) *met automorfisme θ en $n \geq 3$. Zij P een punt van H_n. Zij $T_P(H_n)$ het raakhypervlak door P aan H_n. Dan is $T_P(H_n) \cap H_n$ een kegel PH_{n-2} in $T_P(H_n)$ met top P en basis een niet-singuliere Hermitische variëteit H_{n-2} in een hypervlak van $T_P(H_n)$.*

Definitie 1.3.25. Een **generator** op een kwadriek of Hermitische variëteit is een deelruimte van maximale dimensie bevat in die kwadriek of Hermitische variëteit.

Notatie. Zij F een kwadriek of Hermitische variëteit. Dan duiden we met $g(F)$ de dimensie van een generator van F aan.

Stelling 1.3.26. *Er geldt:*

$$\begin{aligned} g(Q^-(2n+1,q)) &= n-1, \\ g(Q(2n,q)) &= n-1, \\ g(Q^+(2n+1,q)) &= n, \\ g(H(2n,q^2)) &= n-1, \\ g(H(2n+1,q^2)) &= n. \end{aligned}$$

Stelling 1.3.27.

- *De elliptische kwadriek* $Q^-(2n+1,q)$ *heeft* $(q^2+1)(q^3+1)\cdots(q^{n+1}+1)$ *generatoren.*
- *De parabolische kwadriek* $Q(2n,q)$ *heeft* $(q+1)(q^2+1)(q^3+1)\cdots(q^n+1)$ *generatoren.*
- *De hyperbolische kwadriek* $Q^+(2n+1,q)$ *heeft* $2(q+1)(q^2+1)\cdots(q^n+1)$ *generatoren.*
- *De Hermitische variëteit* $H(2n,q^2)$ *heeft* $(q^3+1)(q^5+1)\cdots(q^{2n+1}+1)$ *generatoren.*
- *De Hermitische variëteit* $H(2n+1,q^2)$ *heeft* $(q+1)(q^3+1)\cdots(q^{2n+1}+1)$ *generatoren.*

1.3.2 Polariteiten

Definitie 1.3.28. Een **polariteit** van PG(n,q) is een collineatie β van PG(n,q) naar de duale projectieve ruimte PG$(n,q)^D$ waarbij $\beta^2 = \mathbb{1}$. Hierbij wordt het punt $p(x_0,\ldots,x_n)$ afgebeeldt op het hypervlak met vergelijking

$$(X_0,\ldots,X_n)A\begin{pmatrix} x_0^\theta \\ \vdots \\ x_n^\theta \end{pmatrix} = 0.$$

Hierbij is A een niet-singuliere $(n+1)\times(n+1)$-matrix over GF(q) en θ een automorfisme van GF(q).

Opmerking 1.3.29. Als q geen kwadraat is, is θ noodzakelijk de identieke afbeelding $\mathbb{1}$.

We kunnen polariteiten van PG(n,q) als volgt indelen, zie bv. [5], blz. 57:

- q oneven
  - β is een **symplectische polariteit** als n oneven is, $A^T = -A$ en $\theta = \mathbb{1}$
  - β is een **orthogonale polariteit** als $A^T = A$ en $\theta = \mathbb{1}$
  - β is een **Hermitische polariteit** als $A^{T\theta} = A$, $\theta^2 = \mathbb{1}$ en $\theta \neq \mathbb{1}$
- q even
  - β is een **symplectische polariteit** als n oneven is, $A^T = A$, $\theta = \mathbb{1}$ en alle diagonaalelementen van A zijn gelijk aan 0
  - β is een **pseudopolariteit** als $A^T = A$, $\theta = \mathbb{1}$ en niet alle diagonaalelementen van A zijn gelijk aan 0
  - β is een **Hermitische polariteit** als $A^{T\theta} = A$, $\theta^2 = \mathbb{1}$ en $\theta \neq \mathbb{1}$

Definitie 1.3.30. Een punt $p \in \mathsf{PG}(n,q)$ is een **absoluut punt** van β als p incident is met het hypervlak p^β. Een hypervlak Π van $\mathsf{PG}(n,q)$ is een **absoluut hypervlak** van β als Π incident is met het punt Π^β.

Stelling 1.3.31. *Een niet-singuliere Hermitische variëteit in* $\mathsf{PG}(n,q^2)$ *is de verzameling absolute punten t.o.v. een Hermitische polariteit* β *van* $\mathsf{PG}(n,q^2)$.

Bewijs. Beschouw een Hermitische variëteit $H(n,q^2)$ in $\mathsf{PG}(n,q^2)$. Dan is $H(n,q^2)$ de verzameling punten die voldoen aan de vergelijking

$$\sum_{i,j=0}^{n} a_{ij} X_i X_j^q = 0,$$

met $a_{ij}^q = a_{ji}$. Het is dus duidelijk dat A de matrix is van een Hermitische polariteit van $\mathsf{PG}(n,q^2)$. De omgekeerde stelling geldt uiteraard ook. □

Stelling 1.3.32. *Een niet-singuliere kwadriek in* $\mathsf{PG}(n,q)$*,* q *oneven, is de verzameling absolute punten t.o.v. een orthogonale polariteit* β *in* $\mathsf{PG}(n,q)$.

Bewijs. Beschouw een kwadriek in $\mathsf{PG}(n,q)$, q oneven. Dan is deze kwadriek de verzameling punten die voldoen aan de vergelijking

$$F = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i \le j}}^{n} a_{ij} X_i X_j = 0. \tag{1.3}$$

Definieer $b_{ij} := \frac{\partial^2 F}{\partial X_i \partial X_j}$. Dan is $B = (b_{ij})$ de matrix van een orthogonale polariteit in $\mathsf{PG}(n,q)$ als q oneven is.
Het omgekeerde is ook waar. Gegeven een orthogonale polariteit met matrix $B = (b_{ij})$, definieer dan $a_{ij} = b_{ij}$ voor $i \le j$. Dan is (1.3) de vergelijking van een niet-singuliere kwadriek. □

De volgende stelling zal toelaten om een polariteit te associëren aan kwadrieken over velden van karakteristiek twee in het geval de projectieve dimensie oneven is. De geassocieerde polariteit zal dan om evidente redenen niet orthogonaal zijn.

Stelling 1.3.33. *Veronderstel dat*

$$F = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i \le j}}^{n} a_{ij} X_i X_j = 0$$

de vergelijking is van een niet-singuliere kwadriek in $\mathsf{PG}(n,q)$ *met* q *even en* n *oneven. Definieer* $b_{ij} := \frac{\partial^2 F}{\partial X_i \partial X_j}$. *Dan is* $B = (b_{ij})$ *de matrix van een symplectische polariteit in* $\mathsf{PG}(n,q)$

Bewijs. Dit volgt uit de definitie van een symplectische polariteit en het feit dat in het geval dat de projectieve dimensie oneven is, de kwadriek niet-singulier is als en slechts als $\det B \neq 0$, cf. stelling 2.2.4 in [20]. □

Opmerking 1.3.34. Samengevat hebben we dus de volgende situatie.

- Een niet-singuliere kwadriek in $\mathsf{PG}(n,q)$, q oneven, is gelijkwaardig met een orthogonale polariteit β.

- Een niet-singuliere Hermitische variëteit in $\mathsf{PG}(n, q^2)$, is gelijkwaardig met een Hermitische polariteit β.
- Een niet-singuliere kwadriek in $\mathsf{PG}(2n+1, q)$, q even, *bepaalt* een symplectische polariteit β. Het omgekeerde is echter niet waar: een symplectische polariteit van $\mathsf{PG}(2n+1, q)$, q even, bepaalt geen kwadriek in $\mathsf{PG}(2n+1, q)$.

In elk van bovenstaande gevallen noemen we β de **polariteit geassocieerd met** de Hermitische variëteit of de kwadriek.

Definitie 1.3.35. Beschouw een kwadratische vorm $\eta(X_1, \ldots, X_k)$ over $\mathsf{GF}(q)$. Een niet-nul vector $v \in V(k, q)$ is **isotroop** als $\eta(v) = 0$. De kwadratische vorm $\eta(X_1, \ldots, X_k)$ is **isotroop** als er een isotrope vector bestaat. Een deelruimte W van $V(k, q)$ is **isotroop** als W een isotrope vector bevat. Een deelruimte W van $V(k, q)$ is **totaal isotroop** als elke vector in W isotroop is.

Definitie 1.3.36. Een **symplectische polaire ruimte** $W(2n+1, q),\ n \geq 1$, bestaat uit alle punten van $\mathsf{PG}(2n+1, q)$ samen met de totaal isotrope ruimten met betrekking tot een polariteit met standaard symplectische vorm $\eta(X, Y) = X_0Y_1 - X_1Y_0 + \ldots + X_{2n}Y_{2n+1} - X_{2n+1}Y_{2n}$.

De geassocieerde polariteit β maakt het gemakkelijk om enkele meetkundige aspecten van kwadrieken en Hermitische variëteiten te beschrijven. Alvorens dit te doen, moeten we nog één geval bespreken dat niet voorkomt in het rijtje van de vorige opmerkingen: de parabolische kwadrieken in $\mathsf{PG}(n, q)$ met n en q even. Merk op dat voor een gegeven kwadriek Q in $\mathsf{PG}(n, q)$, q even, n even, de procedure beschreven in stelling 1.3.33 nog steeds gebruikt kan worden om de matrix B te bepalen. Deze matrix zal nu singulier zijn en geen symplectische polariteit meer bepalen, maar zal wel nog de matrix zijn van een alternerende vorm[1] ϕ. Deze alternerende vorm zal een 1-dimensionale vectorruimte α als radicaal hebben, hetgeen meetkundig correspondeert met de kern van Q. Meetkundig gezien betekent dit het volgende: de kern van de kwadriek Q is een projectief punt $N \notin Q$. Projectie van Q vanuit N op een hypervlak dat N niet bevat, is precies het isomorfisme tussen de kwadriek Q als polaire ruimte en de symplectische polaire ruimte $W(2n-1, q)$ bepaald door ϕ op de quotiëntruimde $V(n+1, q)/\alpha$. We noteren de polariteit geassocieerd aan $W(2n-1, q)$ als β. De raakruimte aan een deelruimte π bevat in Q kan als volgt bepaald worden: projecteer π vanuit N op de deelruimte π' van $W(2n-1, q)$, dan is de raakruimte de ruimte $\langle N, \pi'^{\beta} \rangle$.

We gebruiken in het vervolg de notatie $\pi^{\perp}$ voor de raakruimte van de deelruimte π bevat in een polaire ruimte $\mathcal{P}$. We gebruiken eveneens de notatie $\pi^{\perp}$ voor de poolruimte van de ruimte π ten opzichte van de geassocieerde polariteit. Merk op dat deze notatie dus niet gedefinieerd is indien $\mathcal{P}$ een parabolische kwadriek is in een projectieve ruimte over een eindig veld van karakteristiek twee. Het is echter wel mogelijk om ook in dit geval de uitbreiding te definiëren.

In het volgende lemma bepalen we het aantal raakvlakken door een rechte scheef aan een elliptische of hyperbolische kwadriek. Het is in feite een combinatorisch bewijs van een specifiek geval van een belangrijke eigenschap van elliptische en hyperbolische kwadrieken met betrekking tot het type van de doorsnede van deelruimen en hun polen, geformuleerd in een gevolg en een uiteindelijke stelling verderop.

Lemma 1.3.37. *Veronderstel dat L een rechte is scheef aan de hyperbolische/elliptische kwadriek $Q^{\pm}(2n+1, q)$. Dan zijn er precies $|Q^{\mp}(2n-1, q)|$ raakvlakken door L aan $Q^{\pm}(2n+1, q)$.*

Bewijs. Er zijn juist $\frac{q^{2n}-1}{q-1}$ vlakken door L in $\mathsf{PG}(2n+1, q)$. Beschouw zo'n vlak π door L. Dan is $\pi \cap Q^{\pm}(2n+1, q)$ een (mogelijks singuliere) kwadriek in het projectief vlak π. Als de doorsnede

[1] Dit is een bilineaire afbeelding ϕ van $V(n+1, q) \times V(n+1, q)$ naar $\mathsf{GF}(q)$ waarvoor geldt dat $\phi(v, v) = 0$ voor alle vectoren $v \in V(n+1, q)$.

$\pi \cap Q^{\pm}(2n+1,q)$ een rechte M zou bevatten, dan zou M een punt gemeenschappelijk hebben met L. Dit is echter onmogelijk, vermits L scheef is aan $Q^{\pm}(2n+1,q)$. Dus $\pi \cap Q^{\pm}(2n+1,q) = Q(2,q)$ of π raakt aan $Q^{\pm}(2n+1,q)$ in juist één punt. Noem x het aantal vlakken die $Q^{\pm}(2n+1,q)$ snijden in een parabolische kwadriek $Q(2,q)$ en y het aantal raakvlakken door L. Dan is

$$x + y = \frac{q^{2n}-1}{q-1},$$
$$x(q+1) + y = |Q^{\pm}(2n+1,q)|.$$

Beschouw eerst $Q^{+}(2n+1,q)$. Dan vinden we

$$\begin{aligned}\left(\frac{q^{2n}-1}{q-1}\cdot(q+1) - y(q+1)\right) + y = |Q^{+}(2n+1,q)|&\\ \Leftrightarrow -yq &= \frac{q^{2n+1}+q^{n+1}-q^{n}-1}{q-1} - \frac{q^{2n+1}+q^{2n}-q-1}{q-1}\\ \Leftrightarrow y &= \frac{q^{2n-1}-q^{n}+q^{n-1}-1}{q-1}\\ \Leftrightarrow y &= |Q^{-}(2n-1,q)|.\end{aligned}$$

Beschouw nu $Q^{-}(2n+1,q)$, dan volgt volledig analoog dat $y = |Q^{+}(2n-1,q)|$. □

Stelling 1.3.38. *Beschouw de projectieve ruimte* PG$(2n+1,q)$ *met* $n \geq 1$. *Beschouw een rechte* L *in* PG$(2n+1,q)$.

- *Als* $L \cap Q^{-}(2n+1,q) = Q^{\pm}(1,q)$, *dan is* $L^{\perp} \cap Q^{-}(2n+1,q) = Q^{\mp}(2n-1,q)$.
- *Als* $L \cap Q^{+}(2n+1,q) = Q^{\pm}(1,q)$, *dan is* $L^{\perp} \cap Q^{+}(2n+1,q) = Q^{\pm}(2n-1,q)$.

Bewijs. Het geval $L \cap Q^{\pm}(2n+1,q) = Q^{+}(1,q)$ volgt uit het feit dat voor punt $p \in Q^{\pm}(2n+1,q)$ geldt $p^{\perp} \cap Q^{\pm}(2n+1,q) = pQ^{\pm}(2n-1,q)$ en dat de twee punten in de doorsnede $L \cap Q^{\pm}(2n+1,q)$ niet collineair zijn op de kwadriek. Het andere geval is precies lemma 1.3.37. □

Stelling 1.3.39. *Beschouw een echte deelruimte* π_{2m+1} *van de projectieve ruimte* PG$(2n+1,q)$. *Dan geldt*

$$\pi_{2m+1} \cap Q^{-}(2n+1,q) = Q^{\pm}(2m+1,q) \Leftrightarrow \pi_{2m+1}^{\perp} \cap Q^{-}(2n+1) = Q^{\mp}(2(n-m)-1,q),$$
$$\pi_{2m+1} \cap Q^{+}(2n+1,q) = Q^{\pm}(2m+1,q) \Leftrightarrow \pi_{2m+1}^{\perp} \cap Q^{+}(2n+1) = Q^{\pm}(2(n-m)-1,q).$$

Bewijs. Het geval $m = 0$ is stelling 1.3.38. Veronderstel dus dat $0 < m < n$. We veronderstellen als inductiehypothese dat de stelling waar is voor $0 < m-1 < n-1$.

Beschouw de deelruimte π_{2m+1} in PG$(2n+1,q)$. Aangezien $m > 0$, bestaat er een rechte L in π_{2m+1} waarvoor $L \cap Q^{\pm}(2n+1,q) = Q^{+}(1,q)$. We kunnen schrijven $L \cap Q^{\pm}(2n+1,q) = \{p_1, p_2\}$. Dan is $L^{\perp} \cap Q^{\pm}(2n+1,q) = Q^{\pm}(2n-1,q)$. Aangezien $L \cap Q^{\pm}(2m+1,q) = \{p_1,p_2\}$, geldt eveneens $L^{\perp} \cap Q^{\pm}(2m+1,q) = Q^{\pm}(2m-1,q)$. Bovendien is $Q^{\pm}(2m-1,q) \subseteq L^{\perp} \cap \pi_{2m+1} = \pi_{2m-1}$, een $(2m-1)$-dimensionale deelruimte met $\pi_{2m+1} = \langle L, \pi_{2m-1}\rangle$. Dit kunnen we inzien als volgt. Omdat $L \cap Q^{\pm}(2m+1,q) = \{p_1,p_2\}$, geldt dat $L^{\perp} = p_1^{\perp} \cap p_2^{\perp}$. De punten p_1 en p_2 zijn niet collineair op $Q^{\pm}(2m+1,q)$, dus $p_1 \notin p_2^{\perp}$, dus $L \notin L^{\perp}$. De hypervlakken $p_1^{\perp}$ en $p_2^{\perp}$ snijden elkaar dus in een $2n-1$-dimensionale deelruimte die L niet bevat en die π_{2m+1} snijdt in een $(2m-1)$-dimensionale deelruimte π_{2m-1}. Bovendien volgt $\pi_{2m+1}^{\perp} = L^{\perp} \cap \pi_{2m-1}^{\perp}$.

Veronderstel nu dat $\pi_{2m+1} \cap Q^+(2n+1,q) = Q^+(2m+1,q)$. Dan volgt uit het bovenstaande dat $\pi_{2m-1} \cap Q^+(2n-1,q) = Q^+(2m-1,q)$. We vinden

$$\begin{aligned}\pi_{2m+1}^{\perp} \cap Q^+(2n+1,q) &= \pi_{2m-1}^{\perp} \cap L^{\perp} \cap Q^+(2n+1,q)\\ &= \pi_{2m-1}^{\perp} \cap Q^+(2n-1,q)\\ &= Q^+(2(n-m)-1,q),\end{aligned}$$

waarbij de laatste gelijkheid geldt wegens de inductiehypothese. Volkomen analoog worden de andere drie gevallen bewezen. □

1.3.3 Klein correspondentie

Definitie 1.3.40. Beschouw een rechte L in PG$(3,q)$ en punten $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ en $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ op L. Het geordend zestal $(p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{23}, p_{31}, p_{12})$ met $p_{ij} = y_i z_j - y_j z_i$ wordt een stel **Plücker coördinaten** van L genoemd.

Stelling 1.3.41. *De afbeelding α van de rechtenverzameling van* PG$(3,q)$ *naar de puntenverzameling van* PG$(5,q)$ *die een rechte van* PG$(3,q)$ *afbeeldt op het punt van* PG$(5,q)$ *met coördinaat de Plücker coördinaat van L, is een bijectie van de rechten van* PG$(3,q)$ *naar de hyperbolische kwadriek $Q^+(5,q)$.*

Definitie 1.3.42. De hyperbolische kwadriek $Q^+(5,q)$ wordt ook de **kwadriek van Klein** genoemd.

Stelling 1.3.43. *Twee rechten L en L' van* PG$(3,q)$ *hebben een punt gemeen als en slechts als de rechte $L^\alpha L'^\alpha$ bevat is in $Q^+(5,q)$.*

Definitie 1.3.44. Een **stralenwaaier** is de verzameling rechten door een punt in een vlak. Een **stralenschoof** in PG$(3,q)$ is de verzameling rechten door een punt in PG$(3,q)$. Een **stralenveld** is de verzameling rechten in een vlak.

Stelling 1.3.45. *Is $\mathcal{S}$ een stralenwaaier in* PG$(3,q)$*, dan is $\mathcal{S}^\alpha$ een rechte van $Q^+(5,q)$. Omgekeerd is elke rechte van $Q^+(5,q)$ het beeld van een stralenwaaier in* PG$(3,q)$*. Is $\mathcal{P}$ een stralenschoof of stralenveld in* PG$(3,q)$*, dan is $\mathcal{P}^\alpha$ een vlak van $Q^+(5,q)$. Omgekeerd is elk vlak van $Q^+(5,q)$ het beeld van een stralenschoof of stralenveld in* PG$(3,q)$*.*

Definitie 1.3.46. De vlakken op $Q^+(5,q)$ die met stralenschoven van PG$(3,q)$ corresponderen, noemen we **latijnse vlakken**. De vlakken op $Q^+(5,q)$ die met stralenvelden van PG$(3,q)$ corresponderen, noemen we **griekse vlakken**.

Stelling 1.3.47. *Elke twee verschillende latijnse (resp. griekse) vlakken hebben juist één punt gemeen. Een latijns en een grieks vlak hebben geen enkel punt gemeen of hebben een rechte gemeen.*

1.4 Algebra

In deze paragraaf vermelden we kort enkele essentiële definities en eigenschappen van collineatiegroepen. Bepaalde details worden achterwege gelaten.

Definitie 1.4.1. Beschouw de n-dimensionale vectorruimte $V(n,K)$ over een veld K. Een afbeelding $f : V(n,K) \to V(m,K)$ is een **lineaire afbeelding** als

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y),$$

voor alle $x,\ y \in V(n,K)$ en voor alle $\lambda,\ \mu \in K$. Een afbeelding $f : V(n,K) \to V(m,K)$ is **semi-lineair** als voor een automorfisme $\theta \in Aut(K)$ voldaan is aan

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y), \\ f(\lambda x) = \lambda^\theta f(x), \end{cases}$$

voor alle $x,\ y \in V(n,K)$ en voor alle $\lambda \in K$.

Wij zullen ons beperken tot het geval $n = m$.

Definitie 1.4.2. Een (semi-)lineaire afbeelding is **singulier** als de kern de nulvectorruimte is.

Het is welbekend dat ten opzichte van een vast gekozen basis een niet-singuliere semi-lineaire afbeelding ϕ eenduidig (en vice versa) bepaald wordt door een niet-singuliere $(n \times n)$-matrix en een veldautomorfisme $\theta \in Aut(K)$. Is θ de identieke afbeelding op K, dan is ϕ lineair.

Eens een vaste basis gekozen is, kunnen we de groep van lineaire afbeeldingen identificeren met de matrixgroep $\mathsf{GL}(n,K)$. De semi-lineaire afbeeldingen kunnen dan voorgesteld worden door een koppel (A,θ) met $A \in \mathsf{GL}(n,K)$ en $\theta \in Aut(K)$. Stellen we, ten opzichte van de gekozen basis, de vectoren voor als rijvectoren, dan kunnen we de actie van een semi-lineaire afbeelding f, bepaald door het koppel (A,θ), berekenen als volgt:

$$f((x_1,\ldots,x_n)) = ((x_1,\ldots,x_n)A)^\theta\ .$$

Beschouw nu twee semi-lineaire afbeeldingen f en g, bepaald door de respectievelijke koppels (A,θ) en (B,ϕ). Het is duidelijk dat

$$g(f(x_1,\ldots,x_n)) = \Big((x_1,\ldots,x_n)A)^\theta B\Big)^\phi = \Big((x_1,\ldots,x_n)AB^{\theta^{-1}}\Big)^{\theta\phi}.$$

De samenstelling $g \circ f$ wordt dus voorgesteld door het koppel $(AB^{\theta^{-1}}, \theta\phi)$.

Definitie 1.4.3. Veronderstel dat N en H twee groepen zijn en dat $\rho : H \to Aut(N)$ een homomorfisme is. Beschouw de verzameling $N \times H$ en definieer de bewerking $*$ op de elementen van $N \times H$ als volgt

$$(n_1,h_1) * (n_2,h_2) = (n_1 n_2^{\rho(h_1)}, h_1 h_2)$$

Dan is $(N \times H, *)$ een groep. Deze groep wordt het **semi-direct product** (ten opzichte van ρ) van de groepen N en H genoemd en wordt genoteerd als $N \ltimes_\rho H$.

Merk op dat $N \trianglelefteq N \ltimes_\rho H$, dit verklaart de notatie $\ltimes$. We kunnen ook de volgorde van de factoren omwisselen. Dan blijft N een normaaldeler van het resultaat. In dit geval wordt het semi-direct product genoteerd als $H \rtimes_\rho N$. Als het homorfisme uit de context duidelijk is, dan wordt het doorgaans in de notatie weggelaten: $N \ltimes H$. Tenslotte volgt onmiddellijk uit de definitie dat als ρ het triviaal homomorfisme is (m.a.w. als het alles afbeeldt op de identieke in $Aut(N)$, dan $N \ltimes_\rho H = N \times H$.

We noteren de groep van niet-singuliere semi-lineaire afbeeldingen van $V(n,K)$ naar zichzelf als $\Gamma\mathsf{L}(n,K)$. Uit bovenstaande definitie en de berekening van de actie van het product van twee semi-lineaire afbeeldingen na het kiezen van een vaste basis, volgt dat

$$\Gamma\mathsf{L}(n,K) \cong \mathsf{GL}(n,K) \ltimes_\rho Aut(K),$$

met $\rho : Aut(K) \to Aut(\mathsf{GL}(n, K)$: $\rho(\theta) = \theta^{-1}$, waarbij de veldautomorfismen van K elementsgewijze werken op de matrices uit $\mathsf{GL}(n, K)$. Voor een eindig veld $K = \mathsf{GF}(q)$ met $q = p^h$, is $Aut(\mathsf{GF}(q)) \cong C_h$, de cyclische groep van orde h. Hieruit volgt

$$\Gamma\mathsf{L}(n, q) \cong \mathsf{GL}(n, q) \ltimes C_h.$$

Nu kunnen we de actie van de groep $\Gamma\mathsf{L}(n + 1, K)$ op de projectieve ruimte $\mathsf{PG}(n, K)$ bespreken. Het is duidelijk dat een semi-lineaire afbeelding een collineatie definieert. Ook het omgekeerde is waar, zoals zal blijken uit de volgende stelling. De afbeeldingen

$$\phi : V(n + 1, K) \to V(n + 1, K);\ x \mapsto \lambda x,$$

met $\lambda \in K \setminus \{0\}$ vormen een groep (isomorf met de multiplicatieve groep van K) van niet-singuliere lineaire afbeeldingen die alle projectieve deelruimten in $\mathsf{PG}(n, K)$ fixeren. Het is duidelijk dat deze groep, na het kiezen van een basis, bestaat uit de scalaire matrices $\mathsf{Sc}(n + 1, K)$ en dat deze deelgroep een normaaldeler is van $\mathsf{GL}(n + 1, K)$ en $\Gamma\mathsf{L}(n + 1, K)$. We kunnen dus het quotiënt $\Gamma\mathsf{L}(n + 1, K)/\,\mathsf{Sc}(n + 1, K)$ beschouwen. Noteren we de groep van collineaties van $\mathsf{PG}(n + 1, K)$ als $\mathsf{P}\Gamma\mathsf{L}(n + 1, K)$, dan garandeert de volgende stelling dat alle collineaties bepaald worden door semi-lineaire afbeeldingen.

Stelling 1.4.4. Fundamentaalstelling van de projectieve meetkunde. *Zij K een veld en $n \geq 1$. Dan geldt*

$$\mathsf{P}\Gamma\mathsf{L}(n + 1, K) \cong \Gamma\mathsf{L}(n + 1, K)/\,\mathsf{Sc}(n + 1, K).$$

Definitie 1.4.5. Een **projectiviteit** is een collineatie die bepaald wordt door een lineaire afbeelding.

De groep van de projectiviteiten wordt genoteerd als $\mathsf{PGL}(n + 1, K)$. Er geldt dus

$$\mathsf{P}\Gamma\mathsf{L}(n + 1, K) \cong \mathsf{PGL}(n + 1, K) \ltimes Aut(K).$$

Indien tenslotte K een eindig veld $GF(q)$ is met $q = p^h$, geldt

$$\mathsf{P}\Gamma\mathsf{L}(n + 1, q) \cong \mathsf{PGL}(n, q) \ltimes C_h.$$

Hoofdstuk 2

Twee-gewichtcodes en twee-karakterverzamelingen

In dit hoofdstuk bespreken we in detail een selectie uit *The geometry of two-weigth codes*, een artikel van R. Calderbank en W. M. Kantor uit 1985, zie [2]. Daarin worden verbanden bewezen tussen codeertheorie, meetkunde en grafentheorie. Meer bepaald beschrijven ze verbanden tussen twee-gewichtcodes, twee-karakterverzamelingen, sterk reguliere grafen, rank 3 groepen en (λ_1, λ_2)-verschilverzamelingen. Verder bespreken ze alle tot dan toe gekende voorbeelden van twee-karakterverzamelingen. Deze worden a.d.h.v. de gevonden verbanden tussen de verschillende wiskundedomeinen geconstrueerd. In deze thesis zullen we voornamelijk aandacht besteden aan de meetkundige constructies, vandaar dat we het gedeelte over rank 3 groepen hier niet zullen bespreken.

Verderop in dit hoofdstuk bespreken we een bijzondere constructie van een twee-karakterverzameling in PG$(5, q^2)$, die ontdekt is door A. De Wispelaere en H. Van Maldeghem. Er komen ook twee-karakterverzamelingen in een affien vlak aan bod.

2.1 Definities

Definitie 2.1.1. Een lineaire $[n, k]$-code C is een **projectieve code** als de kolommen van de generatormatrix G verschillende punten van PG$(k-1, q)$ zijn, m.a.w. als elke twee kolommen van G lineair onafhankelijk zijn.

Met behulp van de fundamentele stelling van de codeertheorie (stelling 1.1.10) vinden we

Stelling 2.1.2. *Een lineaire $[n, k]$-code C is een projectieve code als en slechts als de minimumafstand van de duale code $C^\perp$ minstens 3 is.*

Definitie 2.1.3. Een **projectieve** (n, k, h_1, h_2)**-verzameling** O is een echte deelverzameling van n punten in PG$(k-1, q)$ waarbij elk hypervlak O snijdt in h_1 punten of in h_2 punten.

Een analoge definitie is de volgende:

Definitie 2.1.4. Een verzameling K van punten in PG(n, q) is een **twee-karakterverzameling** met **karakters** h_1 en h_2 als elk hypervlak van PG(n, q) de verzameling K snijdt in h_1 of h_2 punten. We noemen $w_1 = |K| - h_1$ en $w_2 = |K| - h_2$ de **gewichten** van de twee-karakterverzameling.

Opmerking 2.1.5. Merk op dat een projectieve (n, k, h_1, h_2)-verzameling een twee-karakterverzameling is in PG$(k-1, q)$ met karakters h_1 en h_2 en gewichten $w_1 = n - h_1$ en $w_2 = n - h_2$.

Voorbeeld 2.1.6. Zij O het complement van een t-dimensionale deelruimte Σ_t van PG$(k-1, q)$ met $1 \leq t \leq k-1$. Dan geldt voor elk hypervlak H van PG$(k-1, q)$ dat $|H \cap O| = \frac{q^{k-1}-q^{t+1}}{q-1}$ of $|H \cap O| = \frac{q^{k-1}-q^t}{q-1}$, alnaargelang het hypervlak H de deelruimte Σ_t al dan niet bevat. Er volgt dat O een projectieve $\left(\frac{q^k-q^{t+1}}{q-1}, k, \frac{q^{k-1}-q^{t+1}}{q-1}, \frac{q^{k-1}-q^t}{q-1}\right)$-verzameling is.

Voorbeeld 2.1.7. Stel $k = 3$ en q even. Beschouw een hyperovaal O in PG$(2, q)$. Dan is O een verzameling van $q+2$ punten waarvan er geen drie collineair zijn. Bovendien geldt voor elke rechte L van PG$(2, q)$ dat $|L \cap O| = 0$ of 2. Er volgt dat O een projectieve $(q+2, 3, 0, 2)$-verzameling is.

Voorbeeld 2.1.8. Stel $k = 2l$. Beschouw een familie Σ van $(l-1)$-ruimten waarbij elke twee $(l-1)$-ruimten de projectieve ruimte PG$(k-1, q)$ opspannen. Dan geldt $2 \leq |\Sigma| \leq \frac{q^{2l}-1}{q^l-1} = q^l + 1$. Zij O de verzameling punten die bevat zijn in een element van Σ. Als H een hypervlak is dat een element van Σ bevat, dan geldt

$$|H \cap O| = \frac{q^l - 1}{q-1} + (|\Sigma| - 1)\left(\frac{q^{l-1}-1}{q-1}\right).$$

Als H een hypervlak is dat geen element van Σ bevat, geldt

$$|H \cap O| = |\Sigma|\left(\frac{q^{l-1}-1}{q-1}\right).$$

Er volgt dat O een projectieve $\left(|O|, 2l, \frac{q^l-1}{q-1} + (|\Sigma|-1)\left(\frac{q^{l-1}-1}{q-1}\right), |\Sigma|\left(\frac{q^{l-1}-1}{q-1}\right)\right)$-verzameling is.

Stelling 2.1.9. *Het complement van een projectieve (n, k, h_1, h_2)-verzameling O in* PG$(k-1, q)$ *is een projectieve $\left(\left(\frac{q^k-1}{q-1}\right) - n, k, \left(\frac{q^{k-1}-1}{q-1}\right) - h_1, \left(\frac{q^{k-1}-1}{q-1}\right) - h_2\right)$-verzameling.*

Notatie. Zij K een willekeurig veld. Dan noteren we $K^* = K \setminus \{0\}$.

Definitie 2.1.10. Zij Ω een echte verzameling niet-nul vectoren in een vectorruimte V over GF(q). Dan is Ω een (λ_1, λ_2)-**verschilverzameling** over GF(q) als GF$(q)^*\Omega = \Omega$ en als voor $v \in V \setminus \{0\}$ geldt

$$|\{(x, y) \mid x, y \in \Omega \ \wedge \ x - y = v\}| = \begin{cases} \lambda_1 & \text{als } v \in \Omega, \\ \lambda_2 & \text{als } v \notin \Omega. \end{cases}$$

Opmerking 2.1.11. Met GF$(q)^*\Omega = \Omega$ wordt bedoeld dat Ω invariant is onder vermenigvuldiging met niet-nul elementen uit GF(q). Er geldt dus $\forall a \in$ GF$(q)^*$ dat $\{av \mid v \in \Omega\} = \Omega$.

Definitie 2.1.12. Zij $V =$ GF$(q)^k$. Beschouw een deelverzameling $\Omega \subseteq V$ en veronderstel dat $\Omega = -\Omega$ en $0 \notin \Omega$. We definiëren de graaf $\mathbf{G(\Omega)}$ als de graaf met toppenverzameling V en waarbij twee toppen adjacent zijn als hun verschil in Ω bevat is.

Opmerking 2.1.13. Aangezien $0 \notin \Omega$ zullen er geen lussen in de graaf $G(\Omega)$ voorkomen. De graaf is niet gericht, vermits $-\Omega = \Omega$.

2.2 Fundamentele stellingen

In deze sectie bespreken we de equivalentie van twee-gewichtcodes, projectieve (n, k, h_1, h_2)-verzamelingen, (λ_1, λ_2)-verschilverzamelingen en bepaalde sterk reguliere grafen.

Notatie. Beschouw een lineaire code C met generatormatrix G. Een vector $x \in V(k, q)$ bepaalt een uniek codewoord $c_x = xG$ uit C en omgekeerd. Het gewicht van c_x wordt genoteerd als $w(c_x)$.

Stelling 2.2.1. *Zij C een lineaire projectieve twee-gewicht $[n, k]$-code met gewichten w_1 en w_2. Zij G de generatormatrix van C en stel dat de kolommen van G gegeven worden door $y_1, \dots, y_n$. Dan is $\{\langle y_i \rangle \mid i = 1, \dots, n\}$ een projectieve $(n, k, n - w_1, n - w_2)$-verzameling die $\mathsf{PG}(k-1, q)$ opspant. Omgekeerd, als $\{\langle y_i \rangle \mid i = 1, \dots, n\}$ een projectieve $(n, k, n - w_1, n - w_2)$-verzameling is die $\mathsf{PG}(k-1, q)$ opspant, dan is de lineaire code C met generatormatrix de matrix met als kolommen de vectoren $y_1, \dots, y_n$ een projectieve twee-gewicht $[n, k]$-code met gewichten w_1 en w_2.*

Bewijs. Zij x een niet-nul vector in $\mathsf{GF}(q)^k$. Als $x^\perp = \{y \in \mathsf{GF}(q)^k \mid x \cdot y = 0\}$, dan wordt het gewicht van het codewoord xG gegeven door $n - |x^\perp \cap \{y_1, \dots, y_n\}|$. □

Definitie 2.2.2. Zij $(V, +)$ een abelse groep. Een **karakter** van V is een homomorfisme van $(V, +)$ naar $(\mathbb{C}^*, \cdot)$. De afbeelding die elk element van V afbeeldt op $1 \in \mathbb{C}$ wordt het **triviaal karakter** genoemd.

Opmerking 2.2.3. Voor $q = p^h$ is $\chi(x) = e^{\frac{Tr(x)2\pi i}{p}}$ een karakter, waarbij $Tr : \mathsf{GF}(q) \to \mathsf{GF}(p)$ de spoorfunctie is. Er kan aangetoond worden dat elk karakter op deze manier gedefinieerd moet zijn.

Lemma 2.2.4. *Er geldt $\sum\limits_{x \in \mathsf{GF}(q)} \chi(x) = 0$ en $\sum\limits_{x \in \mathsf{GF}(q)^*} \chi(x) = -1$.*

Bewijs. De som van de complexe p-de eenheidswortels uit 1 is gelijk aan 0. Aangezien $\chi(0) = 1$, is $\sum_{x \in \mathsf{GF}(q)^*} \chi(x) = -1$. □

Beschouw een niet-triviaal karakter $\chi : (\mathsf{GF}(q), +) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$. De afbeelding $\chi_v(u) = \chi(v \cdot u)$ is voor elke $v \in \mathsf{GF}(q)^k$ een karakter. Stel $N = q^k$. We ordenen de vectoren $v_1, \dots, v_N$ van $V(k, q)$ en gebruiken deze ordening om de adjacentiematrix A van $G(\Omega)$ op te stellen.

Lemma 2.2.5. *Zij $O = \{\langle y_i \rangle \mid i = 1, \dots, n\}$ een echte deelverzameling punten van $\mathsf{PG}(k-1, q)$. Stel $\Omega = \{v \in V(k, q) = V \mid \langle v \rangle \in O\}$. Beschouw de graaf $G(\Omega)$ met adjacentiematrix A. Zij C de lineaire code met generatormatrix de matrix met als kolommen de vectoren $y_1, \dots, y_n$. Kies een willekeurige vector $v \in V(k, q)$. Dan is e_v met $(e_v)_i := \chi_v(v_i) = \chi(v \cdot v_i)$ voor $i = 1, \dots, N$ een eigenvector van A met eigenwaarde $(q-1)(n - w(c_v)) - w(c_v)$. De vectoren e_v met $v \in V(k, q)$ vormen een basis voor $\mathbb{C}^n$.*

Bewijs. Er geldt

$$
\begin{aligned}
(e_v A)_j = \sum_i \chi_v(v_i) a_{ij} &= \sum_{v_i - v_j \in \Omega} \chi_v(v_i) = \sum_{u \in \Omega} \chi_v(u + v_j) \\
&= \chi_v(v_j) \left(\sum_{u \in \Omega} \chi_v(u) \right) = (e_v)_j \left(\sum_{u \in \Omega} \chi_v(u) \right).
\end{aligned}
$$

Elke niet-nul positie $(c_v)_i$ draagt bij tot het gewicht $w(c_v)$ van het codewoord c_v. Aangezien $(c_v)_i = 0$ als en slechts als $v \cdot y_i = 0$, vinden we $w(c_v) = n - |v^\perp \cap \{y_1, \dots, y_n\}|$. In de verzameling Ω komt elke vector op een factor uit $\mathsf{GF}(q)^*$ na juist $q-1$ keer voor. Hieruit volgt dat $|v^\perp \cap \Omega| = (q-1)(n - w(c_v))$.

Gebruikmakend van $\mathsf{GF}(q)^*\Omega = \Omega$ en lemma 2.2.4 vinden we

$$\begin{aligned}\sum_{u\in\Omega}\chi_v(u) &= \sum_{\substack{u\in\Omega\\ u\cdot v=0}}\chi_v(u) + \sum_{\substack{u\in\Omega\\ u\cdot v=1}}\left(\sum_{\alpha\in\mathsf{GF}(q)^*}\chi_v(\alpha u)\right)\\ &= |v^\perp\cap\Omega| + \sum_{\substack{u\in\Omega\\ u\cdot v=1}}(-1)\\ &= (q-1)(n-w(c_v)) - w(c_v).\end{aligned}$$

Aangezien

$$e_v\cdot e_w = \sum_{i=1}^{N}\chi(v\cdot v_i)\chi(w\cdot v_i) = \sum_{i=1}^{N}\chi((v+w)\cdot v_i) = \begin{cases} N & \text{als } v+w=0,\\ 0 & \text{anders,}\end{cases}$$

vormen de vectoren e_v een basis voor $\mathbb{C}^n$. □

Stelling 2.2.6. *Zij $O = \{\langle y_i\rangle \mid i=1,\ldots,n\}$ een echte deelverzameling punten van* PG$(k-1,q)$*. Stel $\Omega = \{v\in V(k,q)=V \mid \langle v\rangle\in O\}$. Als O de ruimte* PG$(k-1,q)$ *opspant, zijn de volgende uitspraken equivalent:*

(1) Ω is een (λ_1,λ_2)-verschilverzameling voor zekere λ_1 en λ_2,

(2) $G(\Omega)$ is een sterk reguliere graaf,

(3) O is een projectieve $(n,k,n-w_1,n-w_2)$-verzameling voor zekere w_1 en w_2.

Bewijs. Aangezien O een eindige verzameling punten is in PG$(k-1,q)$, kunnen we schrijven dat $O=\{p_1,\ldots,p_n\}$. Elk punt p_i heeft een zekere vector y_i als coördinaatvector. We kunnen y_i op een niet-nul factor na kiezen. Hieruit volgt dat $|\Omega| = (q-1)|O|$ en dat $\mathsf{GF}(q)^*\Omega=\Omega$. Bijgevolg is $G(\Omega)$ goed gedefinieerd.

$(1)\Rightarrow(2)$
Beschouw een element $x\in V$. De elementen $\{x-y\mid y\in\Omega\}$ zijn adjacent met x, aangezien $x-(x-y)=y\in\Omega$. Bijgevolg is de valentie $k=|\Omega|$. Beschouw nu twee elementen x en y in V. Stel $v:=x-y\in V$. Als $v\in\Omega$, zijn er λ_1 koppels $(x_i,y_i)\in\Omega\times\Omega$ waarvoor $x_i-y_i=v$. Als $v\notin\Omega$, zijn er zo λ_2. Uit $x_i-y_i=v=x-y$ volgt dat $x-x_i=y-y_i:=z_i$. Dan geldt $x-z_i=x_i\in\Omega$ en $y-z_i=y_i\in\Omega$. Bijgevolg is $z_i\sim x$ en $z_i\sim y$. We vinden dat $G(\Omega)$ een sterk reguliere graaf is met parameters $(q^k,|\Omega|,\lambda_1,\lambda_2)$.

$(2)\Rightarrow(1)$
We kunnen de vorige redenering omkeren, waardoor ook deze implicatie geldig is.

$(2)\Rightarrow(3)$
Als $G(\Omega)$ sterk regulier is, volgt uit stelling 1.2.6 dat A precies 3 eigenwaarden heeft. Uit lemma 2.2.5 volgt dat de code C geassocieerd aan $G(\Omega)$ juist twee gewichten w_1 en w_2 heeft. Uit stelling 2.2.1 volgt nu dat K een projectieve $(n,k,n-w_1,n-w_2)$-verzameling is.

$(3)\Rightarrow(2)$
Als (3) geldt, volgt via stelling 2.2.1 uit lemma 2.2.5 dat A drie verschillende eigenwaarden heeft. Er volgt ook dat de multipliciteit van de valentie $n(q-1)$ als eigenwaarde van de adjacentiematrix A van $G(\Omega)$ gelijk is aan 1. Verder voldoet A aan een vergelijking van de vorm $A^2=aI+bA+cJ$ voor zekere scalairen a,b en c. Hieruit volgt dat $G(\Omega)$ sterk regulier is. □

Stelling 2.2.7. *Stel $O = \{\langle y_i \rangle \mid i = 1, \ldots, n\}$ zoals in stelling 2.2.6. Zij C de lineaire code met generatormatrix de matrix met als kolommen de vectoren $y_1, \ldots, y_n$. Als de eigenschappen uit stelling 2.2.6 gelden, dan worden de eigenwaarden van A gegeven door $n(q-1)$, $n(q-1) - qw_1$ en $n(q-1) - qw_2$ met respectievelijke multipliciteiten $1, A_{w_1}$ en A_{w_2}, waarbij A_{w_i} het aantal codewoorden van C met gewicht w_i voorstelt. Als $w_2 > w_1$ geldt bovendien*

$$A_{w_1} = \frac{w_2(q^k - 1) - nq^{k-1}(q-1)}{w_2 - w_1}.$$

Bewijs. Het eerste deel van het gestelde volgt rechtstreeks uit lemma 2.2.5. De gegeven uitdrukking voor A_{w_1} wordt later bewezen. □

Stelling 2.2.8. *Als de eigenschappen uit stelling 2.2.6 gelden, worden de parameters (N, K, λ, μ) van $G(\Omega)$ gegeven door*

$$\begin{aligned}
N &= q^k, \\
K &= n(q-1), \\
\lambda &= K^2 + 3K - q(w_1 + w_2) - Kq(w_1 + w_2) + q^2 w_1 w_2, \\
\mu &= \frac{q^2 w_1 w_2}{q^k} = K^2 + K - Kq(w_1 + w_2) + q^2 w_1 w_2.
\end{aligned}$$

Bewijs. We weten dat $N = |V(k,q)| = q^k$. Verder weten we dat $K = |\Omega| = (q-1)|O| = n(q-1)$. Net zoals in het bewijs van stelling 1.2.8 volgt dat er een constante $c \in \mathbb{R}$ bestaat waarvoor

$$(A - (n(q-1) - qw_1)I)\,(A - (n(q-1) - qw_2)I) = cJ.$$

Door gebruik te maken van $K = n(q-1)$, kunnen we dit herschrijven als

$$(A - (K - qw_1)I)\,(A - (K - qw_2)I) = cJ. \tag{2.1}$$

Verder weten we dat $J \cdot J = NJ$ en $A \cdot J = KJ = J \cdot A$. We vermenigvuldigen beide leden van (2.1) links met J en bekomen

$$\begin{aligned}
cJ^2 &= (KJ - (K - qw_1)J)\,(A - (K - qw_2)I) \\
\Leftrightarrow cNJ &= (K - (K - qw_1))\,J\,(A - (K - qw_2)I) \\
\Leftrightarrow cNJ &= (K - (K - qw_1))\,I\,(KJ - (K - qw_2)J) \\
\Leftrightarrow cNJ &= qw_1 I\,(K - (K - qw_2))\,J \\
\Leftrightarrow cNJ &= qw_1 I \cdot qw_2 J \\
\Leftrightarrow cN &= qw_1 qw_2 \\
\Leftrightarrow c &= \frac{q^2 w_1 w_2}{N}.
\end{aligned}$$

Vergelijken we uitdrukking (2.1) met (1.1), dan vinden we dat $\mu = c = \frac{q^2 w_1 w_2}{N}$. Als we de coëfficiënten van I vergelijken, bekomen we

$$\mu - K = (K - qw_1)(K - qw_2) = K^2 - Kq(w_1 + w_2) + q^2 w_1 w_2,$$

waaruit volgt dat

$$\mu = K^2 + K - Kq(w_1 + w_2) + q^2 w_1 w_2.$$

Als we de coëfficiënten van A vergelijken, vinden we

$$\mu - \lambda = -(K - qw_1) - (K - qw_2) = -2K + q(w_1 + w_2), \tag{2.2}$$

dus

$$\lambda = K^2 + 3K - q(w_1 + w_2) - Kq(w_1 + w_2) + q^2 w_1 w_2.$$

□

Gevolg 2.2.9. Als $G(\Omega)$ sterk regulier is met parameters (N, K, λ, μ) die gegeven worden door de uitdrukkingen in stelling 2.2.8, gelden

$$K^2 + K - Kq(w_1 + w_2) + (q^k - 1)\frac{w_1 w_2}{q^{k-2}} = 0 \tag{2.3}$$

en

$$q(w_1 - w_2) = \sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(K - \mu)}. \tag{2.4}$$

Bewijs. Uitdrukking (2.3) volgt rechtstreeks door beide formules voor μ aan elkaar gelijk te stellen en om te vormen. Uit vergelijking (2.2) en stelling 1.2.6 volgt

$$\begin{aligned}
n(q-1) - qw_1 &= \frac{2n(q-1) - q(w_1 + w_2) + \sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(K - \mu)}}{2} \\
&\Leftrightarrow 2n(q-1) - 2qw_1 - 2n(q-1) + q(w_1 + w_2) = \sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(K - \mu)} \\
&\Leftrightarrow q(w_2 - w_1) = \sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(K - \mu)}.
\end{aligned}$$

□

Stelling 2.2.10. *Zij O een verzameling zoals in stelling 2.2.6. Dan gelden eigenschappen (1), (2) en (3) uit stelling 2.2.6 als en slechts als er constanten E en E' bestaan met*

- *elk punt $\langle v \rangle \in \mathsf{PG}(k-1, q) \setminus O$ is collineair met E paar punten van O,*
- *elk punt $\langle v \rangle \in O$ is collineair met E' paar punten van $O \setminus \{\langle v \rangle\}$.*

Als deze voorwaarden voldaan zijn, geldt bovendien $\mu = 2E$ en $\lambda = 2E' + q - 2$.

Bewijs. Stel dat er constanten E en E' bestaan waarvoor voldaan is aan de gegeven eigenschappen. Beschouw een element $v \in V(k, q)$. Er geldt:

$$\begin{aligned}
v \notin \Omega \Leftrightarrow\ & \langle v \rangle \notin O \\
&\Leftrightarrow \langle v \rangle \text{ is collineair met } E \text{ paar punten uit O} \\
&\Leftrightarrow v = sy + tz \text{ voor } E \text{ koppels } (x, y) \in \Omega \times \Omega \text{ en zekere constanten } s, y \in \mathsf{GF}(q) \\
&\Leftrightarrow v = sy - t(-z) = tz - s(-y) \text{ voor } E \text{ koppels } (x, y) \in \Omega \times \Omega \\
&\qquad\qquad \text{en zekere constanten } s, y \in \mathsf{GF}(q) \\
&\Leftrightarrow v \text{ is het verschil van } 2E \text{ paar vectoren uit } \Omega
\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
v \in \Omega \Leftrightarrow\ & \langle v \rangle \in O \\
&\Leftrightarrow \langle v \rangle \text{ is collineair met } E' \text{ paar punten uit } O \setminus \{\langle v \rangle\} \\
&\Leftrightarrow v \text{ is het verschil van } 2E' \text{ paar vectoren uit } \Omega \setminus \{iv \mid i \in \mathsf{GF}(q) \setminus \{0, 1\}\}.
\end{aligned}$$

Als $v \in \Omega$ is $\langle v \rangle$ ook collineair met $\langle iv \rangle$ voor $i \in \mathsf{GF}(q) \setminus \{0, 1\}$. We vinden dus $\lambda = 2E' + q - 2$.

□

2.3 Duale projectieve (n, k, h_1, h_2)-verzamelingen

In deze sectie bekijken we het duale van een projectieve (n, k, h_1, h_2)-verzameling.

Notatie. We zullen de volgende notatie gebruiken voor het aantal punten in de $(d-1)$-dimensionale projectieve ruimte PG$(d-1, q)$: $\tau_d = \frac{q^d-1}{q-1}$. Dan geldt $\tau_d = q\tau_{d-1} + 1$.

Stelling 2.3.1. *Zij O een projectieve $(n, k, n-w_1, n-w_2)$-verzameling in* PG$(k-1, q)$. *Dan is het complement O' van O in* PG$(k-1, q)$ *een projectieve $(n', k, n'-w'_1, n'-w'_2)$-verzameling waarbij $n' = \tau_k - n$ en $w_i + w'_i = q^{k-1}$ voor $i \in \{1, 2\}$.*

Bewijs. Voor $i \in \{1, 2\}$ controleren we

$$\begin{aligned} n' - w'_i &= \tau_k - n - (q^{k-1} - w_i) \\ &= \frac{q^k - 1}{q-1} - n - \frac{q^{k-1}(q-1)}{q-1} + w_i \\ &= \frac{q^{k-1} - 1}{q-1} - (n - w_i). \end{aligned}$$

Wegens stelling 2.1.9 volgt nu het gestelde. □

Met H_i $(i = 1, 2)$ noteren we de verzameling bestaande uit de hypervlakken H in PG$(k-1, q)$ waarvoor $|H \cap O| = n - w_i$. Op dezelfde manier als voorheen definiëren de elementen in O een tweegewichtcode C. Dan bepaalt de verzameling H_i de codewoorden van gewicht w_i in C. Bovendien geldt

$$(q-1)|H_i| = A_{w_i}. \tag{2.5}$$

Stelling 2.3.2. *De verzameling H_i is een projectieve (B_i, k, a_i, a'_i)-verzameling in de duale projectieve ruimte* PG$(k-1, q)^D$, *waarbij*

$$(w'_j - w'_i)a_i = w'_j\tau_{k-1} - n'q^{k-2} \tag{2.6}$$

en

$$(w_j - w_i)a'_i = w_j\tau_{k-1} - nq^{k-2} \tag{2.7}$$

voor $i \in \{1, 2\}$ *en* $j = \begin{cases} 2 & \textit{als } i = 1, \\ 1 & \textit{als } i = 2. \end{cases}$

Bewijs. Beschouw een vast punt $x \in O'$ en noem a'_i het aantal hypervlakken in H_i die x bevatten. Dan is

$$a'_1 + a'_2 = \tau_{k-1}. \tag{2.8}$$

Tel nu het aantal koppels (y, H) met $y \in O$ en H een hypervlak dat zowel x als y bevat. Dan bekomen we

$$a'_1(n - w_1) + a'_2(n - w_2) = n\tau_{k-2}. \tag{2.9}$$

Bijgevolg is a'_i onafhankelijk van de keuze van x. Met behulp van vergelijkingen (2.8) en (2.9) vinden we

$$\begin{aligned} & a'_1(n - w_1) + (\tau_{k-1} - a'_1)(n - w_2) = n\tau_{k-2} \\ \Leftrightarrow\ & a'_1(n - w_1 - n + w_2) = n\tau_{k-2} - n\tau_{k-1} + w_2\tau_{k-1} \\ \Leftrightarrow\ & a'_1(w_2 - w_1) = w_2\tau_{k-1} - nq^{k-2}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

aangezien $\tau_{k-2}-\tau_{k-1}=\frac{q^{k-2}-1-q^{k-1}+1}{q-1}=-q^{k-2}$. We hebben uitdrukking (2.7) bewezen voor $j=2$ en $i=1$. Voor $j=1$ en $i=2$ gaat dit op volledig analoge manier.

Beschouw nu een punt $y \in O$ en definieer a_i als het aantal hypervlakken van H_i die y bevatten. Door gebruik te maken van de symmetrie vinden we dat a_i onafhankelijk is van het gekozen punt y en dat uitdrukking (2.6) geldt. □

Gevolg 2.3.3. Als $q=p^h$ met p priem en $w_2>w_1$, dan bestaan er gehele getallen j en t zodat $w_1=p^jt$ en $w_2=p^j(t+1)$.

Bewijs. Als we uitdrukkingen (2.6) en (2.7) voor $i=1$ optellen, vinden we m.b.v. stelling 2.3.1

$$\begin{aligned}
&(w_2'-w_1')a_1+(w_2-w_1)a_1'=(w_2'+w_2)\tau_{k-1}-(n+n')q^{k-2}\\
&\Leftrightarrow \left(q^{k-1}-w_2-q^{k-1}+w_1\right)a_1+(w_2-w_1)a_1'=q^{k-1}\tau_{k-1}-\tau_k q^{k-2}\\
&\Leftrightarrow (w_2-w_1)(a_1'-a_1)=q^{k-1}\left(\frac{q^{k-1}-1}{q-1}\right)-\left(\frac{q^k-1}{q-1}\right)q^{k-2}\\
&\Leftrightarrow (w_2-w_1)(a_1'-a_1)=\frac{q^{2k-2}-q^{k-1}-q^{2k-2}+q^{k-2}}{q-1}\\
&\Leftrightarrow (w_2-w_1)(a_1'-a_1)=\frac{q^{k-2}(1-q)}{q-1}\\
&\Leftrightarrow (w_2-w_1)(a_1'-a_1)=-q^{k-2}\\
&\Leftrightarrow (w_2-w_1)(a_1-a_1')=q^{k-2}. \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

Aangezien $q=p^h$ volgt hieruit dat er een natuurlijk getal j moet bestaan waarvoor $w_2-w_1=p^j$. Uit vergelijking (2.10) volgt dat $w_2-w_1 \mid w_2\tau_{k-1}$. Aangezien τ_{k-1} geen factoren p bevat, moet $p^j=w_2-w_1 \mid w_2$. Er bestaat dus een natuurlijk getal s waarvoor $p^j \cdot s=w_2$. Hieruit volgt $w_1=w_2-p^j=p^j(s-1)$. Stel nu $t=s-1$ en het gestelde volgt. □

Nu kunnen we het tweede deel van stelling 2.2.7 bewijzen:

Stelling 2.3.4. *Er geldt*

$$A_{w_1}=(q-1)|H_1|=\frac{w_2(q^k-1)-nq^{k-1}(q-1)}{w_2-w_1}.$$

Bewijs. De eerste gelijkheid volgt onmiddellijk: dit is vergelijking (2.5).
Tellen we het aantal koppels (H,x) met $x \in O' \cap H$ en $H \in H_1$, dan vinden we

$$|H_1|(\tau_{k-1}-(n-w_1))=n'a_1'. \qquad (2.12)$$

Tellen we het vervolgens het aantal koppels (H,y) met $y \in O \cap H$ en $H \in H_1$, dan vinden we

$$|H_1|(n-w_1)=na_1. \qquad (2.13)$$

Als we vergelijkingen (2.12) en (2.13) bij elkaar optellen en vervolgens stelling 2.3.1 en uitdrukkingen (2.11) en (2.10) gebruiken, bekomen we

$$\begin{aligned}
\tau_{k-1}|H_1|&=na_1+n'a_1'\\
&=na_1+(\tau_k-n)a_1'\\
&=n(a_1-a_1')+\tau_k a_1'
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= n\left(\frac{q^{k-2}}{w_2-w_1}\right)+\tau_k\left(\frac{w_2\tau_{k-1}-nq^{k-2}}{w_2-w_1}\right)\\
&= \frac{1}{w_2-w_1}\Big(w_2\tau_k\tau_{k-1}-nq^{k-2}(\tau_k-1)\Big)\\
&= \frac{1}{w_2-w_1}\Big(w_2\tau_k\tau_{k-1}-nq^{k-2}(q\tau_{k-1})\Big)\\
\Leftrightarrow |H_1| &= \frac{1}{w_2-w_1}\Big(w_2\tau_k-nq^{k-1}\Big)\\
\Leftrightarrow (q-1)|H_1| &= \frac{1}{w_2-w_1}\Big(w_2(q^k-1)-nq^{k-1}(q-1)\Big).
\end{aligned}
$$

□

Definitie 2.3.5. Als er een correlatie θ bestaat van PG$(k-1,q)$ waarvoor $\theta(O)=H_1$ of $\theta(O)=H_2$, dan noemen we de verzameling O en de twee-gewichtcode gedefinieerd door O **projectief zelfduaal**.

Stelling 2.3.6. *Als de verzameling O zelfduaal is, geldt $n=\frac{A_{w_1}}{q-1}$ of $n=\frac{A_{w_2}}{q-1}$.*

Bewijs. Dit volgt onmiddelijk uit stelling 2.3.4. □

Stelling 2.3.7. *Zij G de graaf met toppenverzameling de codewoorden van C, waarbij twee toppen c en d adjacent zijn als en slechts als $w(c-d)=w_1$. Dan is $G\cong G(\Omega')$, met*

$$\Omega'=\{x\in V(k,q)\mid x^\perp\in H_1\}.$$

In het bijzonder is G sterk regulier.

Bewijs. Het isomorfisme volgt meteen uit de definities van G en Ω'. De sterke regulariteit volgt wegens stellingen 2.3.2 en 2.2.6. □

2.4 Twee-gewichtcodes over deelvelden

In deze sectie construeren we, vertrekkend vanuit een gegeven twee-gewichtcode, nieuwe twee-gewichtcodes door het onderliggende veld te veranderen.

Stelling 2.4.1. *Beschouw een projectieve twee-gewicht $[n,k]$-code C over GF(q) met gewichten w_1 en w_2. Beschouw een deelveld GF(q_0) van GF(q). Stel $q=q_0^r$. Dan bepaalt C een projectieve twee-gewicht $[n',kr]$-code over GF(q_0) met gewichten w_1' en w_2', waarbij*

$$n'=\frac{(q-1)n}{q_0-1},\qquad w_1'=\frac{qw_1}{q_0}\qquad \textit{en}\qquad w_2'=\frac{qw_2}{q_0}.$$

Bewijs. Stel $V=V(k,q)$. Aangezien C een projectieve code is, bestaat er een verzameling $O=\{\langle y_i\rangle\mid i=1,\dots,n\}$ van n verschillende punten van PG$(k-1,q)$ zodat de kolommen van de generatormatrix van C gegeven worden door de vectoren $y_1,\dots,y_n$. Definieer de verzameling Ω als $\Omega=\{v\in V\mid\langle v\rangle\in O\}$. Dan is $|\Omega|=(q-1)n$. We kunnen schrijven

$$
\begin{aligned}
v\in \mathrm{GF}(q)^k \;&\Leftrightarrow\; v=(v_1,\dots,v_k) \text{ met } v_i\in\mathrm{GF}(q) \text{ voor } i=1,\dots,k\\
&\Leftrightarrow\; v=(a_1^1,\dots a_1^r,\dots,a_k^1,\dots,a_k^r) \text{ met } a_i^j\in\mathrm{GF}(q_0) \text{ voor } i=1,\dots,k \text{ en } j=1,\dots,r.
\end{aligned}
$$

Dit definieert een bijectie $\eta : V(k,q) \to V(kr, q_0)$. We definiëren nu $\Omega' \subseteq V(kr, q_0)$ als volgt:

$$\Omega' := \{a \in V(kr, q_0) \mid\mid \eta^{-1}(a) \in \Omega\}.$$

Uiteraard geldt $|\Omega| = |\Omega'|$. Verder volgt dat Ω' een verzameling O' van $n' = \frac{|\Omega|}{q_0-1} = \frac{(q-1)n}{q_0-1}$ punten definieert in PG$(kr-1, q_0)$.

De graaf $G(\Omega)$ is de graaf met als toppenverzameling de vectoren van V, waarbij twee toppen adjacent zijn als en slechts als hun verschil bevat is in Ω. Merk op dat deze definitie onafhankelijk is van GF(q) en GF(q_0). Uit stelling 2.2.6 volgt nu dat de volgende uitspraken equivalent zijn:

- O is een projectieve verzameling in PG$(k-1, q)$,
- $G(\Omega)$ is sterk regulier,
- O' is een projectieve verzameling in PG$(kr-1, q_0)$.

Uit stelling 2.2.1 volgt dat C', de code bepaald door O', een projectieve twee-gewicht $[n', kr]$-code is over GF(q_0). De eigenwaarden verschillend van $|\Omega|$ van $G(\Omega)$ worden enerzijds gegeven door $|\Omega| - qw_i$ voor $i = 1, 2$ en anderzijds door $|\Omega| - q_0 w'_i$ voor $i = 1, 2$. Hieruit volgt dat $w'_i = \frac{qw_i}{q_0}$ voor $i = 1, 2$. □

Er geldt ook een omgekeerde stelling:

Stelling 2.4.2. *Zij $V = V(k,q)$. Stel* GF$(q) \subseteq$ GF(q^*) *en zij ψ een lineaire transformatie van V van de orde q^*-1 zodat $\{0\} \cup \langle\psi\rangle$ een veld van lineaire transformaties is dat isomorf is met* GF(q^*)*. Dit maakt van V een s-dimensionale* GF(q^*)*-ruimte. Beschouw een projectieve $(n, k, n-w_1, n-w_2)$-verzameling O in* PG$(k-1,q)$ *en veronderstel dat O bewaard blijft onder ψ. Dan bepaalt O een projectieve $(n^*, s, n^*-w_1^*, n^*-w_2^*)$-verzameling O^* in* PG$(s-1, q^*)$*, waarbij*

$$n^* = \frac{(q-1)n}{q^*-1}, \qquad w_1^* = \frac{qw_1}{q^*} \qquad \textit{en} \qquad w_2^* = \frac{qw_2}{q^*}.$$

Bewijs. Als $\Omega = \{v \in V \mid \langle v\rangle \in O\}$, dan is $\psi(\Omega) = \Omega$. Hieruit volgt dat Ω een verzameling O^* bepaalt van $n^* = \frac{(q-1)n}{q^*-1}$ punten van PG$(s-1, q^*)$. Wegens stelling 2.2.6 zijn de volgende uitspraken equivalent:

- O is een projectieve verzameling in PG$(k-1, q)$,
- $G(\Omega)$ is sterk regulier,
- O^* is een projectieve verzameling in PG$(s-1, q^*)$.

De uitdrukkingen voor w_1^* en w_2^* volgen nu volledig analoog als in het bewijs van stelling 2.4.1.

□

2.5 Enkele bijzondere projectieve (n, k, h_1, h_2)-verzamelingen

We vatten deze paragraaf aan met enkele technische lemma's die we verderop nodig zullen hebben.

Lemma 2.5.1. *Als $t + 1 > q \geq 2$, geldt $t + 1 - q \geq \frac{t+1}{q+1}$.*

Bewijs. Er geldt

$$\begin{aligned} & t + 1 - q \geq \frac{t+1}{q+1} \\ & \Leftrightarrow (t + 1 - q)(q + 1) \geq t + 1 \\ & \Leftrightarrow tq + t + q + 1 - q^2 - q \geq t + 1 \\ & \Leftrightarrow q(t - q) \geq 0. \end{aligned}$$

Deze uitdrukking is waar, aangezien uit $t + 1 > q$ volgt dat $t \geq q$. □

Lemma 2.5.2. *Als $t + 1 > q \geq 2$, geldt $t + 2 - q \geq \frac{t}{q-1}$*

Bewijs. Kies $q \geq 2$ vast. De functie

$$f(t) = t + 2 - q - \frac{t}{q-1} = \left(\frac{q-2}{q-1}\right) t + 2 - q$$

is stijgend. We zoeken het nulpunt:

$$\begin{aligned} f(t) = 0 & \Leftrightarrow (q - 2)t + (2 - q)(q - 1) = 0 \\ & \Leftrightarrow t = q - 1. \end{aligned}$$

Als $q = 2$, dan is $f(t)$ constant en gelijk aan nul.
In beide gevallen is $t + 1 > q$ voldoende om $t + 2 - q \geq \frac{t}{q-1}$ te besluiten. □

Definitie 2.5.3. Een **ovoïde** in PG$(3, q)$ met $q > 2$ is een verzameling van $q^2 + 1$ punten in PG$(3, q)$ waarvan er geen drie collineair zijn.

Stelling 2.5.4. *Stel $q = p^m$ met p priem. Beschouw een projectieve $(n, k, n - w_1, 1)$-verzameling in PG$(k - 1, q)$ met $k \geq 4$. Dan is O een rechte in PG$(k - 1, q)$ of een ovoïde in PG$(3, q)$.*

Bewijs. Stel eerst dat O de projectieve ruimte PG$(k - 1, q)$ niet opspant. Dan spant O een m-dimensionale deelruimte π_m op met $m < k-1$. Alle hypervlakken van PG$(k-1, q)$ door π_m bevatten alle punten van O. Deze corresponderen noodzakelijk met het intersectiegetal $n - w_1$. Het is niet mogelijk dat een hypervlak dat π_m niet bevat O snijdt in $n - w_1$ punten, want anders zou O geen m-dimensionale deelruimte opspannen. Alle hypervlakken die π_m niet bevatten, snijden O dus in juist één punt. Hieruit volgt dat alle hypervlakken van π_m de verzameling O in juist 1 punt moeten snijden. Dit is enkel mogelijk als O de verzameling punten op een rechte is, waaruit volgt $m = 1$.

Stel nu dat O de ruimte PG$(k-1, q)$ wel opspant. Uit stelling 2.2.1 en gevolg 2.3.3 volgt dat O een twee-gewicht $[n, k]$-code bepaalt met gewichten $w_1 = p^j t$ en $w_2 = p^j(t+1)$. Aangezien $w_2 = n-1$, volgt hier ook uit dat $n = p^j(t+1)+1$. Dan is $K = n(q-1) = (p^j(t+1)+1)(q-1)$. Als we deze uitdrukkingen substitueren in vergelijking (2.3), dan vinden we

$$0 = \left(p^{2j}(t + 1)^2 + 2p^j(t + 1) + 1\right)(q^2 - 2q + 1) + \left(p^j(t + 1) + 1\right)(q - 1)$$

$$
\begin{aligned}
&\quad - (p^j(t+1)+1)(q-1)qp^j(2t+1) + p^{2j}t(t+1)q^2 - \frac{p^{2j}t(t+1)}{q^{k-2}} \\
&= p^{2j}(t+1)^2q^2 - 2p^{2j}(t+1)^2q + p^{2j}(t+1)^2 + 2p^j(t+1)q^2 - 4p^j(t+1)q + 2p^j(t+1) \\
&\quad + q^2 - 2q + 1 + p^j(t+1)q - p^j(t+1) + q - 1 - p^{2j}(t+1)(2t+1)q^2 \\
&\quad + p^{2j}(t+1)(2t+1)q - p^j(2t+1)q^2 + p^j(2t+1)q + p^{2j}(t^2+t)q^2 - \frac{p^{2j}t(t+1)}{q^{k-2}} \\
&= p^{2j}\left(t^2+2t+1-(2t^2+3t+1)+t^2+t\right)q^2 + p^{2j}\left(-2(t^2+2t+1)+2t^2+3t+1\right)q + p^{2j}(t+1)^2 \\
&\quad + p^j\left(2(t+1)-(2t+1)\right)q^2 + p^j\left(-4(t+1)+(t+1)+(2t+1)\right)q + p^j\left(2(t+1)-(t+1)\right) \\
&\quad + q^2 - q - \frac{p^{2j}t(t+1)}{q^{k-2}} \\
&= -p^{2j}(t+1)q + p^{2j}(t+1)^2 + p^jq^2 + p^j(-t-2)q + p^j(t+1) + q^2 - q - \frac{p^{2j}t(t+1)}{q^{k-2}} \\
&= p^j\left(-p^j(t+1)q + p^j(t+1)^2 + q^2 + t + 1 - (t+1)q - q\right) + q^2 - q - \frac{p^{2j}t(t+1)}{q^{k-2}} \\
&= p^j\left((t+1)-q\right)\left((t+1)p^j - (q-1)\right) + q(q-1) - \frac{t(t+1)p^{2j}}{q^{k-2}}. \qquad (2.14)
\end{aligned}
$$

We beschouwen drie afzonderlijke gevallen.

Geval 1: $j = 0$
Er geldt nu $w_1 = n - 1 - 1$ en $w_2 = 1$. Dan is O een projectieve $(n, k, 2, 1)$-verzameling. Er kunnen geen drie punten van O in eenzelfde hypervlak liggen, want de intersectiegetallen van O met een hypervlak zijn 1 en 2. Er volgt dat elke drie punten van O de ruimte PG$(k-1, q)$ opspannen. Dit is echter in strijd met het gegeven dat $k \geq 4$. Dit geval kan zich dus niet voordoen.

Geval 2: $j \geq m$
Er geldt $p^j \geq p^m = q$. Dan volgt $(t+1)p^j - (q-1) \geq tq + q - q + 1 > tq$. Veronderstel $t + 1 < q$. Dan volgt uit (2.14) dat

$$0 < p^j(t+1-q)tq + q(q-1) - \frac{t(t+1)p^{2j}}{q^{k-2}}. \qquad (2.15)$$

Aangezien $p^j > q-1$ geldt $-p^j(t+1-q)tq > q(q-1)$, waaruit volgt dat $p^j(t+1-q)tq+q(q-1) < 0$, maar dit is in strijd met uitdrukking (2.15). Er moet dus gelden dat $t + 1 \geq q$.

Geval 3: $0 < j < m$
In dit geval is $p^j < p^m = q$. Uit vergelijking (2.14) volgt

$$p^j \;\Big|\; \frac{t(t+1)p^{2j}}{q^{k-2}} = \frac{t(t+1)p^{2j}}{p^{m(k-2)}} = t(t+1)p^{2j-mk+2m}.$$

Aangezien $k \geq 4$, is $2j - mk + 2m \leq 2j - 2m$. Er volgt $p^j \mid t(t+1)p^{2j-2m}$, dus $p^{2m-j} \mid t(t+1)$. We weten dat $p^{2m-j} = \frac{q^2}{p^j} > \frac{q^2}{q} = q$, dus $q \mid t(t+1)$, waaruit volgt dat ook in dit geval $t + 1 \geq q$.

Veronderstel nu dat $t + 1 > q$. Dan vinden we m.b.v. de voorgaande lemma's

$$
\begin{aligned}
p^j(t+1-q)\left((t+1)p^j - (q-1)\right) &\geq p^j\left(\frac{t+1}{q+1}\right)\left((t+2-q)p^j + (q-1)(p^j-1)\right) \\
&\geq p^j\left(\frac{t+1}{q+1}\right)\left(\frac{tp^j}{q-1} + (q-1)(p^j-1)\right) \\
&> \frac{t(t+1)p^{2j}}{q^2-1},
\end{aligned}
$$

waarbij de laatste ongelijkheid geldt vermits $q-1 > 0$ en $p^j - 1 > 0$, aangezien $j > 0$. Uit vergelijking (2.14) volgt nu

$$\begin{aligned} 0 &> \frac{t(t+1)p^{2j}}{q^2-1} + q^2 - q - \frac{t(t+1)p^{2j}}{q^{k-2}} \\ &= p^{2j}t(t+1)\left(\frac{1}{q^2-1} - \frac{1}{q^{k-2}}\right) + q^2 - q \\ &= p^{2j}t(t+1)\left(\frac{q^{k-2}-q^2+1}{q^k-q^{k-2}}\right) + q^2 - q. \end{aligned}$$

Dit is echter strijdig, vermits uit $k \geq 4$ volgt dat $q^{k-2} - q^2 \geq 0$.

Er moet dus gelden dat $t + 1 = q$. Uit (2.14) volgt

$$\begin{aligned} & 0 = q(q-1) - \frac{t(t+1)p^{2j}}{q^{k-2}} \\ \Leftrightarrow\ & 0 = q(q-1)\left(1 - \frac{p^{2j}}{p^{m(k-2)}}\right) \\ \Leftrightarrow\ & 2j - m(k-2) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & j = \frac{m(k-2)}{2}. \end{aligned}$$

Hieruit volgen $w_2 = p^j(t+1) = q^{\frac{k-2}{2}} \cdot q = q^{\frac{k}{2}}$ en $w_1 = p^j t = q^{\frac{k}{2}-1} \cdot (q-1) = q^{\frac{k}{2}} - q^{\frac{k}{2}-1}$. We weten nu ook dat $n = w_2 + 1 = q^{\frac{k}{2}} + 1$ en $K = n(q-1) = \left(q^{\frac{k}{2}}+1\right)(q-1)$. Met behulp van stelling 2.2.8 vinden we

$$\begin{aligned} \lambda = & \left(q^{\frac{k}{2}}+1\right)^2 (q-1)^2 + 3\left(q^{\frac{k}{2}}+1\right)(q-1) - q\left(2q^{\frac{k}{2}} - q^{\frac{k}{2}-1}\right) \\ & - \left(q^{\frac{k}{2}}+1\right)(q-1)q\left(2q^{\frac{k}{2}} - q^{\frac{k}{2}-1}\right) + q^2 q^{\frac{k}{2}}\left(q^{\frac{k}{2}} - q^{\frac{k}{2}-1}\right) \\ = & q^2 - q^{\frac{k}{2}} + q - 2. \end{aligned}$$

Uit stelling 2.2.10 volgt dat $2E' = \lambda - q + 2 = q^2 - q^{\frac{k}{2}}$. Verder weten we dat $E' \geq 0$, dus er volgt dat $k = 4$. Dan is $n = q^2 + 1$ en $n - w_1 = q^2 + 1 - (q^2 - q) = q + 1$. We kunnen dus besluiten dat O een projectieve $(q^2 + 1, 4, q + 1, 1)$-verzameling is in PG$(3, q)$.

Stel dat een rechte L de verzameling O snijdt in $c \geq 2$ punten. Dan snijdt elk vlak door L de verzameling O in $q + 1$ punten. Er geldt

$$\begin{aligned} & q^2 + 1 = (q + 1 - c)(q + 1) + c \\ \Leftrightarrow\ & q^2 + 1 = q^2 + 2q + 1 - cq - c + c \\ \Leftrightarrow\ & c = 2. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat elke rechte O snijdt in $0,\ 1$ of 2 punten. Bijgevolg is O een ovoïde in PG$(3, q)$. □

Stelling 2.5.5. *Stel $q = p^m$ met p priem en kies een natuurlijk getal i vast. Zij O een projectieve (n, k, h, i)-verzameling die* PG$(k-1, q)$ *opspant. Dan geldt $h \leq (q+1)i$, waarbij de gelijkheid geldt als en slechts als O een ovoïde is in* PG$(3, q)$*. Verder geldt $k \leq (q+1)i + 1$. Er zijn dus slechts een eindig aantal projectieve verzamelingen voor gegeven q en i.*

Bewijs. Als $h \leq (q+1)i$, dan spannen elke $(q+1)i+1$ punten van O de ruimte $\mathrm{PG}(k-1,q)$ op, want $(q+1)i+1$ punten van O kunnen niet in een hypervlak van $\mathrm{PG}(k-1,q)$ bevat zijn. Verder weten we dat $(q+1)i+1$ punten hoogstens een $(q+1)i$-ruimte opspannen. Er moet dus gelden dat $k-1 \leq (q+1)i$, of $k \leq (q+1)i+1$.

Als $h \leq i$, geldt $h \leq (q+1)i$ sowieso. We mogen dus aannemen dat $h > i$. Als $i = 1$ volgt het gestelde wegens stelling 2.5.4. We mogen dus veronderstellen dat $i > 1$.

Zoals voorheen bepaalt O een twee-gewicht $[n,k]$-code met gewichten $w_1 = p^j t$ en $w_2 = n - i = p^j(t+1)$. Er volgt $n = p^j(t+1)+i$. Als we deze uitdrukkingen substitueren in vergelijking (2.3) bekomen we, analoog als in het bewijs van stelling 2.5.4,

$$0 = (t+1-q)p^j\left((t+1)p^j - i(q-1)\right) - (q-1)p^j(i-1)(t+1) + i(q-1)(iq-i+1) - \frac{t(t+1)p^{2j}}{q^{k-2}}. \tag{2.16}$$

Veronderstel nu dat $0 \leq h-(q+1)i$. Dan zoeken we een strijdigheid. Aangezien

$$\begin{aligned} h-(q+1)i &= n - p^j t - (q+1)\left(n - p^j(t+1)\right) \\ &= n - p^j t - qn + qp^j(t+1) - n + p^j(t+1) \\ &= -q\left(p^j(t+1)+i\right) + qp^j(t+1) + p^j \\ &= p^j - iq, \end{aligned}$$

volgt dat $p^j \geq iq$.
Aangezien $i > 1$, geldt $qt(i-1) - q \geq 0 > -i+1$. Hiermee vinden we

$$\begin{aligned} (q-1)p^j(i-1)(t+1) &\geq (q-1)iq(i-1)(t+1) \\ &= (q-1)i(qit+qi-qt-q) \\ &> (q-1)i(-i+1) + (q-1)iqi \\ &= (q-1)i(iq-i+1). \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat de som van de tweede en derde term uit (2.16) strikt negatief is. Aangezien ook de laatste term uit (2.16) negatief is, moet de eerste term van (2.16) strikt positief zijn. Anders kan de som nooit 0 zijn. Aangezien

$$(t+1)p^j - i(q-1) \geq (t+1)iq - iq + i = iqt + i > 0,$$

volgt $t+1-q > 0$ of $t+1 > q$.

Stel $i(q-1)(iq-i+1) = p^\alpha u$ met $p \not| u$. Als $p|i$ volgt dat $p^\alpha \mid i$, want $p \not| (q-1)$ en $p \not| (iq-i+1)$. Dan geldt $p^\alpha \leq i$. Stel nu dat $p \mid (iq-i+1)$. Hieruit volgt dat $p \mid (i-1)$. Dan kan p geen deler zijn van i. Aangezien p ook geen deler is van $q-1$, volgt nu dat $p^\alpha \mid (iq-i+1)$. Bijgevolg moet $p^\alpha \mid iq$ en volgt $p^\alpha < iq$. In elk geval geldt dus dat $p^\alpha < iq$.

Verder is $p^j \geq iq > p^\alpha$, dus $j > \alpha$. Dan is $j \geq \alpha+1$. Stel nu dat $p^{\alpha+1}$ een deler is van de laatste term uit (2.16). Aangezien p^j, en dus ook $p^{\alpha+1}$, een deler is van de eerste twee termen van (2.16), zou hieruit volgen dat $p^{\alpha+1} \mid i(q-1)(iq-i+1)$. Maar α is de grootste macht van p die die term deelt. Er moet dus gelden dat

$$p^{\alpha+1} \not| \, t(t+1)p^{2j+2m-mk}. \tag{2.17}$$

Aangezien p^α een deler is van de eerste drie termen uit (2.16), moet

$$p^\alpha \mid t(t+1)p^{2m+2j-mk}.$$

Er bestaat dus een x waarvoor $p^\alpha x = t(t+1)p^{2m+2j-mk}$. Uit (2.17) volgt dat x geen factoren p bevat. Er volgt dat $p^{2m+2j-mk} \mid p^\alpha$, dus

$$t(t+1)p^{2j+2m-mk} \leq p^\alpha t(t+1). \tag{2.18}$$

Noem het rechterlid van (2.16) R.
Door gebruik te maken van $p^j \geq iq$ en $i > 1$ vinden we

$$(t+1)p^j - i(q-1) = tp^j + p^j - iq + i > tp^j.$$

M.b.v. deze ongelijkheid en lemma 2.5.1 geldt voor de eerste term van R:

$$(t+1-q)p^j\left((t+1)p^j - i(q-1)\right) > \frac{t(t+1)p^{2j}}{q+1}.$$

We vinden

$$R > \frac{t(t+1)p^{2j}}{q+1} - (i-1)(q-1)p^j(t+1) - p^\alpha t(t+1). \tag{2.19}$$

Veronderstel nu dat $p^j = iq$. Dan bevat het product iq enkel factoren p, dus $p \mid i$. Dan is $p^\alpha \leq i$ en kunnen we (2.18) verder vergroten tot $it(t+1)$. Er volgt

$$R > \frac{iq(t+1)}{q+1}\left(tiq - (i-1)(q^2-1) - \frac{t(q+1)}{q}\right). \tag{2.20}$$

Verder geldt

$$tiq - (i-1)(q^2-1) - \frac{t(q+1)}{q} = iq(t-q) + i - 1 + q^2 - t - \frac{t}{q} \geq 0,$$

vermits $t \geq q$ en $i > 1$. Uit (2.20) volgt nu dat $R > 0$, maar dit is strijdig met (2.16).

Er moet dus gelden dat $p^j \geq iq + 1$. In het bijzonder volgt hieruit dat $p^j \geq q = p^m$, dus $q \mid p^j$. Hieruit volgt dat $p^j \geq (i+1)q$. Dan volgt uit (2.19)

$$\begin{aligned} R &> \frac{t(t+1)p^j(i+1)q}{q+1} - (i-1)(q-1)p^j(t+1) - p^j t(t+1) \\ &\geq \frac{(t+1)p^j}{q+1}\left(t(i+1)q - (i-1)(q^2-1) - t(q+1)\right). \end{aligned}$$

Door gebruik te maken van $t \geq q$ en $i > 1$ vinden we ook in dit geval dat $R > 0$, opnieuw een strijdigheid. □

2.6 Een nieuwe twee-karakterverzameling in PG$(5, q^2)$

In deze sectie bespreken we de constructie van een twee-karakterverzameling in PG$(5, q^2)$ die ontdekt is door A. De Wispelaere en H. Van Maldeghem in [10]. In deze constructie wordt gebruik gemaakt van enkele onverwachte ideeën: men beschouwt een anti-isomorfisme tussen twee scheve vlakken van PG$(5, q^2)$, alsook een Baer deelvlak. Deze twee-karakterverzameling is nieuw, want ze komt niet voor in eerdere artikels zoals dat van R. Calderbank en W.M. Kantor, waarin alle tot dan toe gekende voorbeelden van twee-karakterverzamelingen opgelijst staan.

Beschouw twee scheve vlakken π en π' in PG$(5, q^2)$. Kies een anti-isomorfisme $\theta : \pi \to \pi'$. Dan beeldt θ de puntenverzameling van π af op de rechtenverzameling van π' en de rechtenverzameling van π op de puntenverzameling van π'. Beschouw een Baer deelvlak B van π en stel $\theta(B) = B'$. We zullen de punten en rechten van B en B' **Baer punten** en **Baer rechten** noemen. De andere punten en rechten van π en π' zullen we **niet-Baer punten** en **niet-Baer rechten** noemen.

Opmerking 2.6.1. Beschouw een punt $x \in \mathrm{PG}(5, q^2) \setminus (\pi \cup \pi')$. Dan bestaat er een unieke rechte $L(x)$ die x bevat en π en π' snijdt in respectievelijke punten x_π en $x_{\pi'}$: $x_\pi = \langle \pi', x \rangle \cap \pi$, $x_{\pi'} = \langle \pi, x \rangle \cap \pi'$ en $L(x) = \langle \pi, x \rangle \cap \langle \pi', x \rangle$.

Opmerking 2.6.2. Als x, y en z drie collineaire punten zijn in $\mathrm{PG}(5, q^2) \setminus (\pi \cup \pi')$, dan zijn de drie punten x_π, y_π en z_π ook collineair (of samenvallend) in π en zijn $x_{\pi'}$, $y_{\pi'}$ en $z_{\pi'}$ collineair (of samenvallend) in π'.

We construeren nu de verzameling $S(\pi, \pi', B, \theta)$ waarvan we willen bewijzen dat het een twee-karakterverzameling is. De puntenverzameling van S kunnen we opdelen in drie types van punten:

(PI) De PI-punten van $S(\pi, \pi', B, \theta)$ zijn de punten van π.

(BB) De BB-punten van $S(\pi, \pi', B, \theta)$ zijn de punten $x \in \mathrm{PG}(5, q^2) \setminus (\pi \cup \pi')$ waarvoor x_π en $x_{\pi'}$ Baer punten zijn en $x_{\pi'} \notin x_\pi^\theta$.

(NB) De NB-punten van $S(\pi, \pi', B, \theta)$ zijn de punten $x \in \mathrm{PG}(5, q^2) \setminus (\pi \cup \pi')$ waarvoor x_π en $x_{\pi'}$ niet-Baer punten zijn en $x_{\pi'} \in x_\pi^\theta$.

Een rechte uu' met $u \in \pi$ en $u' \in \pi'$ wordt een **S-rechte** genoemd als ofwel u en u' Baer punten zijn en $u' \notin u^\theta$, ofwel u en u' allebei niet-Baer punten zijn en $u' \in u^\theta$.

Opmerking 2.6.3. Alle q^2 punten van een S-rechte verschillend van de doorsnede van die rechte met π' behoren tot S.

Opmerking 2.6.4. Voor elk punt $x \in \mathrm{PG}(5, q^2) \setminus (\pi \cup \pi')$ is de rechte $L(x)$ een S-rechte als en slechts als $x \in S$.

Eigenschap 2.6.5. Symmetrie-eigenschap. De verzameling $S(\pi', \pi, B', \theta^{-1})$ is gelijk aan de verzameling $(S \cup \pi') \setminus \pi$.

Stelling 2.6.6. *(i) De verzameling $S(\pi, \pi', B, \theta)$ bevat precies $q^8 + q^4 + 1$ punten van* $\mathrm{PG}(5, q^2)$.

(ii) De verzameling $S(\pi, \pi', B, \theta)$ is een twee-karakterverzameling met gewichten $q^8 - q^6$ en $q^8 - q^6 + q^4$.

(iii) Het vlak π is het enige vlak van $\mathrm{PG}(5, q^2)$ *dat volledig bevat is in $S(\pi, \pi', B, \theta)$.*

(iv) Het vlak π' is het enige vlak van $\mathrm{PG}(5, q^2)$ *waarvan alle punten x voldoen aan de volgende eigenschap: x is niet bevat in $S(\pi, \pi', B, \theta)$, maar x is incident met een rechte L waarvan alle punten verschillend van x tot $S(\pi, \pi', B, \theta)$ behoren en die het unieke vlak π dat volledig bevat is in $S(\pi, \pi', B, \theta)$, snijdt.*

Eigenschappen (iii) en (iv) uit deze stelling karakteriseren de vlakken π en π' m.b.t. $S := S(\pi, \pi', B, \theta)$. Hieruit volgt dat π en π' gefixeerd worden onder de automorfismengroep van S.

Bewijs. (i) S bevat alvast alle $q^4 + q^2 + 1$ punten van π.

Beschouw een Baer punt $x \in B$. Zij y een BB-punt ten opzichte van x. Dan moet $y_\pi = x$, $y_{\pi'} \in B'$ en $y_{\pi'} \notin x^\theta$. Een Baer punt $z' \in \pi'$ bepaalt dus $q^2 - 1$ BB-punten in $\mathrm{PG}(5, q^2) \setminus (\pi \cup \pi')$ als en slechts als $z \notin x^\theta$. Aangezien er q^2 keuzes voor z' overblijven in B', zijn er juist $q^2(q^2 - 1)$ BB-punten ten opzichte van de gekozen $x \in B$.

Beschouw een niet-Baer punt $x \in \pi \setminus B$. Dan is x^θ een niet-Baer rechte in π' die juist één punt gemeen heeft met B'. Als y een NB-punt is ten opzichte van x, dan moet $y_\pi = x$, $y_{\pi'} \notin B'$ en

$y_{\pi'} \in x^\theta$. Een punt $z \in \pi'$ bepaalt dus $q^2 - 1$ NB-punten ten opzichte van x als en slechts als $z \in x^\theta \setminus B'$. Er zijn bijgevolg juist $q^2(q^2-1)$ NB-punten t.o.v. de gekozen $x \notin B$.

Omgekeerd bepaalt elk BB- of NB-punt y een uniek punt y_π. Er zijn dus geen punten dubbel geteld. Er volgt

$$|S| = (q^4 + q^2 + 1)(1 + q^2(q^2 - 1)) = q^8 + q^4 + 1.$$

(ii) Zij H een hypervlak van PG$(5, q^2)$. Dan moeten we bewijzen dat $|H \cap S|$ gelijk is aan $q^6 + 1$ of $q^6 + q^4 + 1$. We beschouwen de volgende drie gevallen afzonderlijk:

Geval 1: $\pi' \subseteq H$
De doorsnede $H \cap \pi$ is in dit geval een rechte L. Voor elk punt $p \in \pi$ zijn er juist $q^2(q^2-1)$ punten $x \in$ PG$(5, q^2) \setminus (\pi \cup \pi')$ waarvoor $x_\pi = p$. Deze punten x zijn gepartitioneerd in q^2 rechten door p. Hieruit volgt dat voor een punt $x \notin \pi$ dat behoort tot $H \cap S$ geldt dat x_π incident is met L. Er zijn hier $|L| = q^2 + 1$ verschillende mogelijkheden voor. Voor elk van deze mogelijkheden voor x_π zijn er juist q^2 mogelijkheden voor $x_{\pi'}$. Dit volgt uit de constructie van S. We bekomen $|H \cap S| = (q^2 + 1) + (q^2 + 1)q^2(q^2 - 1) = q^6 + 1$.

Geval 2: $\pi \subseteq H$
Wegens de symmetrie-eigenschap geldt $|H \cap S| = (q^6 - 1) - (q^2 - 1) + (q^4 + q^2 + 1) = q^6 + q^4 + 1$.

Geval 3: H snijdt π in een rechte L en π' in een rechte L'
Definieer ℓ als het aantal S-rechten die zowel L als L' niet-triviaal snijden. In $|(H \cap S) \setminus L|$ zijn er $(q^2 - 1)\ell$ punten bevat in de ℓ S-rechten die zowel L als L' niet-triviaal snijden. De rechte L bevat $q^2 + 1$ punten, die bovendien allemaal in $H \cap S$ liggen. We tellen nu het aantal S-rechten. Er zijn $q^8 + q^4 + 1 - (q^4 + q^2 + 1) = q^8 - q^2$ punten in $S \setminus \pi$. Elke S-rechte bevat precies $q^2 - 1$ punten in $S \setminus \pi$. Er zijn dus $\frac{q^8 - q^2}{q^2 - 1} = q^6 + q^4 + q^2$ S-rechten. Er zijn precies $(q^2 + 1)q^2$ S-rechten die L (resp. L') niet-triviaal snijden: voor elk punt van L (resp. L') zijn er zo q^2. Elke S-rechte die zowel L als L' niet snijdt, snijdt H in een uniek punt van S, want elke rechte snijdt het hypervlak H in een uniek punt of is erin bevat. Een S-rechte die L snijdt en L' niet snijdt, levert geen bijdrage aan $|H \cap S|$. Veronderstel immers $x \in S \setminus \pi,\ x \in H$ en $L(x)$ snijdt L. Dan is $L(x)$ bevat in H en dus snijdt $L(x)$ het vlak π' in een punt van de doorsnede $H \cap \pi'$. Dan is $L(x)$ een van de ℓ S-rechten die zowel L als L' niet-triviaal snijden, een strijdigheid. Analoog volgt hetzelfde voor de S-rechten die L' niet-triviaal snijden en L niet snijden. We moeten nog het aantal S-rechten vinden die zowel L als L' niet snijden. Er zijn $q^2(q^2 + 1) = q^4 + q^2$ S-rechten die L niet-triviaal snijden. Er zijn ook $q^2(q^2 + 1)$ S-rechten die L' niet-triviaal snijden. In totaal zijn er ℓ S-rechten die zowel L als L' niet-triviaal snijden. Er zijn dus $2(q^4 + q^2 - \ell)$ S-rechten die ofwel L niet-triviaal snijden, ofwel L' niet-triviaal snijden. Dit aantal moeten we aftrekken van het totaal aantal S-rechten. De ℓ S-rechten moeten we ook nog eens aftrekken van het totaal aantal S-rechten, want deze ℓ rechten dragen $q^2 - 1$ punten bij aan $|H \cap S|$ en die zijn al geteld. We bekomen

$$\begin{aligned} |H \cap S| &= (q^2 - 1)\ell + (q^2 + 1) + \big((q^6 + q^4 + q^2) - 2(q^4 + q^2 - \ell) - \ell\big) \\ &= q^6 - q^4 + \ell q^2 + 1. \end{aligned} \tag{2.21}$$

We moeten enkel nog de waarde van ℓ zoeken. We onderscheiden hiervoor de gevallen of L en L' al dan niet Baer rechten zijn en of L^θ al dan niet incident is met L'. Dit zijn acht gevallen, maar wegens de symmetrie-eigenschap kunnen we dit herleiden naar zes gevallen.

Geval 3a: L en L' zijn niet-Baer rechten en $L^\theta \in L'$
Aangezien L een niet-Baer rechte is, is L^θ een niet-Baer punt. Zij x het unieke Baer punt op L. Dan is $L^\theta \in x^\theta$ en x^θ is verschillend van L'. Zij x' het unieke Baer punt op L'. Dan is x' verschillend van L^θ en dus ligt x' niet op x^θ. De rechte xx' is dus een S-rechte. Aangezien $L^\theta \in L'$, bestaat er een uniek niet-Baer punt $y \in L$ met $y^\theta = L'$. Elke rechte yy' met y' een niet-Baer punt van L'

is een S-rechte. Er zijn er zo q^2. Door gebruik te maken van de symmetrie-eigenschap vinden we dat ook zz' met $z' = L^\theta = z^\theta \cap L'$ en $z \in L \setminus \{x, y\}$ een S-rechte is. Zo zijn er $q^2 - 1$. Er zijn dus $1 + q^2 + (q^2 - 1) = 2q^2$ S-rechten die zowel L als L' niet-triviaal snijden.

Geval 3b: L en L' zijn niet-Baer rechten en $L^\theta \notin L'$
Zij x het unieke Baer punt op L. Dan is x^θ de unieke Baer rechte door L^θ. Zij x' het unieke Baer punt op L'. Stel eerst dat $x' \in x^\theta$. De rechten yy' met y een niet-Baer punt van L en $y' = y^\theta \cap L'$ vormen precies de verzameling S-rechten die zowel L als L' niet-triviaal snijden. Dit zijn er q^2. Stel vervolgens dat $x' \notin x^\theta$. Dan zijn de gezochte S-rechten de rechte xx' en de rechten yy' met $y' = y^\theta \cap L'$ en y een niet-Baer punt op L waarvoor $x' \notin y^\theta$. Dit zijn er $1 + (q^2 - 1) = q^2$. We vinden in beide gevallen $\ell = q^2$.

Geval 3c: L en L' zijn Baer rechten en $L^\theta \in L'$
Noem x het punt op L dat door θ afgebeeld wordt op L'. Het punt x zal geen bijdrage leveren aan de waarde van ℓ. Beschouw een Baer punt $y \in L$, verschillend van x. Dan bepalen de rechten yy' met y' een Baer punt op L verschillend van L^θ alle S-rechten in H. Zo zijn er q^2, vermits er q keuzes zijn voor zowel y als y'. Zij z een niet-Baer punt op L. Dan is het unieke Baer punt op de rechte z^θ het punt L^θ. Bijgevolg is geen enkele S-rechte door z bevat in het hypervlak H. We bekomen in dit geval $\ell = q^2$.

Geval 3d: L en L' zijn Baer rechten en $L^\theta \notin L'$
Zij p een niet-Baer punt op L. Dan is p^θ een niet-Baer rechte. Deze rechte p^θ bevat een uniek Baer punt, namelijk L^θ. Bijgevolg is $p^\theta \cap L'$ een niet-Baer punt. Voor elk niet-Baer punt $y \in L$ is er bijgevolg een unieke S-rechte bevat in H. Zo zijn er $(q^2 - 1) - (q - 1) = q^2 - q$. Zij x een Baer punt op L. Dan is $x^\theta \cap L'$ een Baer punt, want twee Baer rechten in een vlak snijden in een Baer punt. Er zijn dus nog q Baer punten $x' \in L'$ die op een S-rechte xx' liggen met x. Zo zijn er $(q + 1)q = q^2 + q$. Tellen we de gevonden aantallen bij elkaar op, dan bekomen we $\ell = 2q^2$.

Geval 3e: L is een Baer rechte, L' is een niet-Baer rechte en $L^\theta \in L'$
Beschouw een Baer punt $x \in L$. Dan is x^θ een Baer rechte door L^θ, het unieke Baer punt op L'. Geen van de S-rechten door x behoort dus tot H. Vermits $L^\theta \in L'$ bestaat er een uniek niet-Baer punt $y \in L$ met $y^\theta = L'$. Elke rechte van de vorm yy' met y' een niet-Baer punt op L' is een S-rechte. Zo zijn er q^2. Beschouw nu een niet-Baer punt $z \in L$ verschillend van y. Dan is L^θ de doorsnede van z^θ en L'. Er is dus geen S-rechte door z bevat in H. We vinden $\ell = q^2$.

Geval 3f: L is een Baer rechte, L' is een niet-Baer rechte en $L^\theta \notin L'$
Er is een uniek Baer punt b incident met L'. Aangezien L^θ ook een Baer punt is, is de rechte bL^θ een Baer rechte. Het punt $x \in L$ waarvoor $x^\theta = bL^\theta$ is dus een Baer punt. Dit punt x levert geen bijdrage tot de waarde van ℓ. Voor elk ander Baer punt $y \in L$ behoort de S-rechte yb tot H. Er zijn q rechten van deze vorm. Zij z een niet-Baer punt op L. Dan is zz' met $z' = z^\theta \cap L'$ een S-rechte in H. Zo zijn er $q^2 - q$. We bekomen $\ell = q + (q^2 - q) = q^2$.

We vinden twee mogelijke waarden voor ℓ, namelijk $\ell = q^2$ en $\ell = 2q^2$. Als we deze waarden invullen in (2.21), bekomen we resp. $|H \cap S| = q^6 + 1$ en $|H \cap S| = q^6 + q^4 + 1$. We kunnen dus besluiten dat S een twee-karakterverzameling is met karakters $q^6 + 1$ en $q^6 + q^4 + 1$. De gewichten van deze twee-karakterverzameling zijn $(q^8 + q^4 + 1) - (q^6 - 1) = q^8 - q^6 + q^4$ en $(q^8 + q^4 + 1) - (q^6 + q^4 - 1) = q^8 - q^6$.

(iii) Stel dat er nog een vlak π^* volledig bevat is in S. Dan kunnen we alvast opmerken dat $\pi' \cap \pi^* = \emptyset$, vermits π' geen punten van S bevat. We beschouwen opnieuw verschillende gevallen.

Geval 1: $\pi \cap \pi^*$ is een rechte
Zij $x' = \langle \pi, \pi^* \rangle \cap \pi'$. Zij x een punt van $\pi^* \setminus \pi$. Dan bevat de S-rechte door x ook het punt x'. Er zijn q^4 zulke punten x, wat impliceert dat er q^4 S-rechten door x' gaan. Dit is echter een strijdigheid, vermits er door elk punt van π' juist q^2 S-rechten gaan.

Geval 2: $\pi \cap \pi^*$ is een punt p
Zij M' de rechte $\langle \pi, \pi^* \rangle \cap \pi'$. Beschouw een Baer punt $x' \in M'$. De drieruimte $\langle x', \pi^* \rangle$ snijdt π in een rechte M. Elke rechte van de vorm xx' met $x \in M \setminus \{p\}$ is een S-rechte (cf. opmerking 2.6.4). Dit is een strijdigheid, vermits dit niet geldig is als x een niet-Baer punt is.

Geval 3: $\pi \cap \pi^*$ is leeg
Kies een punt $y \in \pi^*$. Dan is $\langle y, \pi' \rangle \cap \pi$ een uniek punt x en $\langle y, \pi \rangle \cap \pi'$ is een uniek punt x'. De rechte xx' bevat het punt y. Op deze manier definiëren we een afbeelding $\xi : x \mapsto x'$ met $x \in \pi$, $x' \in \pi'$ en $|xx' \cap \pi^*| = 1$. Dit is een isomorfisme van π op π'. Elke rechte van de vorm xx^ξ is een S-rechte, want ze bevat een punt van $\pi^* \subseteq S$.
Beschouw een niet-Baer rechte L van π en veronderstel dat $L^\theta \in L^\xi$. Zij M een S-rechte met als basispunten de niet-Baer punten $x_\pi \in L$ en $x_{\pi'} \in L^\xi$. Stel dat $L^\theta \notin M$. Aangezien M een S-rechte is met NB-punten, moet $x_{\pi'} \in x_\pi^\theta$. Aangezien $x_\pi \in L$ geldt $L^\theta \in x_\pi^\theta$. Wegens de veronderstelling dat $x_{\pi'} \in L^\xi$, volgt dat $L^\xi = x_\pi^\theta$ of $x_\pi = \left(L^\xi\right)^{\theta^{-1}}$. Dus ofwel geldt $L^\theta \in M$, ofwel geldt $\left(L^\xi\right)^{\theta^{-1}} \in M$. Aangezien M willekeurig was, zou uit de veronderstelling dat $L^\theta \in L^\xi$ volgen dat elke S-rechte die niet-Baer punten van L en L^ξ bevat, door ofwel een punt van L gaat, ofwel door een punt van L^ξ. Dit is een strijdigheid. Er geldt dus $L^\theta \notin L^\xi$.
De afbeelding $\zeta : L \to L^\xi;\ x \mapsto L^\xi \cap x^\theta$ is een isomorfisme van projectieve rechten. Wegens de constructie van S valt dit isomorfisme ζ voor alle niet-Baer punten van L samen met ξ. Aangezien er maar één Baer punt $z \in L$, moet ook $z^\xi = z^\zeta \in z^\theta$. Dit is echter strijdig, vermits zz^ξ een S-rechte is.

(iv) We noemen een punt $x \in$ PG$(5, q^2)$ een **antipunt** m.b.t. S als $x \notin S$, maar x is bevat in een rechte L van PG$(5, q^2)$ die π snijdt en zodat $L \setminus \{x\} \subseteq S$. We moeten bewijzen dat π' het enige vlak is van PG$(5, q^2)$ waarvan alle punten antipunten zijn.

Beschouw een antipunt x dat niet in π' ligt. Zij L een rechte door x die π snijdt in een punt y en zodat elk punt van L, behalve x, tot S behoort. Stel $z' = \langle \pi, x \rangle \cap \pi'$. Merk op dat z' eigenlijk het punt $x_{\pi'}$ is. Beschouw een punt $u \in L \setminus \{x, y\}$. Dan bevat de rechte $z'u$ een punt u van S. We vinden nu dat alle S-rechten door z', behalve $z'x$, een punt van S bevatten. Op L liggen er namelijk q^2 punten van S en er gaan door z' juist q^2 S-rechten. Door gebruik te maken van opmerking 2.6.2 vinden we dat alle S-rechten door z' die een punt van L bevatten, π snijden in een rechte M min één punt. Als $p \in \pi$ of $p \in \pi'$ een niet-Baer punt is, snijden de S-rechten door p het vlak π' resp. π in een niet-Baer rechte. Als $p \in \pi$ of $p \in \pi'$ een Baer punt is, snijden de S-rechten door p het vlak π' resp. π in een Baer vlak min een Baer rechte. Bijgevolg is de rechte M een niet-Baer rechte in π en dus is z' een niet-Baer punt in π'. De rechte $z'x$ bevat geen punt van S, dus het punt $x_\pi = z'x \cap \pi$ is een Baer punt. We hebben aangetoond dat voor elk antipunt $x \notin \pi'$ geldt dat x_π een Baer punt is en $x_{\pi'}$ een niet-Baer punt.

Beschouw een vlak $\pi^* \neq \pi'$ waarvan alle punten antipunten zijn. Dan kan π^* niet scheef zijn aan π', want dit zou impliceren dat elk punt van π een Baer punt is. De doorsnede $\pi^* \cap \pi'$ kan ook geen punt zijn. Dit zou namelijk impliceren dat elk punt van de rechte $\langle \pi^*, \pi' \rangle \cap \pi$ een Baer punt is. Bijgevolg is $\pi^* \cap \pi'$ een rechte L'. Stel $x = \langle \pi^*, \pi' \rangle \cap \pi$. Dan is x een Baer punt dat op het invers beeld onder θ van minstens q^4 punten van π' ligt, opnieuw een strijdigheid. □

Bed nu PG$(5, q^2)$ als hypervlak H in in PG$(6, q^2)$.

Definitie 2.6.7. De **lineaire representatiegraaf** $\Gamma_5^*(S)$ is de graaf met als toppenverzameling V de punten van PG$(6, q) \setminus H$ waarbij twee toppen adjacent zijn als de rechte door de bijhorende punten S snijdt.

In [10] wordt naar Delsarte [7] verwezen voor de definitie van lineaire representatiegraaf en het feit dat $\Gamma_5^*(S)$ een sterk reguliere graaf is als en slechts als S een twee-karakterverzameling is. Het is duidelijk dat in dit geval $|V| = v = |\,\mathsf{PG}(6,q^2)| - |\,\mathsf{PG}(5,q^2)| = q^{12}$ en dat de valentie $k = (q^2-1)|S|$. Men verwijst in [10] ook naar [7] voor de volgende uitdrukkingen voor λ en μ:

$$\lambda = k - 1 + (k - qw_1 + 1)(k - qw_2 + 1) \qquad \text{en} \qquad \mu = k + (k - qw_1)(k - qw_2).$$

Men kan eenvoudig narekenen dat deze uitdrukkingen exact dezelfde zijn als de uitdrukkingen voor λ en μ uit stelling 2.2.8. Dit is uiteraard geen toeval, omdat de lineaire representatiegraaf in feite exact dezelfde graaf is als $G(\Omega)$, zoals gedefinieerd in definitie 2.1.12.

De volgende stelling volgt dan ook onmiddellijk uit stellingen 2.2.8 en 2.4.1.

Stelling 2.6.8. *De twee-karakterverzameling $S \subseteq \mathsf{PG}(5,q^2)$, zoals die hiervoor beschreven werd, definieert een sterk reguliere graaf met parameters*

$$\begin{aligned} v &= q^{12}, \\ k &= (q^2-1)(q^8+q^4+1), \\ \lambda &= q^8 - q^6 + q^2 - 2, \\ \mu &= q^2(q^2-1)(q^4-q^2+1). \end{aligned}$$

en nieuwe projectieve twee-gewichtcodes:

(i) een q^2-aire code van lengte q^8+q^4+1, dimensie 6 en gewichten q^8-q^6 en $q^8-q^6+q^4$,

(ii) voor elke priemmacht q_0 met $q_0^r = q$ een q_0-aire code met lengte $(q^8+q^4+1)\frac{(q^2-1)}{q_0-1}$, dimensie $12r$ en gewichten $q_0^{2r-1}(q^8-q^6)$ en $q_0^{2r-1}(q^8-q^6+q^4)$.

2.7 Twee-karakterverzamelingen in een affien vlak

In deze sectie bespreken we een resultaat van J. De Beule, J. Demeyer, K. Metsch en M. Rodgers uit 2014, zie [3]. Daarin bewijzen ze het bestaan van een nieuwe familie tight verzamelingen op de hyperbolische kwadriek $Q^+(5,q)$. Dit bewijzen ze algebraïsch, waarbij ze gebruik maken van gekende resultaten over Cameron-Liebler rechtenverzamelingen. We zullen deze berekeningen echter niet tot in het detail bespreken. Op het einde van hun artikel bewijzen De Beule et al. een resultaat over twee-karakterverzamelingen in een affien vlak, wat hier wel aan bod zal komen.

We beginnen met enkele definities.

Definitie 2.7.1. Een deelverzameling $\mathcal{T}$ van punten van $Q^+(5,q)$ is een x-**tight** verzameling als voor elk punt $P \in Q^+(5,q)$ geldt dat

$$|P^\perp \cap \mathcal{T}| = x(q+1) + q^2\chi_{\mathcal{T}}(P),$$

waarbij $\chi_{\mathcal{T}}$ de karakteristieke functie is van $\mathcal{T}$.
Een deelverzameling $\mathcal{T}$ van punten van $Q^+(5,q)$ is **tight** als er een x bestaat waarvoor $\mathcal{T}$ x-tight is.

Definitie 2.7.2. Beschouw een deelverzameling A van de verzameling $\Omega = \{\omega_1,\ldots,\omega_n\}$. De **karakteristieke vector** van A met betrekking tot Ω is de vector $(a_1,\ldots,a_n)$, waarbij de elementen a_i voor $i = 1,\ldots,n$ gegeven worden door

$$a_i = \begin{cases} 1 & \text{als } \omega_i \in A, \\ 0 & \text{als } \omega_i \notin A. \end{cases}$$

Definitie 2.7.3. Beschouw de projectieve ruimte PG(d, q). Kies een willekeurige, maar vaste, volgorde van de punten $p_1, \ldots, p_n$ van PG(d, q) en een willekeurige, maar vaste, volgorde van de rechten $L_1, \ldots, L_m$ van PG(d, q). De **punt-rechte adjacentiematrix** A van de projectieve ruimte PG(d, q) is de $(n \times m)$-matrix $A = (a_{ij})$, waarbij a_{ij} voor $i = 1, \ldots, n$ en $j = 1, \ldots, m$ gegeven wordt door

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als } p_i \in L_j, \\ 0 & \text{als } p_i \notin L_j. \end{cases}$$

Definitie 2.7.4. Zij A de punt-rechte adjacentiematrix van PG(d, q). Een verzameling rechten $\mathcal{L}$ van PG(d, q) is een **Cameron-Liebler rechtenverzameling** als de karakteristieke vector van $\mathcal{L}$ een rij van A is.

In de drie-dimensionale projectieve ruimte PG$(3, q)$ is er een karakterisering van Cameron-Liebler rechtenverzamelingen die gebruik maakt van spreads.

Definitie 2.7.5. Een **spread** van PG$(3, q)$ is een verzameling rechten $\mathcal{S}$ van PG$(3, q)$ waarbij elk punt van PG$(3, q)$ bevat is in juist één rechte van $\mathcal{S}$. De verzameling rechten van $\mathcal{S}$ vormt dus een partitie van de punten van PG$(3, q)$.

Stelling 2.7.6. *Een verzameling $\mathcal{L}$ van rechten van* PG$(3, q)$ *is een Cameron-Liebler rechtenverzameling van* PG$(3, q)$ *als en slechts als er een natuurlijk getal x bestaat waarvoor elke spread van* PG$(3, q)$ *juist x rechten van $\mathcal{L}$ bevat.*

Definitie 2.7.7. Als bovenstaande stelling voldaan is, noemen we het getal x de **parameter** van de Cameron-Liebler rechtenverzameling.

Voorbeeld 2.7.8. Door gebruik te maken van stelling 2.7.6, vinden we dat de verzameling $\mathcal{L}$ bestaande uit de rechten door een punt in PG$(3, q)$ een Cameron-Liebler rechtenverzameling is met parameter 1. Ook de duale verzameling $\mathcal{L}^D$, bestaande uit alle rechten in een vlak, is een Cameron-Liebler rechtenverzameling met parameter 1. Aangezien het aantal rechten in een spread van PG$(3, q)$ gelijk is aan $q^2 + 1$, is het complement van een Cameron-Liebler rechtenverzameling met parameter x een Cameron-Liebler rechtenverzameling met parameter $q^2 + 1 - x$. De unie van twee disjuncte Cameron-Liebler rechtenverzameling met respectievelijke parameters x en y is een Cameron-Liebler rechtenverzameling met parameter $x + y$. Hieruit volgt dat de unie van de verzameling rechten door punt en de verzameling rechten in een vlak dat dat punt niet bevat, een Cameron-Liebler rechtenverzameling is met parameter 2.

Notatie. We noemen $\mathbf{star}(p)$ de verzameling rechten door het punt p. We noemen $\mathbf{line}(\pi)$ de verzameling rechten in het vlak π. Met $\mathbf{pencil}(r, \tau)$ wordt de verzameling rechten door het punt r in het vlak τ bedoeld.

T. Pentilla heeft in [17] de volgende karakterisering van Cameron-Liebler rechtenverzamelingen besproken:

Stelling 2.7.9. *Een verzameling rechten $\mathcal{L}$ is een Cameron-Liebler rechtenverzameling met parameter x als en slechts als de volgende equivalente voorwaarden gelden:*

- *Voor elk incident punt-vlak paar (r, τ) geldt*

$$|\mathrm{star}(r) \cap \mathcal{L}\,| + |\mathrm{line}(\tau) \cap \mathcal{L}\,| = x + (q + 1) \cdot |\mathrm{pencil}(r, \tau) \cap \mathcal{L}\,|.$$

- *Voor elke rechte ℓ in* PG$(3, q)$ *wordt het aantal rechten $m \in \mathcal{L}$ die verschillend zijn van ℓ en ℓ snijden gegeven door*

$$x(q + 1) + (q^2 - 1)\chi_{\mathcal{L}}(\ell).$$

Een interessant resultaat i.v.m. Cameron-Liebler rechtenverzamelingen is het volgende:

Stelling 2.7.10. *Het beeld onder de Klein correspondentie van een Cameron-Liebler rechtenverzameling met parameter x is een x-tight verzameling van $Q^+(5,q)$.*

Definitie 2.7.11. Zij $\mathcal{S}$ een incidentiestructuur met punten en blokken. Een **tactical decomposition** van $\mathcal{S}$ is een partitie van de punten van $\mathcal{S}$ in puntenklassen en van de blokken van $\mathcal{S}$ in blokkenklassen, waarbij het aantal punten in een puntenklasse die incident zijn met een gegeven blok enkel afhankelijk is van de klasse waarin het blok ligt en waarbij het aantal blokken in een blokkenklasse die incidident zijn met een gegeven punt enkel afhankelijk is van de klasse waarin dat punt ligt.

Via heel wat algebraïsche redeneringen en berekeningen komen De Beule et al. tot het volgende resultaat:

Stelling 2.7.12. *Zij $q = p^h$ een priemmacht met $q \equiv 5$ of $9 \mod 12$. Dan heeft de hyperbolische kwadriek $Q^+(5,q)$ een decompositie $\pi_1 \cup \pi_2 \cup \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ in disjuncte tight verzamelingen. Hierbij zijn π_1 en π_2 generatoren en zijn $\mathcal{T}_1 \simeq \mathcal{T}_2$ $\left(\frac{q^2-1}{2}\right)$-tight verzamelingen.*

Voor het vervolg nemen we aan dat de generatoren in hetzelfde systeem als π_1 corresponderen met stralenwaaiers van PG$(3,q)$ en dat generatoren in hetzelfde systeem als π_2 corresponderen met stralenvelden van PG$(3,q)$.

Onder de Klein correspondentie correspondeert π_1 met de verzameling star(p) en π_2 met de verzameling line(π) met $p \notin \pi$. Uit stelling 2.7.10 volgt dat $\mathcal{T}_1$ en $\mathcal{T}_2$ corresponderen met isomorfe Cameron-Liebler rechtenverzamelingen $\mathcal{L}_1$ resp. $\mathcal{L}_2$ met parameter $\frac{q^2-1}{2}$. Merk op dat een Cameron-Liebler rechtenverzameling met parameter $\frac{q^2-1}{2}$ juist $\frac{q^2-1}{2}(q^2+q+1)$ rechten bevat.

Na een reeks algebraïsche berekeningen vinden De Beule et al. het volgende:

Stelling 2.7.13. *Voor elk natuurlijk getal e bestaat er een symmetrische tactical decomposition van* PG$(3,3^{2e})$ *met vier rechtenklassen* star(p), line(π), *$\mathcal{L}_1$ en $\mathcal{L}_2$, en vier puntenklassen $\{p\}, \pi$,*

$$\mathcal{P}_1 = \left\{ r \in \mathsf{PG}(3,3^{2e}) \mid\mid |\mathsf{star}(r) \cap \mathcal{L}_1| = \frac{(3^{2e}+1)(3^{2e}-3^e)}{2} \right\}$$

en

$$\mathcal{P}_2 = \left\{ r \in \mathsf{PG}(3,3^{2e}) \mid\mid |\mathsf{star}(r) \cap \mathcal{L}_1| = \frac{(3^{2e}+1)(3^{2e}+3^e)}{2} \right\}.$$

Het aantal rechten door een punt voor deze tactical decomposition wordt gegeven door de volgende waarden:

	star(p)	line(π)	$\mathcal{L}_1$	$\mathcal{L}_2$
$\{p\}$	$3^{4e}+3^{2e}+1$	0	0	0
π	1	$3^{2e}+1$	$\frac{3^{4e}-1}{2}$	$\frac{3^{4e}-1}{2}$
$\mathcal{P}_1$	1	0	$\frac{(3^{2e}+1)(3^{2e}-3^e)}{2}$	$\frac{(3^{2e}+1)(3^{2e}+3^e)}{2}$
$\mathcal{P}_2$	1	0	$\frac{(3^{2e}+1)(3^{2e}+3^e)}{2}$	$\frac{(3^{2e}+1)(3^{2e}-3^e)}{2}$.

Het aantal punten op een rechte voor deze symmetrische tactical decomposition geïnduceerd op PG$(3,3^{2e})$ *wordt gegeven door deze waarden:*

	star(p)	line(π)	$\mathcal{L}_1$	$\mathcal{L}_2$
$\{p\}$	1	0	0	0
π	1	$3^{2e}+1$	1	1
$\mathcal{P}_1$	$\frac{3^{2e}-1}{2}$	0	$\frac{3^{2e}-3^e}{2}$	$\frac{3^{2e}+3^e}{2}$
$\mathcal{P}_2$	$\frac{3^{2e}-1}{2}$	0	$\frac{3^{2e}+3^e}{2}$	$\frac{3^{2e}-3^e}{2}$.

Lemma 2.7.14. *De grootte van de puntenklassen $\mathcal{P}_1$ en $\mathcal{P}_2$ wordt gegeven door*

$$|\,\mathcal{P}_1\,| = |\,\mathcal{P}_2\,| = \left(\frac{q-1}{2}\right)(q^2+q+1),$$

met $q = 3^{2e}$.

Bewijs. We tellen voor $i = 1, 2$ het aantal koppels (r, L) met $r \in \mathcal{P}_i$ en $L \in$ star(p). Uit de tabellen volgt dat door elk punt van $\mathcal{P}_i$ juist één rechte van star(p) gaat en dat op elke rechte van star(p) juist $\frac{q-1}{2}$ punten van $\mathcal{P}_i$ liggen. We bekomen dus

$$|\,\mathcal{P}_i\,| \cdot 1 = \left(\frac{q-1}{2}\right)(q^2+q+1).$$

□

Definitie 2.7.15. Een **twee-karakterverzameling** in het affien vlak AG$(2, q)$ met **karakters** m en n is een verzameling K van punten van AG$(2, q)$ zodat elke rechte van AG$(2, q)$ ofwel m punten, ofwel n punten van K bevat. Bovendien moeten beide waarden voorkomen.

Voorbeeld 2.7.16. Bed het affien vlak AG$(2, q)$ met q even in in een projectief vlak PG$(2, q)$. Beschouw een hyperovaal H in PG$(2, q)$. Dan is de verzameling $H \cap$ AG$(2, q)$ een twee-karakterverzameling in AG$(2, q)$ met karakters 0 en 2.

Twee-karakterverzamelingen in affiene vlakken AG$(2, q)$ met q oneven komen zelden voor. In [18] zijn de meeste van de gekende voorbeelden beschreven (in affiene vlakken van orde 9). Daaruit komt ook het volgende lemma.

Lemma 2.7.17. *Zij K een twee-karakterverzameling in* AG$(2, q)$ *met karakters m en n. Dan moet $k = |K|$ voldoen aan*

$$k^2 - k\,(q(n+m-1)+n+m) + mnq(q+1) = 0.$$

Stelling 2.7.18. *Er bestaat een twee-karakterverzameling K in* AG$(2, 3^{2e})$ *met karakters $\frac{3^{2e}-3^e}{2}$ en $\frac{3^{2e}+3^e}{2}$. De kardinaliteit van K is gelijk aan $\frac{3^{4e}\pm 3^{2e}}{2}$.*

Bewijs. Beschouw een vlak τ verschillend van π met $p \notin \tau$. Beschouw het affien vlak $\tau' = \tau \backslash (\tau \cap \pi)$. Aangezien $p \notin \tau'$ en $\pi \cap \tau' = \emptyset$, liggen de punten van τ' in $\mathcal{P}_1$ of $\mathcal{P}_2$. Aangezien de rechten in τ' het punt p niet bevatten en niet in π liggen, liggen de rechten van τ' in $\mathcal{L}_1$ of $\mathcal{L}_2$. Stel K gelijk aan $\mathcal{P}_1 \cap \tau'$. Dan worden de intersectiegetallen van de rechten van τ' met de punten van K gegeven door de waarden in de tweede tabel van stelling 2.7.13 op derde en vierde rij in de derde en vierde kolom. Bijgevolg is K een twee-karakterverzameling van AG$(2, 3^{2e})$ met karakters $m = \frac{3^{2e}-3^e}{2}$ en $n = \frac{3^{2e}+3^e}{2}$.

Om de grootte van K te bepalen, gebruiken we lemma 2.7.17. We berekenen

$$0 = k^2 - k\left(3^{2e}\left(3^{2e}-1\right)+3^{2e}\right) + \frac{1}{4}\left(3^{4e}-3^{2e}\right)3^{2e}\left(3^{2e}+1\right) = k^2 - 3^{4e}k + \frac{1}{4}\left(3^{8e}-3^{4e}\right).$$

De discriminant van deze vierkantsvergelijking is gelijk aan $3^{8e} - 4 \cdot \frac{1}{4}\left(3^{8e} - 3^{4e}\right) = 3^{4e}$, waaruit volgt $k = \frac{3^{4e} \pm 3^{2e}}{2}$. We zullen nu bewijzen dat elk van deze waarden wel degelijk kan voorkomen.

Beschouw het vlak $\pi' := \langle p, \pi \cap \tau \rangle$. Elke rechte van star($p$) snijdt $\mathcal{P}_1$ in $\frac{q-1}{2}$ punten (zie tabel). Hieruit volgt dat π' juist $\frac{q-1}{2}(q+1)$ punten van $\mathcal{P}_1$ bevat.

Beschouw vervolgens de $q-1$ vlakken van PG$(3, q)$ door $\pi \cap \tau$, verschillend van π en niet door p. In elk van deze vlakken kan een puntenverzameling K zoals beschreven geconstrueerd worden. Aangezien π geen punten van $\mathcal{P}_1$ bevat, bevatten deze $q-1$ vlakken

$$|\,\mathcal{P}_1\,| - |\,\mathcal{P}_1 \cap \pi'| = \frac{q-1}{2}(q^2+q+1) - \frac{q-1}{2}(q+1) = q^2\left(\frac{q-1}{2}\right)$$

punten van $\mathcal{P}_1$. Noem x het aantal van deze vlakken die $q\left(\frac{q-1}{2}\right)$ punten van $\mathcal{P}_1$ bevatten en y het aantal van deze vlakken die $q\left(\frac{q+1}{2}\right)$ punten van $\mathcal{P}_1$ bevatten.
We berekenen

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} x + y = q - 1 \\ xq\left(\frac{q-1}{2}\right) + yq\left(\frac{q+1}{2}\right) = q^2\left(\frac{q-1}{2}\right) \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} y = q - 1 - x \\ x(q-1) + (q-1-x)(q+1) = q(q-1) \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} y = q - 1 - x \\ xq - x + q^2 + q - q - 1 - xq - x = q^2 - q \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} y = q - 1 - x \\ -2x = 1 - q \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} x = \frac{q-1}{2}, \\ y = \frac{q-1}{2}. \end{cases}
\end{aligned}$$

$\square$

Hoofdstuk 3

Quasikwadrieken

In dit hoofdstuk bespreken we een bijzondere klasse twee-karakterverzamelingen, namelijk quasikwadrieken. Dit zijn puntenverzamelingen met dezelfde grootte en dezelfde intersectiegetallen met hypervlakken als niet-singuliere kwadrieken. Quasikwadrieken zijn in 2000 ingevoerd door F. De Clerck, N. Hamilton, C.M. O'Keefe en T. Pentilla, zie [6].

3.1 Pseudocomplementen

We beginnen dit hoofdstuk met een aantal resultaten over pseudocomplementen.

Definitie 3.1.1. Zij N een t-dimensionale deelruimte van PG(n, q). Een verzameling K van punten die disjunct is aan N is een **pseudocomplement** voor N als

- elke $(t+1)$-dimensionale deelruimte van PG(n, q) die N bevat K snijdt in juist 1 punt,
- elk hypervlak dat N niet bevat K snijdt in ofwel a, ofwel b punten met $0 \leq a < b$.

Opmerking 3.1.2. Elk pseudocomplement K van een t-dimensionale deelruimte van PG(n, q) heeft $|K| = \frac{q^{n-t}-1}{q-1}$ punten, dit is gelijk aan het aantal $(t+1)$-dimensionale deelruimten door een gegeven t-dimensionale deelruimte.

Definitie 3.1.3. Een **ovaal** O in een projectieve ruimte PG(n, q) is een verzameling punten van PG(n, q) waarvan er geen drie collineair zijn en zodat er door elk punt P van O een unieke rechte gaat van PG(n, q) die enkel P met O gemeen heeft.

Opmerking 3.1.4. Uit het bewijs van stelling 1.3.15 volgt dat deze definitie equivalent is met definitie 1.3.13 voor ovalen in PG$(2, q)$.

Stelling 3.1.5. *Zij N een $(n-2)$-dimensionale deelruimte van* PG(n, q)*, $n \geq 2$. Zij K een pseudocomplement voor N. Dan is K ofwel een rechte, ofwel is $n = 2$, is q even en is K een ovaal met kern N.*

Bewijs. Stel eerst dat $a > 0$. Dan is K een verzameling van $q + 1$ punten die elk hypervlak snijdt. Bijgevolg is K een rechte (zie [13], sectie 3.5). We mogen dus aannemen dat $a = 0$. Stel t_b gelijk aan het aantal hypervlakken die N niet bevatten en K snijden in b punten. We kunnen op twee manieren het aantal elementen tellen in de verzameling

$$\{(H, p) \mid H \text{ een hypervlak dat } N \text{ niet bevat, } p \in H \cap K\}.$$

We bekomen

$$bt_b = (q+1)\left(\frac{q^n-1}{q-1}-1\right), \tag{3.1}$$

vermits $|K| = q+1$ en door een gegeven punt p precies $\frac{q^n-1}{q-1}$ hypervlakken gaan, waarvan er precies één N bevat, namelijk $\langle p, N\rangle$. We kunnen ook het aantal elementen van de verzameling

$$\{(H,(p,q)) \mid H \text{ een hypervlak dat } N \text{ niet bevat, } (p,q) \text{ een geordend koppel verschillende punten in } H \cap K\}$$

op twee manieren tellen. We bekomen

$$b(b-1)t_b = (q+1)q\left(\frac{q^{n-1}-1}{q-1}\right) \tag{3.2}$$

Substitueren we uitdrukking (3.1) in vergelijking (3.2), dan bekomen we

$$\begin{aligned}
(q+1)\left(\frac{q^n-1}{q-1}-1\right)(b-1) &= (q+1)q\left(\frac{q^{n-1}-1}{q-1}\right) \\
\Leftrightarrow \left(\frac{q^n-q}{q-1}\right)(b-1) &= q\left(\frac{q^{n-1}-1}{q-1}\right) \\
\Leftrightarrow b-1 &= 1 \\
\Leftrightarrow b &= 2.
\end{aligned}$$

Uit vergelijking (3.1) volgt

$$t_b = \left(\frac{q+1}{2}\right)\left(\frac{q^n-q}{q-1}\right).$$

In totaal zijn er $t_a + t_b = \frac{q^{n+1}-q^2}{q-1}$ hypervlakken die N niet bevatten. Hieruit volgt dat $t_a \neq 0$.
Als $n = 2$, is N een punt. We weten dat elke rechte K snijdt in $a = 0$, $b = 2$ of 1 punt (rechte door N). Bijgevolg is K een ovaal met kern N en is q even.
We moeten enkel nog het geval $n \geq 3$ bespreken. Beschouw hiervoor een hypervlak Σ dat N niet bevat en K niet snijdt. Zo'n hypervlak bestaat, aangezien $a = 0$ en $t_a \neq 0$. Beschouw een hypervlak Σ_{n-2} van Σ dat N snijdt in de $(n-3)$-dimensionale deelruimte $\Sigma \cap N$. Er is één hypervlak door Σ_{n-2} dat N bevat en dus één punt met K gemeen heeft. Stel dat er m hypervlakken zijn door Σ_{n-2} die $b = 2$ punten gemeen hebben met K. Dan vinden we dat $1 + 2m = q + 1$, waaruit volgt dat q even is.
Beschouw een $(n-2)$-dimensionale deelruimte Σ'_{n-2} die N snijdt in een $(n-4)$-dimensionale deelruimte. Er is geen hypervlak door Σ'_{n-2} dat K snijdt in juist één punt. Zo'n hypervlak H bevat namelijk N en dan zouden N en Σ'_{n-2} beide hypervlakken zijn van H en bijgevolg een doorsnede hebben van dimensie minstens $n-3$, een strijdigheid. De $q+1$ hypervlakken door Σ'_{n-2} hebben dus 0 of 2 punten met K gemeen, waaruit volgt dat 2 een deler is van $q+1$. Dit levert echter een strijdigheid op, vermits we hiervoor hebben aangetoond dat q even is. □

Notatie. Zoals voorheen noteren we het aantal punten in een $(d-1)$-dimensionale deelruimte van PG(n,q) met $\tau_d = \frac{q^d-1}{q-1}$. Er geldt dan $\tau_d = q\tau_{d-1} + 1$.

Stelling 3.1.6. *Zij N een $(n-3)$-dimensionale deelruimte van PG(n,q) met $n \geq 3$. Zij K een pseudocomplement voor N. Dan geldt een van volgende uitspraken:*

- *K is een vlak dat N niet snijdt;*

- $q = 2,\ n = 3$ *en* $K \cup \{N\}$ *is het complement van een vlak in* PG$(3, 2)$*;*
- q *is een even kwadraat,* $a = q - \sqrt{q} + 1$ *en* $b = q + \sqrt{q} + 1$*.*

Bewijs. Stel t_a en t_b het aantal hypervlakken die N niet bevatten en K snijden in a respectievelijk b punten. Dan geldt

$$t_a + t_b = \tau_{n+1} - \tau_3, \tag{3.3}$$

vermits τ_{n+1} het totaal aantal hypervlakken is in PG(n, q) en τ_3 het aantal hypervlakken die N bevatten.
M.b.v. een dubbele telling van het aantal elementen in de verzameling

$$\{(H, p) \mid H \text{ een hypervlak dat } N \text{ niet bevat, } p \in H \cap K\}$$

bekomen we

$$at_a + bt_b = \tau_3(\tau_n - \tau_2), \tag{3.4}$$

aangezien $|K| = \tau_3$, τ_n het aantal hypervlakken is door een gegeven punt in K en τ_2 het aantal hypervlakken is door de $(n-2)$-dimensionale ruimte $\langle p, N\rangle$.
M.b.v. een dubbele telling van het aantal elementen in de verzameling

$$\{(H, (p, q)) \mid H \text{ een hypervlak dat } N \text{ niet bevat, } (p, q) \text{ een geordend koppel verschillende punten in } H \cap K\}$$

bekomen we een derde vergelijking:

$$a(a-1)t_a + b(b-1)t_b = \tau_3(\tau_3 - 1)(\tau_{n-1} - 1) \tag{3.5}$$

Door subsitutie van vergelijking (3.3) in (3.4) bekomen we

$$\begin{aligned} at_a + b(\tau_{n+1} - \tau_3 - t_a) &= \tau_3(\tau_n - \tau_2) \\ \Leftrightarrow t_a(a-b) &= \tau_3(\tau_n - \tau_2) - b(\tau_{n+1} - \tau_3) \\ \Leftrightarrow t_a &= \frac{b(\tau_{n+1} - \tau_3) - \tau_3(\tau_n - \tau_2)}{b-a}. \end{aligned}$$

We weten dat $t_a \geq 0$, dus moet (vermits $b - a \geq 0$)

$$\begin{aligned} 0 &\leq b(\tau_{n+1} - \tau_3) - \tau_3(\tau_n - \tau_2) \\ \Leftrightarrow 0 &\leq b\left(\frac{q^{n+1} - q^3}{q-1}\right) - \frac{(q^3-1)(q^n - q^2)}{(q-1)^2} \\ \Leftrightarrow b(q^{n+1} - q^3) &\geq \frac{(q^3-1)(q^n-q^2)}{q-1} \\ \Leftrightarrow b &\geq \frac{(q^3-1)(q^n-q^2)}{(q-1)q(q^n-q^2)} \\ \Leftrightarrow b &\geq \frac{q^2+q+1}{q} \\ \Leftrightarrow b &\geq q + 1 + \frac{1}{q} \\ \Leftrightarrow b &\geq q + 2. \end{aligned}$$

Volledig analoog vinden we

$$t_b = \frac{\tau_3(\tau_n - \tau_2) - a(\tau_{n+1} - \tau_3)}{b-a},$$

waaruit volgt dat $a \leq q+1$.
Stel nu dat $t_a = 0$. Dan volgt er dat q een deler is van q^2+q+1, een strijdigheid. Bijgevolg is $t_a \neq 0$. Analoog kan ook t_b niet gelijk zijn aan 0.
Als we ab(3.3) $+ (1-a-b)$(3.4) $+$ (3.5) uitrekenen, bekomen we

$$\begin{aligned}
&0 = ab(\tau_{n+1}-\tau_3) + (1-a-b)\tau_3(\tau_n-\tau_2) + \tau_3(\tau_3-1)(\tau_{n-1}-1)\\
\Leftrightarrow\ &0 = ab(q^{n+1}-q^3) + (1-a-b)\left(\frac{q^3-1}{q-1}\right)(q^n-q^2) + (q^3-1)\left(\frac{q^3-1}{q-1}-1\right)\left(\frac{q^{n-1}-1}{q-1}-1\right)\\
\Leftrightarrow\ &0 = abq^3(q^{n-2}-1) + (1-a-b)(q^2+q+1)q^2(q^{n-2}-1) + (q^3-1)q(q+1)\left(\frac{q(q^{n-2}-1)}{q-1}\right)\\
\Leftrightarrow\ &0 = abq + (1-a-b)(q^2+q+1) + (q^2+q+1)(q+1)\\
\Leftrightarrow\ &0 = abq + (q^2+q+1)(q+2-(a+b)).
\end{aligned}$$

We vinden dat $q+2-(a+b)=0$ of dat q^2+q+1 een deler is van abq en bijgevolg van ab. Stel dat $a+b=q+2$, dan is $ab=0$ en is q^2+q+1 ook een deler van ab. Er bestaat dus in beide gevallen een geheel getal $r \geq 0$ waarvoor $ab = r(q^2+q+1)$.
We bekomen

$$\begin{aligned}
0 &= abq + (q^2+q+1)(q+2-(a+b))\\
\Leftrightarrow 0 &= rq + q + 2 - (a+b)\\
\Leftrightarrow a+b &= rq+q+2.
\end{aligned}$$

Er volgt dat a en b de oplossingen zijn van de kwadratische vergelijking

$$x^2 - (rq+q+2)x + r(q^2+q+1) = 0. \tag{3.6}$$

De discriminant D van deze vergelijking is gelijk aan

$$\begin{aligned}
D &= (rq+q+2)^2 - 4r(q^2+q+1)\\
&= r^2q^2 + (q+2)^2 + 2(q+2)rq - 4r(q^2+q+1)\\
&= r^2q^2 + q^2 + 4q + 4 + 2rq^2 + 4rq - 4rq^2 - 4rq - 4r\\
&= q^2(r^2-2r+1) + 4(q-r+1)\\
&= q^2(r-1)^2 + 4(q-r+1).
\end{aligned}$$

Vermits vergelijking (3.6) oplossingen heeft, is de discriminant ervan een kwadraat.
We weten dat $a \leq q+1$ en dat $b \leq |K| = q^2+q+1$. We vinden

$$r(q^2+q+1) = ab \leq (q+1)(q^2+q+1),$$

waaruit volgt dat $r \leq q+1$. Als de gelijkheid geldt, is de discriminant een kwadraat, want de tweede term valt weg. Veronderstel nu dat $r \leq q$. We weten dat D een kwadraat moet zijn en strikt groter is dan $(q(r-1))^2$. Bijgevolg is $D \geq (q(r-1)+1)^2$. Stel dat de gelijkheid geldt, dan is

$$\begin{aligned}
q^2(r-1)^2 + 4(q-r+1) &= q^2(q-1)^2 + 2q(r-1) + 1\\
\Leftrightarrow 4q - 4r + 4 &= 2qr - 2q + 1\\
\Leftrightarrow 6q + 3 &= 2qr + 4r\\
\Leftrightarrow r &= \frac{6q+3}{2q+4},
\end{aligned}$$

een strijdigheid, vermits r geheel is. Er volgt dat D minstens $(q(r-1)+2)^2$ is. We vinden

$$\begin{aligned} q^2(r-1)^2+4(q+1-r) &\geq q^2(r-1)^2+4q(r-1)+4 \\ \Leftrightarrow q-r &\geq qr-q \\ \Leftrightarrow -r-qr &\geq -q-q \\ \Leftrightarrow r &\leq \frac{2q}{q+1} \\ \Leftrightarrow r &\leq 2-\frac{2}{q+1} \\ \Leftrightarrow r &\leq 1 \end{aligned}$$

We vinden dus dat r gelijk is aan $0,1$ of $q+1$. We bekijken deze gevallen afzonderlijk. .

Geval 1: $r=q+1$
De discriminant van (3.6) is in dit geval gelijk aan $D=q^4$. Bijgevolg zijn de oplossingen van (3.6) gelijk aan $x=\frac{(q+1)q+q+2\pm q^2}{2}$. We bekomen $a=q+1$ en $b=q^2+q+1$. Elk hypervlak van PG(n,q) heeft dus $q+1$ of q^2+q+1 punten gemeen met K. Hieruit volgt dat K de puntenverzameling van een vlak is (zie [13], sectie 3.3.7).

Geval 2: $r=0$
Als $r=0$, volgt dat $ab=0$ en dus dat $a=0$, vermits $a\leq b$. Aangezien $a+b=rq+q+2$, weten we nu ook dat $b=q+2$. Beschouw een hypervlak Σ dat N niet bevat en K niet snijdt. Zo'n hypervlak bestaat vermits $t_a\neq 0$ en $a=0$. Het hypervlak Σ snijdt N in een deelruimte Σ_{n-4} van dimensie $n-4$. Beschouw een $(n-2)$-dimensionale deelruimte Σ_{n-2} van Σ die Σ_{n-4} bevat. We tellen het aantal punten van K in de hypervlakken die Σ_{n-2} bevatten. Het hypervlak $\langle N,\Sigma_{n-2}\rangle$ snijdt K in $q+1$ punten, vermits er $q+1$ $(n-2)$-dimensionale ruimten door N gaan in Σ. Er zijn nog q andere hypervlakken door Σ_{n-2}. Zij snijden K in 0 of $q+2$ punten. Stel dat er m hypervlakken zijn die K snijden in $q+2$ punten. Dan vinden we dat $q+1+m(q+2)=q^2+q+1$, waaruit volgt dat $m=\frac{q^2}{q+2}$. Stel dat $q=p^h$ met p priem. Als $p=2$ vinden we $m=\frac{2^{2h}}{2^h+2}=\frac{2^{2h-1}}{2^{h-1}+1}$. Als de noemer van deze breuk oneven is en verschilt van 1, verkrijgen we een strijdigheid vermits de teller even is. Er moet dus gelden dat $2^{h-1}=1$, waaruit volgt dat $h=1$. Er volgt dat $q=2$. Stel nu dat p oneven is. Dan is $m=\frac{(p^h)^2}{p^h+2}$. Bijgevolg moet $p^h+2=p^j$ voor een zekere macht $j>h$. Dit is strijdig, vermits $p\geq 3$.
Als $n=3$, beschouwen we PG$(3,2)$. In dit geval is Σ_{n-2} een rechte ℓ scheef aan het punt N. Er zijn precies drie vlakken door ℓ. Eén ervan is gelijk aan $\pi=\langle N,\ell\rangle$. Dit vlak snijdt K in $q+1=3$ punten die niet op ℓ liggen, m.a.w. in de drie punten van $\pi\setminus N$. Een ander vlak snijdt K in de $b=4$ punten die niet op ℓ liggen. Het derde en laatste vlak is scheef aan K, daar $a=0$. Bijgevolg is $K\cup\{N\}$ het complement van een vlak dat N niet bevat.
Voor het geval $n>3$ beschouwen we een deelruimte Σ_{n-2} die N snijdt in een deelruimte van dimensie $n-5$. De ruimte opgespannen door Σ_{n-2} en N is de hele ruimte, dus geen hypervlak door Σ_{n-2} bevat N. Elk van de drie hypervlakken door Σ_{n-2} snijdt K dus in $a=0$ of $b=4$ punten. Noem m het aantal punten in de doorsnede van Σ_{n-2} met K. Als $m=0$, krijgen we een contradictie vermits 4 geen deler is van $|K|=q^2+q+1=7$. Als $m\neq 0$, snijdt elk van de drie hypervlakken door Σ_{n-2} de verzameling K in $4-m$ bijkomende punten. We krijgen $m+3(4-m)=7$, waaruit volgt dat $m=\frac{5}{2}$, een strijdigheid. Dit geval kan zich dus niet voordoen.

Geval 3: $r=1$
In dit geval is $D=4q$, waaruit volgt dat $x=\frac{q+q+2\pm\sqrt{4q}}{2}=q+1\pm\sqrt{q}$. Wegens de volgende stelling, bewezen door Godsil ([12], gevolg 7.1), moet q even zijn. $\square$

Stelling 3.1.7. *Als q oneven is, is elk pseudocomplement van een t-dimensionale deelruimte N van PG(n,q) een $(n-t-1)$-dimensionale deelruimte die N niet bevat.*

3.2 Definities

Definitie 3.2.1. Stel $n = 2m$ en q even. Een **parabolische quasikwadriek** met **kern** het punt N in PG(n, q) is een verzameling K van $\frac{q^n-1}{q-1}$ punten zodanig dat elke rechte door N een uniek punt van K bevat en elk hypervlak dat N niet bevat, K snijdt in ofwel $\frac{(q^m+1)(q^{m-1}-1)}{q-1}$, ofwel $\frac{(q^m-1)(q^{m-1}+1)}{q-1}$ punten.

Opmerking 3.2.2. Een parabolische quasikwadriek met kern N is een pseudocomplement voor N.

Voorbeeld 3.2.3. Een niet-singuliere parabolische kwadriek Q in PG(n, q) met q even en kern N is een parabolische quasikwadriek vermits elk hypervlak dat N niet bevat Q snijdt in een niet-singuliere elliptische of hyperbolische kwadriek.

Definitie 3.2.4. Stel $n = 2m + 1$. Een **elliptische quasikwadriek** in PG(n, q) is een verzameling K^- van $\frac{(q^m-1)(q^{m+1}+1)}{q-1}$ punten zodat elk hypervlak de verzameling K^- snijdt in juist $\frac{q^{2m}-1}{q-1}$ of $\frac{q(q^m+1)(q^{m-1}-1)}{q-1} + 1$ punten.

Definitie 3.2.5. Stel $n = 2m+1$. Een **hyperbolische quasikwadriek** in PG(n, q) is een verzameling K^+ van $\frac{(q^m+1)(q^{m+1}-1)}{q-1}$ punten zodat elk hypervlak de verzameling K^+ snijdt in juist $\frac{q^{2m}-1}{q-1}$ of $\frac{q(q^{m-1}+1)(q^m-1)}{q-1} + 1$ punten.

Voorbeeld 3.2.6. Elliptische en hyperbolische quasikwadrieken zijn voorbeelden van twee-karakter-verzamelingen. Niet-singuliere elliptische en hyperbolische kwadrieken zijn voorbeelden van elliptische resp. hyperbolische quasikwadrieken.

3.3 Gepivotteerde verzamelingen

In deze sectie bespreken we de constructie van quasikwadrieken a.d.h.v. gepivotteerde verzamelingen. Deze techniek werd ontwikkeld door F. De Clerck et al. in [6].

Zij $Q(2m, q)$ een niet-singuliere parabolische kwadriek in PG$(2m, q)$ met q even en $m > 1$. Zij Σ_k een k-dimensionale deelruimte bevat in $Q(2m, q)$ met $k < m - 1$. De raakruimte $\Sigma_k^\perp$ heeft dan dimensie $2m - k - 1$. De doorsnede $\Sigma_k^\perp \cap Q(2m, q)$ is een kegel $\Sigma_k Q(2m - 2k - 2, q)$ met top Σ_k en basis een niet-singuliere parabolische kwadriek $Q(2m - 2k - 2, q)$ in een deelruimte $\Sigma_{2m-2k-2}$ van dimensie $2m - 2k - 2$ disjunct aan de top. Stel dat $Q(2m - 2k - 2, q)$ kern N' heeft. Zij Q' een parabolische quasikwadriek in $\Sigma_{2m-2k-2}$ met dezelfde kern N'.

Definitie 3.3.1. De verzameling $Q'' = Q(2m, q) \setminus \Sigma_k Q(2m - 2k - 2, q) \cup \Sigma_k Q'$ noemen we een **gepivotteerde verzameling** van de parabolische kwadriek $Q(2m, q)$ t.o.v. Σ_k.

Opmerking 3.3.2. De grootte van een gepivotteerde verzameling van $Q(2m, q)$ is gelijk aan de grootte van $Q(2m, q)$.

Stelling 3.3.3. *Elke gepivotteerde verzameling Q'' van $Q(2m, q)$ met q even is een parabolische quasikwadriek in* PG$(2m, q)$ *met dezelfde intersectiegetallen als die van $Q(2m, q)$.*

Bewijs. We moeten aantonen dat elk hypervlak van PG$(2m, q)$ dat de kern N van $Q(2m, q)$ niet bevat, de gepivotteerde verzameling snijdt in $|Q^-(2m - 1, q)|$ of $|Q^+(2m - 1, q)|$ punten.
Zij Σ_{2m-1} een hypervlak van PG$(2m, q)$ dat N niet bevat. Dan is dat hypervlak geen raakhypervlak en dan is de doorsnede van Σ_{2m-1} en $\Sigma_k^\perp$ een hypervlak Σ_{2m-k-2} van $\Sigma_k^\perp$. We moeten twee gevallen beschouwen.

Geval 1: $\Sigma_k \nsubseteq \Sigma_{2m-k-2}$
Er geldt dat $\Sigma_k \cap \Sigma_{2m-k-2}$ een hypervlak Σ_{k-1} van Σ_k is. Er volgt dat

$$\Sigma_{2m-k-2} \cap \Sigma_k Q(2m-2k-2,q) = \Sigma_{k-1} Q(2m-2k-2,q).$$

Op dezelfde manier volgt er dat $\Sigma_{2m-k-2} \cap \Sigma_k Q' = \Sigma_{k-1} Q'$. Aangezien $Q(2m-2k-2,q)$ en Q' dezelfde grootte hebben, volgt er dat Σ_{2m-1} de verzamelingen $Q(2m,q)$ en Q'' snijdt in eenzelfde aantal punten.

Geval 2: $\Sigma_k \subseteq \Sigma_{2m-k-2}$
De kern N van $Q(2m,q)$ is bevat in de deelruimte $\langle N', \Sigma_k \rangle$ vermits $\langle N', \Sigma_k \rangle$ een raakruimte is aan $Q(2m,q)$. Aangezien Σ_{2m-1} een hypervlak is dat N niet bevat en Σ_k wel bevat, bevat het N' niet. De deelruimte $\Sigma_{2m-2k-2}$ bevat N' wel, dus $\Sigma_{2m-k-2} \cap \Sigma_{2m-2k-2}$ is een hypervlak van $\Sigma_{2m-2k-2}$ dat N' niet bevat. Er volgt dat $\Sigma_{2m-k-2} \cap Q(2m-2k-2,q) = Q^-(2m-2k-3,q)$ of $\Sigma_{2m-k-2} \cap Q(2m-2k-2,q) = Q^+(2m-2k-3,q)$. We bekijken beide gevallen afzonderlijk.
Geval 2a: $\Sigma_{2m-k-2} \cap Q(2m,q) = \Sigma_k Q^-(2m-2k-3,q)$
Het hypervlak Σ_{2m-1} snijdt $Q(2m,q)$ in een elliptische kwadriek $Q^-(2m-1,q)$ of in een hyperbolische kwadriek $Q^+(2m-1,q)$. Het tweede geval kan zich niet voordoen, aangezien $Q^+(2m-1,q)$ geen deelverzameling bevat die isomorf is met $\Sigma_k Q^-(2m-2k-3)$(zie [14], gevolg 2 van stelling 22.8.3). De verzamelingen Q' en $Q(2m-2k-2,q)$ hebben dezelfde intersectiegetallen met betrekking tot hypervlakken van $\Sigma_{2m-2k-2}$ die de kern N' niet bevatten. Hieruit volgt

$$\begin{aligned}|\Sigma_{2m-1} \cap Q''| &= |Q^-(2m-1,q)| - |\Sigma_k Q^-(2m-2k-3,q)| + |\Sigma_k Q^-(2m-2k-3,q)| \\ &= |Q^-(2m-1,q)|\end{aligned}$$

of

$$\begin{aligned}|\Sigma_{2m-1} \cap Q''| &= |Q^-(2m-1,q)| - |\Sigma_k Q^-(2m-2k-3,q)| + |\Sigma_k Q^+(2m-2k-3,q)| \\ &= |Q^-(2m-1,q)| - \big[(q-1)\ |Q^-(2m-2k-3,q)|\ |\Sigma_k| + |\Sigma_k| + |Q^-(2m-2k-3,q)|\big] \\ &\quad + (q-1)\ |Q^+(2m-2k-3,q)|\ |\Sigma_k| + |\Sigma_k| + |Q^+(2m-2k-3,q)| \\ &= \frac{q^{2m-1}-q^m+q^{m-1}-1}{q-1} - (q-1)\left(\frac{q^{2m-2k-3}-q^{m-k-1}+q^{m-k-2}-1}{q-1}\right)\left(\frac{q^{k+1}-1}{q-1}\right) \\ &\quad - \frac{q^{2m-2k-3}-q^{m-k-1}+q^{m-k-2}-1}{q-1} + (q-1)\left(\frac{q^{2m-2k-3}+q^{m-k-1}-q^{m-k-2}-1}{q-1}\right) \\ &\quad \cdot \left(\frac{q^{k+1}-1}{q-1}\right) + \frac{q^{2m-2k-3}+q^{m-k-1}-q^{m-k-2}-1}{q-1} \\ &= \frac{1}{q-1}\Big[q^{2m-1}-q^m+q^{m-1}-1-\Big(q^{2m-k-2}-q^{2m-2k-3}-q^m+q^{m-k-1}+q^{m-1} \\ &\quad -q^{m-k-2}-q^{k+1}+1\Big) - q^{2m-2k-3}+q^{m-k-1}-q^{m-k-2}+1+q^{2m-k-2}-q^{2m-2k-3} \\ &\quad +q^m-q^{m-k-1}-q^{m-1}+q^{m-k-2}-q^{k+1}+1+q^{2m-2k-3}+q^{m-k-1}-q^{m-k-2}-1\Big] \\ &= \frac{q^{2m-1}+q^m-q^{m-1}-1}{q-1} \\ &= |Q^+(2m-1,q)|,\end{aligned}$$

wat we moesten bewijzen.
Geval 2b: $\Sigma_{2m-k-2} \cap Q(2m,q) = \Sigma_k Q^+(2m-2k-3,q)$
Net als in het vorige geval is de doorsnede van Σ_{2m-1} met $Q(2m,q)$ een niet-singuliere elliptische kwadriek $Q^-(2m-1,q)$ of een hyperbolische kwadriek $Q^+(2m-1,q)$. Het eerste geval kan zich

niet voordoen, aangezien een niet-singuliere elliptische kwadriek $Q^-(2m-1,q)$ geen deelverzameling bevat die isomorf is met $\Sigma_k Q^+(2m-2k-3)$(zie [14]). We vinden

$$\begin{aligned}|\Sigma_{2m-1} \cap Q''| &= |Q^+(2m-1,q)| - |\Sigma_k Q^+(2m-2k-3,q)| + |\Sigma_k Q^+(2m-2k-3,q)| \\ &= |Q^+(2m-1,q)|\end{aligned}$$

of

$$\begin{aligned}|\Sigma_{2m-1} \cap Q''| &= |Q^+(2m-1,q)| - |\Sigma_k Q^+(2m-2k-3,q)| + |\Sigma_k Q^-(2m-2k-3,q)| \\ &= |Q^-(2m-1,q)|.\end{aligned}$$

Deze laatste gelijkheid bekomen we door gebruik te maken van de berekening in geval 2a.
Bijgevolg is de stelling bewezen. □

Beschouw een niet-singuliere elliptische kwadriek $Q^-(2m+1,q)$ in PG$(2m+1,q)$ met $m>1$. Zij X een punt van $Q^-(2m+1,q)$. Dan is $X^\perp \cap Q^-(2m+1,q)$ een kegel $XQ^-(2m-1,q)$ met top X en basis een niet-singuliere elliptische kwadriek $Q^-(2m-1,q)$ in een $(2m-1)$-dimensionale deelruimte Σ_{2m-1} van PG$(2m+1,q)$ die X niet bevat. Zij Q' een elliptische quasikwadriek in Σ_{2m-1} met dezelfde parameters als $Q^-(2m-1,q)$.

Definitie 3.3.4. De verzameling $Q'' = Q^-(2m+1,q) \setminus XQ^-(2m-1,q) \cup XQ'$ noemen we een **gepivotteerde verzameling** van de elliptische kwadriek $Q^-(2m+1,q)$ t.o.v. X.

Opmerking 3.3.5. De grootte van een gepivotteerde verzameling van $Q^-(2m+1,q)$ is gelijk aan de grootte van $Q^-(2m+1,q)$.

Stelling 3.3.6. *Elke gepivotteerde verzameling t.o.v. een punt van $Q^-(2m+1,q)$ is een elliptische quasikwadriek in* PG$(2m+1,q)$ *met dezelfde intersectiegetallen als $Q^-(2m+1,q)$.*

Bewijs. Beschouw een hypervlak H van PG$(2m+1,q)$ verschillend van $X^\perp$. Als $X \notin H$ is $|H \cap Q''|$ gelijk aan $|Q(2m,q)|$ of $|YQ^-(2m-1,q)|$, vermits $\Sigma_{2m-1} \subseteq H$. In dit geval is de stelling bewezen. Voor het vervolg van het bewijs mogen we dus aannemen dat $X \in H$.
Vermits $X^\perp = \langle X, \Sigma_{2m-1}\rangle$, is $H \cap \Sigma_{2m-1}$ een hypervlak van Σ_{2m-1}. Bijgevolg is $H \cap Q^-(2m-1,q)$ van de vorm $ZQ^-(2m-3,q)$ of van de vorm $Q(2m-2,q)$. We bekijken beide gevallen afzonderlijk.

Geval 1: $H \cap Q^-(2m-1,q) = ZQ^-(2m-3,q)$
Een parabolische kwadriek $Q(2m,q)$ bevat geen singuliere kwadriek isomorf met $XZQ^-(2m-3,q)$ (zie [14], lemma 22.8.3). Er volgt dat $H \cap Q^-(2m+1,q)$ een kegel $AQ^-(2m-1,q)$ is. Er geldt:

$$|H \cap Q''| = |XQ^-(2m-1,q)|$$

of

$$\begin{aligned}&|H \cap Q''| \\ &\quad = |XQ^-(2m-1,q)| - |XZQ^-(2m-3,q)| + |XQ(2m-2,q)| \\ &\quad = 1 + q\ |Q^-(2m-1,q)| - \left(q + 1 + q^2\ |Q^-(2m-3,q)|\right) + 1 + q\ |Q(2m-2,q)| \\ &\quad = q\left(\frac{q^{2m-1} - q^m + q^{m-1} - 1}{q-1}\right) - q - q^2\left(\frac{q^{2m-3} - q^{m-1} + q^{m-2} - 1}{q-1}\right) + 1 + q\left(\frac{q^{2m-2} - 1}{q-1}\right) \\ &\quad = 1 - q + \frac{1}{q-1}\left(q^{2m} - q^{m+1} + q^m - q - q^{2m-1} + q^{m+1} - q^m + q^2 + q^{2m-1} - q\right) \\ &\quad = \frac{1}{q-1}\left(-q^2 + 2q - 1 + q^{2m} + q^2 - 2q\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{q^{2m}-1}{q-1}$$
$$= |Q(2m,q)|.$$

Geval 2: $H \cap Q^-(2m-1,q) = Q(2m-2,q)$
Er geldt:

$$H \cap \Big(X^\perp \cap Q^-(2m+1,q)\Big) = H \cap \big(XQ^-(2m-1,q)\big) = XQ(2m-2,q).$$

In totaal zijn er $q+1$ hypervlakken van PG$(2m+1,q)$ die de $(2m-1)$-dimensionale deelruimte $\langle XQ(2m-2,q)\rangle$ bevatten. Zij a het aantal van deze hypervlakken die $Q^-(2m+1,q)$ snijden in een parabolische kwadriek $Q(2m,q)$ en b het aantal van deze hypervlakken die $Q^-(2m+1,q)$ snijden in een kegel $YQ^-(2m-1,q)$ met top een punt en basis een elliptische kwadriek in een $(2m-1)$-dimensionale deelruimte. Dan geldt dat $a+b=q+1$. Verder moet ook gelden dat

$$|Q^-(2m+1,q)| = a\,|Q(2m,q)\backslash XQ(2m-2,q)| + b\,|YQ^-(2m-1,q)\backslash XQ(2m-2,q)| + |XQ(2m-2,q)|.$$

We berekenen eerst elke term afzonderlijk:

$$|XQ(2m-2,q)| = 1 + q\left(\frac{q^{2m-2}-1}{q-1}\right) = \frac{q-1+q^{2m-1}-q}{q-1} = \frac{q^{2m-1}-1}{q-1},$$

$$\begin{aligned}|Q(2m,q)\setminus XQ(2m-2,q)| &= \frac{q^{2m}-1}{q-1} - \left(\frac{q^{2m-1}-1}{q-1}\right)\\ &= \frac{q^{2m-1}(q-1)}{q-1}\\ &= q^{2m-1}\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}|YQ^-(2m-1,q)\setminus XQ(2m-2,q)| &= 1 + q\left(\frac{q^{2m-1}-q^m+q^{m-1}-1}{q-1}\right) - 1 - q\left(\frac{q^{2m-2}-1}{q-1}\right)\\ &= \frac{1}{q-1}\left(q^{2m}-q^{m+1}+q^m-q-q^{2m-1}+q\right)\\ &= \frac{1}{q-1}\left(q^{2m-1}(q-1)+q^m(1-q)\right)\\ &= q^{2m-1}-q^m.\end{aligned}$$

We bekomen

$$\begin{aligned}\frac{q^{2m+1}-q^{m+1}+q^m-1}{q-1} &= (q+1-b)q^{2m-1} + b\left(q^{2m-1}-q^m\right) + \frac{q^{2m-1}-1}{q-1}\\ \Leftrightarrow \frac{q^{2m+1}-q^{m+1}+q^m}{q-1} &= q^{2m}+q^{2m-1}-bq^m+\frac{q^{2m-1}}{q-1}\\ \Leftrightarrow q^{2m+1}-q^{m+1}+q^m &= q^{2m+1}-q^{2m}+q^{2m}-q^{2m-1}-bq^m(q-1)+q^{2m-1}\\ \Leftrightarrow q^m(1-q) &= -bq^m(q-1)\\ \Leftrightarrow b &= 1.\end{aligned}$$

Er is dus slechts één van die hypervlakken die $Q^-(2m+1,q)$ snijdt in een kegel $YQ^-(2m-1)$, i.e. $X^\perp$. Bijgevolg is $H \cap Q^-(2m+1,q)$ een niet-singuliere parabolische kwadriek $Q(2m,q)$. We bekomen $|H\cap Q''| = |Q(2m,q)|$ of

$$|H \cap Q''| = |Q(2m,q)| + |XZQ^-(2m-3,q)| - |XQ(2m-2,q)|$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{q^{2m}-1}{q-1} + q + 1 + q^2\left(\frac{q^{2m-3}-q^{m-1}+q^{m-2}-1}{q-1}\right) - 1 - q\left(\frac{q^{2m-2}-1}{q-1}\right)\\
&= q + \frac{1}{q-1}\left[q^{2m} - 1 + q^{2m-1} - q^{m+1} + q^m - q^2 - q^{2m-1} + q\right]\\
&= \frac{1}{q-1}\left[q^2 - q + q^{2m} - q^{m+1} + q^m - q^2 + q - 1\right]\\
&= \frac{1}{q-1}\left[q - 1 + q^{2m} - q^{m+1} + q^m - q\right]\\
&= 1 + q\left(\frac{q^{2m-1}-q^m+q^{m-1}-1}{q-1}\right)\\
&= |XQ^-(2m-1,q)|.
\end{aligned}
$$

□

We kunnen dit alles herhalen voor hyperbolische kwadrieken.

Zij $Q^+(2m+1,q)$ een niet-singuliere hyperbolische kwadriek in $\mathrm{PG}(2m+1,q)$ met $m > 1$. Zij X een punt van $Q^+(2m+1,q)$. Dan is $X^\perp \cap Q^+(2m+1,q)$ een kegel $XQ^+(2m-1,q)$ met top X en basis een niet-singuliere hyperbolische kwadriek $Q^+(2m-1,q)$ in een $(2m-1)$-dimensionale deelruimte Σ_{2m-1} van $\mathrm{PG}(2m+1,q)$ die X niet bevat. Zij Q' een hyperbolische quasikwadriek in Σ_{2m-1} met dezelfde parameters als $Q^+(2m-1,q)$.

Definitie 3.3.7. De verzameling $Q'' = Q^+(2m+1,q) \setminus XQ^+(2m-1,q) \cup XQ'$ noemen we een **gepivotteerde verzameling** van de hyperbolische kwadriek $Q^+(2m+1,q)$ t.o.v. X.

Stelling 3.3.8. *Elke gepivotteerde verzameling van een niet-singuliere hyperbolische kwadriek $Q^+(2m+1,q)$ t.o.v. een punt van de kwadriek is een hyperbolische quasikwadriek met dezelfde intersectiegetallen als $Q^+(2m+1,q)$.*

Bewijs. Het bewijs is volledig analoog aan het bewijs van corresponderende stelling voor gepivotteerde verzamelingen van elliptische kwadrieken. □

3.4 Meer quasikwadrieken in het geval $q = 2$

Voor het geval $q = 2$, kunnen we bijkomende quasikwadrieken construeren.

Stelling 3.4.1. *Zij $Q^-(2m+1,2)$ een niet-singuliere elliptische kwadriek in $\mathrm{PG}(2m+1,2)$. Zij Σ_{2m} een hypervlak van $\mathrm{PG}(2m+1,2)$ waarvoor $\Sigma_{2m} \cap Q^-(2m+1,2)$ een niet-singuliere parabolische kwadriek Q is met kern N. Zij Q' een parabolische quasikwadriek in Σ_{2m} met kern N. Dan is de verzameling $Q'' = Q^-(2m+1,2) \setminus Q \cup Q'$ een elliptische quasikwadriek in $\mathrm{PG}(2m+1,2)$.*

Bewijs. Zij Σ'_{2m} een willekeurig hypervlak van $\mathrm{PG}(2m+1,2)$. De doorsnede $\Sigma'_{2m} \cap Q^-(2m+1,2)$ is een niet-singuliere parabolische kwadriek $Q(2m,2)$ of een kegel $XQ^-(2m-1,2)$ met top een punt X en basis een niet-singuliere elliptische kwadriek, alnaargelang Σ'_{2m} al dan niet een raakhypervlak is. We moeten aantonen dat $|\Sigma'_{2m} \cap Q''| = |Q(2m,2)| = 2^{2m}-1$ of $|\Sigma'_{2m} \cap Q''| = |XQ^-(2m-1,2)| = 2^{2m} - 2^m - 1$.
Als $\Sigma'_{2m} = \Sigma_{2m}$, is $|\Sigma'_{2m} \cap Q''| = |Q(2m,2)|$ en is de stelling bewezen. We mogen dus veronderstellen dat beide hypervlakken verschillend zijn en bijgevolg een $(2m-1)$-dimensionale ruimte Σ_{2m-1} gemeen hebben. Als $N \in \Sigma_{2m-1}$, dan snijdt Σ_{2m-1} zowel Q als Q' in een gelijk aantal punten, namelijk

$2^{2m-1} - 1$, aangezien zowel Q als Q' parabolische quasikwadrieken zijn in Σ_{2m}. Hieruit volgt $|\Sigma'_{2m} \cap Q''| = |\Sigma'_{2m} \cap Q^-(2m+1,2)|$, wat een van de gezochte waarden is. We mogen er voor het vervolg van het bewijs dus van uitgaan dat $N \notin \Sigma_{2m-1}$. Dan is $\Sigma_{2m-1} \cap Q$ een niet-singuliere hyperbolische of elliptische kwadriek. We bekijken beide gevallen afzonderlijk.

Geval 1: $\Sigma_{2m-1} \cap Q = Q^+_{2m-1}$
Een kegel $XQ^-(2m-1,2)$ bevat geen niet-singuliere hyperbolische kwadriek $Q^+(2m-1,2)$. Hieruit volgt dat $\Sigma'_{2m} \cap Q^-(2m+1,2)$ een parabolische kwadriek $Q(2m,2)$ is. Aangezien Q' een parabolische quasikwadriek is, is $|\Sigma_{2m-1} \cap Q'|$ gelijk aan $|Q^+(2m-1,2)|$ of $|Q^-(2m-1,2)|$. We bekomen

$$|\Sigma'_{2m} \cap Q''| = |Q(2m,2)| - |Q^+_{2m-1}| + |Q^+(2m-1,2)| = |Q(2m,2)|$$

of

$$\begin{aligned}|\Sigma'_{2m} \cap Q''| &= |Q(2m,2)| - |Q^+_{2m-1}| + |Q^-(2m-1,2)| \\ &= 2^{2m} - 1 - \left(2^{2m-1} + 2^m - 2^{m-1} + 1\right) + 2^{2m-1} - 2^m + 2^{m-1} - 1 \\ &= 2^{2m} - 2^{m+1} + 2^m - 1 \\ &= 2^{2m} - 2^m - 1.\end{aligned}$$

Geval 2: $\Sigma_{2m-1} \cap Q = Q^-_{2m-1}$
Stel a gelijk aan het aantal hypervlakken van PG$(2m+1,2)$ door Σ_{2m-1} die een doorsnede met $Q^-(2m+1,2)$ hebben van het type $Q(2m,2)$ en b het aantal hypervlakken van PG$(2m+1,2)$ door Σ_{2m-1} die een doorsnede met $Q^-(2m+1,2)$ hebben van het type $XQ^-(2m-1,2)$. Dan geldt $a + b = q + 1 = 3$ en

$$|Q^-(2m+1,2)| = a\left(|Q(2m,2)| - |Q^-_{2m-1}|\right) + b\left(|XQ^-(2m-1,2)| - |Q^-_{2m-1}|\right) + |Q^-_{2m-1}|.$$

Als we dit uitrekenen, vinden we

$$\begin{aligned}2^{2m+1} - 2^m - 1 &= a\left(2^{2m-1} + 2^{m-1}\right) + (3-a)\left(2^{2m-1} - 2^{m-1}\right) + 2^{2m-1} - 2^{m-1} - 1 \\ \Leftrightarrow 2^{2m+1} - 2^m &= a \cdot 2^{m-1} + 4 \cdot 2^{2m-1} - 4 \cdot 2^{m-1} - a\left(-2^{m-1}\right) \\ \Leftrightarrow 2^{2m+1} - 2^m &= a \cdot 2^m + 2^{2m+1} - 2^{m+1} \\ \Leftrightarrow -2^m + 2^{m+1} &= a \cdot 2^m \\ \Leftrightarrow a &= 1.\end{aligned}$$

Er is dus een unieke parabolische kwadriek $Q(2m,2)$ waarvoor $Q^-_{2m-1} \subseteq Q(2m,2) \subseteq Q^-(2m+1,2)$, i.e. Q. Daaruit volgt dat $\Sigma'_{2m} \cap Q^-(2m+1,2)$ van het type $XQ^-(2m-1,2)$ is. Er volgt

$$|\Sigma'_{2m} \cap Q''| = |XQ^-(2m-1,2)| - |Q^-_{2m-1}| + |Q^-(2m-1,2)| = |XQ^-(2m-1,2)|$$

of

$$\begin{aligned}|\Sigma'_{2m} \cap Q''| &= |XQ^-(2m-1,2)| - |Q^-_{2m-1}| + |Q^+(2m-1,2)| \\ &= 1 + 2 \cdot |Q^-_{2m-1}| - |Q^-_{2m-1}| + |Q^+_{2m-1}| \\ &= 1 + |Q^-_{2m-1}| + |Q^+_{2m-1}| \\ &= 1 + 2^{2m-1} - 2^m + 2^{m-1} - 1 + 2^{2m-1} - 2^{m-1} + 2^m - 1 \\ &= 2^{2m} - 1.\end{aligned}$$

□

Een analoog resultaat geldt voor hyperbolische kwadrieken.

Stelling 3.4.2. *Zij $Q^+(2m+1,2)$ een niet-singuliere hyperbolische kwadriek in* PG$(2m+1,2)$. *Beschouw een hypervlak Σ_{2m} van* PG$(2m+1,2)$ *waarvoor $\Sigma_{2m} \cap Q^+(2m+1,2)$ een niet-singuliere parabolische kwadriek Q is met kern N. Zij Q' een parabolische quasikwadriek in Σ_{2m} met kern N. Dan is de verzameling $Q'' = Q^+(2m+1,2) \setminus Q \cup Q'$ een hyperbolische quasikwadriek in* PG$(2m+1,2)$.

Stelling 3.4.3. *Zij $Q^+(2m+1,2)$ een niet-singuliere hyperbolische kwadriek in* PG$(2m+1,2)$. *Zij Σ_{2m} een hypervlak van* PG$(2m+1,2)$ *dat $Q^+(2m+1,2)$ snijdt in een niet-singuliere parabolische kwadriek Q met kern N. Beschouw een generator Σ_{m-1} van Q. Dan is de verzameling*

$$Q'' = \big(Q^+(2m+1,2) \setminus Q\big) \cup (\Sigma_{2m} \setminus (Q \cup \langle N, \Sigma_{m-1} \rangle)) \cup \Sigma_{m-1}$$

een hyperbolische quasikwadriek van PG$(2m+1,2)$.

Bewijs. Elk hypervlak van PG$(2m+1,2)$ snijdt $Q^+(2m+1,2)$ in $|Q(2m,2)| = 2^{2m}-1$ of in $|XQ^+(2m-1,2)| = 2^{2m}+2^m+1$ punten. We berekenen

$$\begin{aligned}
|\Sigma_{2m} \cap Q''| &= |\Sigma_{2m}| - |Q| - |\langle N, \Sigma_{m-1} \rangle| + 2 \cdot |\Sigma_{m-1}| \\
&= 2^{2m+1} - 1 - \big(2^{2m}-1\big) - \big(2^{m+1}-1\big) + 2\,(2^m - 1) \\
&= 2^{2m+1} - 2^{2m} - 1 \\
&= 2^{2m} - 1
\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
|Q''| &= |Q^+(2m+1,2)| - |Q| + |\Sigma_{2m} \cap Q''| \\
&= 2^{2m+1} + 2^m - 1 - \big(2^{2m}-1\big) + 2^{2m} - 1 \\
&= 2^{2m+1} + 2^m - 1.
\end{aligned}$$

Beschouw een hypervlak H van PG$(2m+1,2)$ verschillend van Σ_{2m}. Stel $H \cap \Sigma_{2m} = \Sigma_{2m-1}$.

Geval 1: $N \in \Sigma_{2m-1}$
Dan is $\Sigma_{2m-1} \cap Q$ een kegel $XQ(2m-2,2)$ met top een punt X en basis een niet-singuliere parabolische kwadriek $Q(2m-2,2)$.
Geval 1a: $\Sigma_{m-1} \subseteq \Sigma_{2m-1}$
De ruimte $\langle N, \Sigma_{m-1} \rangle$ is een m-dimensionale deelruimte van Σ_{2m-1} en bevat $2^{m+1}-1$ punten. We weten dat

$$\begin{aligned}
|XQ(2m-2,2) \setminus \Sigma_{m-1}| &= 1 + 2\left(2^{2m-2}-1\right) - (2^m - 1) \\
&= 2^{2m-1} - 2^m.
\end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned}
|\Sigma_{2m-1} \cap Q''| &= |\Sigma_{2m-1}| - |\langle N, \Sigma_{m-1} \rangle| - |XQ(2m-2,2) \setminus \Sigma_{m-1}| + |\Sigma_{m-1}| \\
&= 2^{2m} - 1 - \big(2^{m+1}-1\big) - \big(2^{2m-1} - 2^m\big) + 2^m - 1 \\
&= 2^{2m-1} - 1 \\
&= |XQ(2m-2,2)|.
\end{aligned}$$

Aangezien $\Sigma_{2m-1} \cap Q^+(2m+1,2) = XQ(2m-2,2)$, volgt er dat $|H \cap Q''| = |H \cap Q^+(2m+1,2)|$, wat een van de gezochte waarden is.
Geval 1b: $\Sigma_{m-1} \nsubseteq \Sigma_{2m-1}$
In dit geval is $\langle N, \Sigma_{m-1} \rangle \cap \Sigma_{2m-1}$ een $(m-1)$-dimensionale deelruimte van Σ_{2m-1} die $2^m - 1$ punten

bevat. Verder is $\Sigma_{m-1} \cap \Sigma_{2m-1}$ een deelruimte Σ_{m-2} van dimensie $m-2$ die $2^{m-1}-1$ punten bevat. Er volgt

$$\begin{aligned}|\Sigma_{2m-1} \cap Q''| &= |\Sigma_{2m-1}| - |\langle N, \Sigma_{m-1}\rangle \cap \Sigma_{2m-1}| - |XQ(2m-2,2) \setminus \Sigma_{m-2}| + |\Sigma_{m-2}| \\ &= 2^{2m} - 1 - (2^m - 1) - \left(2^{2m-1} - 2^{m-1}\right) + 2^{m-1} - 1 \\ &= 2^{2m-1} - 1 \\ &= |XQ(2m-2,2)|.\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $|H \cap Q''| = |H \cap Q^+(2m+1,2)|$, een van de gezochte waarden.

Geval 2: $N \notin \Sigma_{2m-1}$
In dit geval is Σ_{2m-1} geen raakhypervlak van Q. Bijgevolg is de doorsnede van beide verzamelingen een niet-singuliere hyperbolische of elliptische kwadriek.
Geval 2a: $\Sigma_{2m-1} \cap Q = Q^+(2m-1,2)$
Veronderstel eerst dat $\Sigma_{m-1} \subseteq \Sigma_{2m-1}$. Dan is

$$\begin{aligned}|\Sigma_{2m-1} \cap Q''| &= |\Sigma_{2m-1}| - |\Sigma_{2m-1} \cap Q| + |\Sigma_{m-1}| \\ &= 2^{2m} - 1 - \left(2^{2m-1} + 2^{m-1} - 1\right) + 2^m - 1 \\ &= 2^{2m-1} + 2^{m-1} - 1 \\ &= |Q^+(2m-1,2)|,\end{aligned}$$

waaruit volgt dat $|H \cap Q''| = |H \cap Q^+(2m+1,2)|$.
Veronderstel nu dat $\Sigma_{m-1} \nsubseteq \Sigma_{2m-1}$. Dan is $\langle N, \Sigma_{m-1}\rangle \cap \Sigma_{2m-1}$ een $(m-1)$-dimensionale deelruimte van Σ_{2m-1}. Verder is $\Sigma_{m-1} \cap \Sigma_{2m-1}$ een $(m-2)$-dimensionale deelruimte Σ_{m-2}. Er geldt ook

$$\begin{aligned}|(\Sigma_{2m-1} \cap Q) \setminus \Sigma_{m-1}| &= |Q^+(2m-1,2)| - |\Sigma_{m-2}| \\ &= 2^{2m-1} + 2^{m-1} - 1 - 2^{m-1} + 1 \\ &= 2^{2m-1}.\end{aligned}$$

We bekomen

$$\begin{aligned}|\Sigma_{2m-1} \cap Q''| &= |\Sigma_{2m-1}| - |\langle N, \Sigma_{m-1}\rangle \cap \Sigma_{2m-1}| - |(\Sigma_{2m-1} \cap Q) \setminus \Sigma_{m-1}| + |\Sigma_{m-2}| \\ &= 2^{2m} - 1 - (2^m - 1) - 2^{2m-1} + 2^{m-1} - 1 \\ &= 2^{2m-1} - 2^{m-1} - 1.\end{aligned}$$

In Σ_{2m-1} wordt een verzameling van grootte $2^{2m-1} + 2^{m-1} - 1$ vervangen door een verzameling van grootte $2^{2m-1} - 2^{m-1} - 1$. Net zoals in het bewijs van stelling 3.4.1 (geval 2) volgt er dat $H \cap Q^+(2m+1,2)$ van het type $XQ^+(2m-1,2)$ is. We vinden

$$\begin{aligned}|H \cap Q''| &= |XQ^+(2m-1,2)| - \left(2^{2m-1} + 2^{m-1} - 1\right) + \left(2^{2m-1} - 2^{m-1} - 1\right) \\ &= 2^{2m} + 2^m - 1 - 2^{2m-1} - 2^{m-1} + 1 + 2^{2m-1} - 2^{m-1} - 1 \\ &= 2^{2m} - 1 \\ &= |Q(2m,2)|.\end{aligned}$$

Geval 2b: $\Sigma_{2m-1} \cap Q = Q^-(2m-1,2)$
De generatoren van $Q^-(2m-1,2)$ hebben dimensie $m-2$. Bijgevolg kan de ruimte Σ_{m-1} niet bevat zijn in H. Een kegel $XQ^+(2m-1,2)$ bevat geen deelverzameling isomorf met $Q^-(2m-1,2)$. Bijgevolg is $H \cap Q^+(2m+1,2)$ een niet-singuliere parabolische kwadriek $Q(2m,2)$. Met behulp van analoge redeneringen als in de vorige gevallen, bekomen we

$$|H \cap Q''| = 2^{2m} + 2^m - 1 = |XQ^+(2m-1,2)|.$$

□

Een analoog resultaat geldt als we vertrekken van een niet-singuliere elliptische kwadriek.

Stelling 3.4.4. *Zij* $Q^-(2m+1,2)$ *een niet-singuliere elliptische kwadriek in* PG$(2m+1,2)$. *Zij* Σ_{2m} *een hypervlak van* PG$(2m+1,2)$ *dat* $Q^-(2m+1,2)$ *snijdt in een niet-singuliere parabolische kwadriek* Q *met kern* N. *Beschouw een generator* Σ_{m-1} *van* Q. *Dan is de verzameling*

$$Q'' = \big(Q^-(2m+1,2) \setminus Q\big) \cup (\Sigma_{2m} \setminus (Q \cup \langle N, \Sigma_{m-1} \rangle)) \cup \Sigma_{m-1}$$

een elliptische quasikwadriek van PG$(2m+1,2)$.

Hoofdstuk 4

Quasi-Hermitische variëteiten

In het vorige hoofdstuk werden quasikwadrieken ingevoerd. S. De Winter en J. Schillewaert vroegen zich af of ze deze theorie konden uitbreiden naar Hermitische variëteiten. In 2010 hebben ze hun artikel hierover gepubliceerd, zie [8]. Ze hebben quasi-Hermitische variëteiten gedefinieerd en geconstrueerd, o.a. via gepivotteerde verzamelingen van niet-singuliere Hermitische variëteiten. Verder in dit hoofdstuk bespreken we een recente constructie van nieuwe quasi-Hermitische variëteiten, ontdekt door F. Pavese [16].

4.1 Definitie

Definitie 4.1.1. Een puntenverzameling H van PG(n, q^2) met $|H| = \frac{q^{2n+1}+(-1)^{n+1}q^{n+1}+(-1)^n q^n-1}{q^2-1}$ is een **quasi-Hermitische variëteit** van PG(n, q^2) als de grootte van de doorsnede van een hypervlak van PG(n, q^2) met H gelijk is aan

$$|H(n-1, q^2)| = \frac{q^{2n-1} + (-1)^n q^n + (-1)^{n-1} q^{n-1} - 1}{q^2 - 1}$$

of

$$\begin{aligned}
|pH(n-2, q^2)| &= 1 + q^2 \; |H(n-2, q^2)| \\
&= 1 + q^2 \left(\frac{q^{2n-3} + (-1)^{n-1} q^{n-1} + (-1)^{n-2} q^{n-2} - 1}{q^2 - 1} \right) \\
&= \frac{q^{2n-1} + (-1)^{n-1} q^{n+1} + (-1)^{n-2} q^n - 1}{q^2 - 1}.
\end{aligned}$$

4.2 Gepivotteerde verzamelingen

Net zoals bij kwadrieken kunnen we gepivotteerde verzamelingen van Hermitische variëteiten definiëren.

Zij $H(n, q^2)$ een niet-singuliere Hermitische variëteit in PG(n, q^2). Beschouw een punt $p \in H(n, q^2)$. Dan is $p^\perp \cap H(n, q^2)$ een kegel met top p en basis een niet-singuliere Hermitische variëteit $H(n-2, q^2)$ gelegen in een $(n-2)$-dimensionale ruimte Σ die p niet bevat. Zij H' een quasi-Hermitische variëteit in Σ.

Definitie 4.2.1. De verzameling $H'' = H(n, q^2) \setminus pH(n-2, q^2) \cup pH'$ is een **gepivotteerde verzameling** van de Hermitische variëteit $H(n, q^2)$ t.o.v. het punt p.

Stelling 4.2.2. *Elke gepivotteerde verzameling H'' van een Hermitische variëteit $H(n, q^2)$ t.o.v. een punt $p \in H(n, q^2)$ is een quasi-Hermitische variëteit van* $\mathsf{PG}(n, q^2)$.

Bewijs. We moeten bewijzen dat elk hypervlak α van $\mathsf{PG}(n, q^2)$ de gepivotteerde verzameling snijdt in een toegelaten aantal punten. We hebben enkel punten gewijzigd in het raakhypervlak $p^\perp$ door p, dus we moeten enkel kijken naar de doorsnede van α met $p^\perp$.
Als $\alpha = p^\perp$ heeft α hetzelfde aantal snijpunten met H'' als met $H(n, q^2)$ en is de stelling bewezen. We mogen dus veronderstellen dat $\alpha \cap p^\perp$ een $(n-2)$-dimensionale ruimte Σ_{n-2} is. We beschouwen twee gevallen:
Geval 1: $p \in \alpha$
Stel eerst dat $|\alpha \cap H(n-2, q^2)| = |\alpha \cap H'|$. Dan is $|\alpha \cap H''| = |\alpha \cap H(n, q^2)|$ en is de stelling bewezen.
Stel nu dat $|\alpha \cap H(n-2, q^2)| \neq |\alpha \cap H'|$. In dit geval is het verschil tussen $|\alpha \cap H(n-2, q^2)|$ en $|\alpha \cap H'|$ gelijk aan

$$\begin{aligned} |H(n-3, q^2)| - |pH(n-4, q^2)| &= \frac{q^{2n-5} + (-1)^{n-2}q^{n-2} + (-1)^{n-3}q^{n-3} - 1}{q^2-1} \\ &\quad - \frac{q^{2n-5} + (-1)^{n-3}q^{n-1} + (-1)^{n-4}q^{n-2} - 1}{q^2-1} \\ &= (-1)^{n-3}\left(\frac{q^{n-3} - q^{n-1}}{q^2-1}\right) \\ &= (-1)^{n-2}q^{n-3} \\ &= (-1)^n q^{n-3}. \end{aligned}$$

Het totale verschil tussen $|\alpha \cap H(n, q^2)|$ en $|\alpha \cap H''|$ is gelijk aan $q^2(-1)^n q^{n-3} = (-1)^n q^{n-1}$, vermits er q^2+1 punten liggen op een rechte. Aangezien

$$(-1)^n q^{n-1} = |H(n-1, q^2)| - |pH(n-2, q^2)|$$

vinden we een geldig intersectiegetal: $|\alpha \cap H(n, q^2)|$ is gelijk aan $|H(n-1, q^2)|$ of $|pH(n-2, q^2)|$, waardoor $|\alpha \cap H''|$ gelijk is aan $|pH(n-2, q^2)|$, resp. $|H(n-1, q^2)|$.
Geval 2: $p \notin \alpha$
In dit geval is $\Sigma \subseteq \alpha$. Er geldt dat $|\alpha \cap p^\perp| = |H(n-2, q^2)| = |H'|$. Bijgevolg blijft het aantal intersectiepunten ongewijzigd. □

4.3 Andere constructies van quasi-Hermitische variëteiten

We beginnen deze sectie met het bespreken van een aantal constructies van quasi-Hermitische variëteiten die onderzocht werden door S. De Winter en J. Schillewaert in [8].

Stelling 4.3.1. *Beschouw een $(n-1)$-dimensionale deelruimte Π op $H(2n+1, q^2)$ en de $q+1$ generatoren G_i $(1 \leq i \leq q+1)$ van $H(2n+1, q^2)$ door Π. Beschouw $q+1$ ruimten Π_i $(1 \leq i \leq q+1)$ door Π in $\Pi^\perp$ waarvoor $\Pi_i \cap H(2n+1, q^2) = \Pi$. Stel*

$$H' = \left(H(2n+1, q^2) \setminus \cup_i G_i\right) \cup \left(\cup_i \Pi_i\right).$$

Dan is H' een quasi-Hermitische variëteit in $\mathsf{PG}(2n+1, q^2)$.

Bewijs. Dat $|H'| = |H(2n+1, q^2)|$ volgt onmiddellijk.
Net zoals in het bewijs van stelling 4.2.2 hoeven we enkel de doorsnede van hypervlakken α van PG$(2n+1, q^2)$ met $\Pi^\perp$ te beschouwen, aangezien we enkel daar punten veranderd hebben. Veronderstel eerst dat $\Pi^\perp \subseteq \alpha$. Dan is $|\alpha \cap H'| = |\alpha \cap H(2n+1, q^2)|$ en is het gestelde bewezen. Vermits $\dim(\Pi^\perp) = 2n+1-(n-1)-1 = n+1$ mogen we aannemen dat $\alpha \cap \Pi^\perp$ een n-dimensionale deelruimte is. We onderscheiden vier gevallen:
Geval 1: $\alpha \cap \Pi^\perp = G_i$ voor een zekere $1 \leq i \leq q+1$
Stel dat α geen raakhypervlak is, dan snijdt α de Hermitische variëteit in een niet-singuliere Hermitische variëteit in dimensie $2n$. Dit is echter strijdig, vermits de dimensie van een generator van $H(2n, q^2)$ gelijk is aan $n-1$ en $\alpha \cap H(2n+1, q^2)$ een n-dimensionale ruimte bevat. Er volgt dat α een raakhypervlak is aan $H(2n+1, q^2)$. We vinden

$$\begin{aligned}|\alpha \cap H'| &= |pH(2n-1, q^2)| - |G_i \setminus \Pi| \\ &= \frac{q^{4n+1} + (-1)^{2n} q^{2n+2} + (-1)^{2n-1} q^{2n+1} - 1}{q^2-1} - \frac{q^{2n+2} - q^{2n}}{q^2-1} \\ &= \frac{q^{4n+1} - q^{2n+1} + q^{2n} - 1}{q^2-1} \\ &= |H(2n, q^2)|,\end{aligned}$$

wat een van de gezochte waarden is.
Geval 2: $\alpha \cap \Pi^\perp = \Pi_i$ voor een zekere $1 \leq i \leq q+1$
Stel dat α een raakhypervlak is. Als $\alpha = X^\perp$ met $X \in \Pi$, dan zou $G_i \subseteq \alpha$, maar dit is niet het geval. Dan is α een raakhypervlak in een punt van $\Pi^\perp \setminus \Pi = \Pi_i \setminus \Pi$. Dit is ook een strijdigheid, vermits $(\Pi_i \setminus \Pi) \cap H = \emptyset$. Hieruit volgt dat α geen raakhypervlak kan zijn. We bekomen, gebruikmakend van de berekening in geval 1,

$$|\alpha \cap H'| = |\Pi_i \setminus \Pi| + |H(2n, q^2)| = |pH(2n-1, q^2)|,$$

wat een van de gezochte waarden is.
Geval 3: $\alpha \cap \Pi^\perp$ is een n-dimensionale ruimte die Π bevat, maar verschilt van de ruimten G_i en Π_j, voor alle $1 \leq i, j \leq q+1$. In dit geval is $|\alpha \cap H'| = |\alpha \cap H(2n+1, q^2)|$ en volgt het gestelde onmiddellijk.
Geval 4: $\alpha \cap \Pi$ is een $(n-2)$-dimensionale ruimte Σ
Dan snijdt α elk van de ruimten G_i in een $(n-1)$-dimensionale ruimte P_i met $P_i \cap \Pi = \Sigma$. Stel $\Pi_j \cap \alpha = P_{q+1+j}$ met $1 \leq j \leq q+1$. Dan hebben we de punten in $\left(\bigcup_{j=1}^{q+1} P_j\right) \setminus \Sigma$ vervangen door de punten in $\left(\bigcup_{j=q+2}^{2(q+1)} P_j\right) \setminus \Sigma$. Dit levert een geldige waarde op voor $|\alpha \cap H'|$. □

Opmerking 4.3.2. In de opgave van de vorige stelling kiezen we $q+1$ ruimten Π_i $(1 \leq i \leq q+1)$ door Π in $\Pi^\perp$ waarvoor $\Pi_i \cap H(2n+1, q^2) = \Pi$. We kunnen deze ruimten Π_i inderdaad zo kiezen. Stel namelijk dat Σ een n-dimensionale ruimte is door Π en verschillend is van G_i voor $1 \leq i \leq q+1$. Stel dat $\Sigma \cap H(2n+1, q^2)$ nog een punt p bevat met $p \notin \Pi$. Dan kan de ruimte $\langle p, \pi \rangle$ niet bevat zijn in $H(2n+1, q^2)$ vermits $\langle p, \pi \rangle$ dan een generator G_i zou zijn van $H(2n+1, q^2)$ en we hebben gezegd dat dit niet het geval is. We weten dat zowel p als Π bevat zijn in de raakruimte $\Pi^\perp$. Hieruit volgt dat de rechten pq met $q \in \Pi$ volledig bevat zijn in de Hermitische variëteit en bijgevolg $\langle p, \pi \rangle \subseteq H(2n+1, q^2)$, maar we hebben juist beargumenteerd dat dit niet het geval kan zijn.

Stelling 4.3.3. *Zij $H' = H(2n+1, q^2) \setminus G$ met G een generator van $H(2n+1, q^2)$. Dan is het complement H'' van H' in* PG$(2n+1, q^2)$ *een quasi-Hermitische variëteit van* PG$(2n+1, q^2)$ *als en slechts als $q = 2$.*

Bewijs. Zij α een hypervlak van PG$(2n+1,q^2)$. Dan onderscheiden we de volgende mogelijkheden:

α	raakhypervlak	geen raakhypervlak
$\supseteq G$	geval 1	geval 2
$\not\supseteq G$	geval 3	geval 4

Geval 2 kan zich echter niet voordoen: als α geen raakhypervlak is, is $\alpha \cap H(2n+1,q^2) = H(2n,q^2)$ en een niet-singuliere Hermitische variëteit in PG$(2n,q^2)$ bevat geen n-dimensionale deelruimten.
In geval 1 bekomen we

$$\begin{aligned}|\alpha \cap H'| &= |pH(2n-1,q^2)| - |G| \\ &= \frac{q^{4n+1}+q^{2n+2}-q^{2n+1}-1}{q^2-1} - \frac{(q^2)^{n+1}-1}{q^2-1} \\ &= \frac{q^{4n+1}-q^{2n+1}}{q^2-1} \\ &= h_1.\end{aligned}$$

In geval 3 vinden we

$$\begin{aligned}|\alpha \cap H'| &= |pH(2n-1,q^2)| - |\,\mathsf{PG}(n-1,q^2)| \\ &= \frac{q^{4n+1}+q^{2n+2}-q^{2n+1}-q^{2n}}{q^2-1} \\ &= h_2.\end{aligned}$$

In geval 4 tenslotte bekomen we

$$\begin{aligned}|\alpha \cap H'| &= |H(2n,q^2)| - |\,\mathsf{PG}(n-1,q^2)| \\ &= \frac{q^{4n+1}-q^{2n+1}+q^{2n}-1}{q^2-1} - \frac{q^{2n}-1}{q^2-1} \\ &= \frac{q^{4n+1}-q^{2n+1}}{q^2-1} \\ &= h_1.\end{aligned}$$

Bijgevolg is H' een twee-karakterverzameling met karakters h_1 en h_2.
Zij Σ een hypervlak van PG$(2n+1,q^2)$. Dan is $|\Sigma| = \frac{q^{4n+2}-1}{q^2-1}$. We vinden

$$|\Sigma \cap H''| = |\Sigma| - h_1 = \frac{q^{4n+2}-q^{4n+1}+q^{2n+1}-1}{q^2-1} = h_1'$$

of

$$|\Sigma \cap H''| = |\Sigma| - h_2 = \frac{q^{4n+2}-q^{4n+1}-q^{2n+2}+q^{2n+1}+q^{2n}-1}{q^2-1} = h_2'.$$

Als de verzameling H'' een quasi-Hermitische variëteit is, moet

$$\{h_1', h_2'\} = \left\{\frac{q^{4n+1}-q^{2n+1}+q^{2n}-1}{q^2-1}, \frac{q^{4n+1}+q^{2n+2}-q^{2n+1}-1}{q^2-1}\right\}.$$

Dit is het geval als en slechts als

$$\begin{cases} h_1' = \frac{q^{4n+1}-q^{2n+1}+q^{2n}-1}{q^2-1}, \\ h_2' = \frac{q^{4n+1}+q^{2n+2}-q^{2n+1}-1}{q^2-1} \end{cases} \quad \text{of} \quad \begin{cases} h_1' = \frac{q^{4n+1}+q^{2n+2}-q^{2n+1}-1}{q^2-1}, \\ h_2' = \frac{q^{4n+1}-q^{2n+1}+q^{2n}-1}{q^2-1}. \end{cases}$$

Laten we het tweede van bovenstaande stelsels beschouwen. We vinden

$$\begin{aligned}
h_1' &= \frac{q^{4n+1} + q^{2n+2} - q^{2n+1} - 1}{q^2 - 1} \\
&\Leftrightarrow q^{4n+2} - q^{4n+1} + q^{2n+1} = q^{4n+1} + q^{2n+2} - q^{2n+1} \\
&\Leftrightarrow q^{4n+1}(q-2) + q^{2n+1}(2-q) = 0 \\
&\Leftrightarrow q = 2
\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
h_2' &= \frac{q^{4n+1} - q^{2n+1} + q^{2n} - 1}{q^2 - 1} \\
&\Leftrightarrow q^{4n+2} - q^{4n+1} - q^{2n+2} + q^{2n+1} = q^{4n+1} - q^{2n+1} \\
&\Leftrightarrow q^{4n+1}(q-2) + q^{2n+1}(2-q) = 0 \\
&\Leftrightarrow q = 2.
\end{aligned}$$

Via analoge berekeningen kunnen we uit het eerste stelsel enkel strijdigheden afleiden. Dat geval kan zich dus niet voordoen.
We controleren voor $q = 2$ dat

$$\begin{aligned}
|H''| &= |\,\mathsf{PG}(2n+1,4)| - |H(2n+1,4)| + |G| \\
&= \frac{4^{2n+2}-1}{4-1} - \left(\frac{2^{4n+3} + 2^{2n+2} - 2^{2n+1} - 1}{4-1}\right) + \frac{4^{n+1}-1}{4-1} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \left(2^{4n+4} - 1 - 2^{4n+3} - 2^{2n+2} + 2^{2n+1} + 1 + 2^{2n+2} - 1\right) \\
&= \frac{2^{4n+3} + 2^{2n+1} - 1}{3} \\
&= |H(2n+1,4)|.
\end{aligned}$$

De stelling is nu volledig bewezen. □

In het vervolg van deze sectie bespreken we een constructie van quasi-Hermitische variëteiten van F. Pavese uit 2015, zie [16]. Daarin wordt ook bewezen dat deze constructie andere quasi-Hermitische variëteiten van PG$(2n+1, q^2)$, q oneven, oplevert dan diegene die S. De Winter en J. Schillewaert bekomen zijn m.b.v. gepivotteerde verzamelingen.

Definitie 4.3.4. Een m-**cover** van een veralgemeende vierhoek $\mathcal{Q}$ is een verzameling $\mathcal{L}$ van rechten van $\mathcal{Q}$ zodat elk punt van $\mathcal{Q}$ op juist m rechten van $\mathcal{L}$ ligt.

Beschouw de projectieve ruimte PG$(2n+1, q^2)$ met $n \geq 1$. Beschouw daarin een Baer deelruimte Σ isomorf met PG$(2n+1, q)$. Beschouw een niet-singuliere kwadriek $\mathcal{Q}$ in Σ. Zij $\mathcal{L}$ de verzameling rechten in Σ. Zij $\mathcal{G}$ de verzameling rechten van Σ die bevat zijn in $\mathcal{Q}$ en $\mathcal{T}$ de verzameling rechten van Σ die juist één punt met $\mathcal{Q}$ gemeen hebben. Elke rechte $\ell \in \mathcal{L}$ bepaalt een unieke rechte $\bar{\ell}$ van PG$(2n+1, q^2)$, de uitgebreide rechte. Elk punt van PG$(2n+1, q^2) \setminus \Sigma$ ligt op een unieke uitgebreide rechte van Σ. Zij $\mathcal{H}$ de verzameling punten van PG$(2n+1, q^2)$ die liggen op de uitgebreide rechten van $\mathcal{G} \cup \mathcal{T}$.

Stelling 4.3.5. *De verzameling $\mathcal{H}$ is een quasi-Hermitische variëteit van* PG$(2n+1, q^2)$.

Bewijs. We bepalen $|\mathcal{G}|$ met behulp van een dubbele telling van het aantal koppels van de vorm (ℓ, g) met ℓ een rechte op $\mathcal{Q}$ en g een generator van $\mathcal{Q}$ die ℓ bevat. Er geldt

$$|\mathcal{G}| = \frac{(\#\text{ generatoren})\cdot(\#\text{ rechten in een generator})}{\#\text{ generatoren door een rechte}}.$$

Om $|\mathcal{T}|$ te bepalen, berekenen we

$$|\mathcal{T}| = |\mathcal{Q}|\cdot\Big(\#\text{ rechten door een punt } P \text{ van } \mathcal{Q} \text{ in } P^{\perp}\Big) - |\mathcal{G}|\cdot(q+1),$$

waarbij $\perp$ de orthogonale polariteit is die $\mathcal{Q}$ bepaalt.
Veronderstel eerst dat $\mathcal{Q}$ een hyperbolische kwadriek $Q^+(2n+1,q)$ is. Het aantal rechten in een generator en het aantal generatoren volgen uit stellingen 1.3.26 en 1.3.27. Zij ℓ een rechte op $\mathcal{Q}$. Dan is de doorsnede van $\ell^{\perp}$ met $\mathcal{Q}$ een kegel met top ℓ en basis een niet-singuliere hyperbolische kwadriek $Q^+(2n-3,q)$. Het aantal generatoren door ℓ in $\mathcal{Q}$ is gelijk aan het aantal generatoren van $Q^+(2n-3,q)$. Er volgt

$$\begin{aligned}|\mathcal{G}| &= \frac{2(q+1)(q^2+1)\cdots(q^{n-2}+1)(q^{n-1}+1)(q^n+1)\cdot\frac{(q^{n+1}-1)(q^n-1)}{(q^2-1)(q-1)}}{2(q+1)(q^2+1)\cdots(q^{n-2}+1)}\\ &= \frac{(q^{2n}-1)(q^{n-1}+1)(q^{n+1}-1)}{(q^2-1)(q-1)}.\end{aligned}$$

We kunnen nu ook $\mathcal{T}$ bepalen:

$$\begin{aligned}|\mathcal{T}| &= \frac{(q^n+1)(q^{n+1}-1)}{q-1}\cdot\left(\frac{q^{2n}-1}{q-1}\right) - \frac{(q^{2n}-1)(q^{n-1}+1)(q^{n+1}-1)}{(q^2-1)(q-1)}\cdot(q+1)\\ &= \frac{q^{2n}-1}{(q-1)^2}\cdot\big(q^{2n+1}-q^n+q^{n+1}-1-q^{2n}+q^{n-1}-q^{n+1}+1\big)\\ &= \frac{q^{2n}-1}{(q-1)^2}\cdot\big(q^{2n}(q-1)-q^{n-1}(q-1)\big)\\ &= \frac{(q^{2n}-1)q^{n-1}(q^{n+1}-1)}{q-1}.\end{aligned}$$

Aangezien $\mathcal{G}$ en $\mathcal{T}$ disjunct zijn, is

$$\begin{aligned}|\mathcal{G}\cup\mathcal{T}| &= |\mathcal{G}|+|\mathcal{T}|\\ &= \frac{(q^{2n}-1)(q^{n+1}-1)}{q-1}\cdot\left(\frac{q^{n-1}+1}{q^2-1}+q^{n-1}\right)\\ &= \frac{(q^{2n}-1)(q^{n+1}-1)}{q-1}\cdot\left(\frac{q^{n-1}+1+q^{n+1}-q^{n-1}}{q^2-1}\right)\\ &= \frac{(q^{2n}-1)(q^{2n+2}-1)}{(q-1)(q^2-1)}.\end{aligned}$$

Veronderstel nu dat $\mathcal{Q}$ een elliptische kwadriek $Q^-(2n+1,q)$ is. Dan kunnen we deze redenering herhalen. We bekomen uiteindelijk

$$\begin{aligned}|\mathcal{G}| &= \frac{(q^{2n}-1)(q^{n-1}-1)(q^{n+1}+1)}{(q^2-1)(q-1)},\\ |\mathcal{T}| &= \frac{(q^{2n}-1)q^{n-1}(q^{n+1}+1)}{q-1},\end{aligned}$$

$$|\,\mathcal{G} \cup \mathcal{T}\,| = \frac{(q^{2n}-1)(q^{2n+2}-1)}{(q-1)(q^2-1)}.$$

Merk op dat we voor $|\,\mathcal{G} \cup \mathcal{T}\,|$ dezelfde waarde vinden als in het hyperbolisch geval.

Beschouw een punt $P \in \mathcal{Q}$. Dan zijn de rechten in $\mathcal{G} \cup \mathcal{T}$ die P bevatten de rechten door P in het raakhypervlak $P^{\perp}$. Dit zijn er $\frac{q^{2n}-1}{q-1}$. Beschouw nu een punt $P \in \Sigma \setminus \mathcal{Q}$. Dan is de doorsnede van $P^{\perp}$ met $\mathcal{Q}$ een niet-singuliere parabolische kwadriek $Q(2n,q)$. Elk van de $\frac{q^{2n}-1}{q-1}$ punten van $Q(2n,q)$ vormt een raaklijn met P. We hebben aangetoond dat de verzameling $\mathcal{G} \cup \mathcal{T}$ een $\left(\frac{q^{2n}-1}{q-1}\right)$-cover is van Σ. In het bijzonder volgt hieruit dat $\Sigma \subseteq \mathcal{H}$. We kunnen nu $|\,\mathcal{H}\,|$ berekenen:

$$\begin{aligned}
|\,\mathcal{H}\,| &= (q^2-q)\cdot|\,\mathcal{G}\cup\mathcal{T}\,| + |\Sigma| \\
&= (q^2-q)\cdot\frac{(q^{2n}-1)(q^{2n+2}-1)}{(q-1)(q^2-1)} + \frac{q^{2n+2}-1}{q-1} \\
&= \frac{q^{2n+2}-1}{q^2-1}\left(q^{2n+1}-q+q+1\right) \\
&= \frac{(q^{2n+2}-1)(q^{2n+1}+1)}{q^2-1} \\
&= |H(2n+1,q^2)|.
\end{aligned}$$

Zij $\bar{\pi}$ een hypervlak van PG$(2n+1,q^2)$. We moeten bewijzen dat

$$|\bar{\pi}\cap\mathcal{H}\,| = \frac{q^{4n+1}-q^{2n+1}+q^{2n}-1}{q^2-1} \qquad \text{of} \qquad |\bar{\pi}\cap\mathcal{H}\,| = \frac{q^{4n+1}+q^{2n+2}-q^{2n+1}-1}{q^2-1}.$$

Stel $\pi = \bar{\pi}\cap\Sigma$. M. Sved [21] heeft in 1982 bewezen dat er twee mogelijkheden zijn: ofwel is π een hypervlak van Σ, ofwel is π een deelruimte van Σ van codimensie 2. We beschouwen deze gevallen afzonderlijk.

Geval 1: π is een hypervlak van Σ
Zij $\mathcal{Q}'$ de kwadriek die geïnduceerd wordt door $\mathcal{Q}$ in π. We noemen $\mathcal{G}'$ de verzameling rechten die bevat zijn in $\mathcal{Q}'$ en $\mathcal{T}'$ de verzameling rechten van π die juist één punt met $\mathcal{Q}'$ gemeen hebben. Dan geldt:

$$|\bar{\pi}\cap\mathcal{H}\,| = (q^2-q)\cdot|\,\mathcal{G}'\cup\mathcal{T}'\,| + |\pi|. \tag{4.1}$$

Er zijn twee mogelijkheden voor π: π kan een raakhypervlak zijn aan $\mathcal{Q}$ of π kan $\mathcal{Q}$ snijden. We behandelen deze gevallen apart.

Geval 1a: π snijdt $\mathcal{Q}$
In dit geval is $\pi\cap\mathcal{Q} = \mathcal{Q}'$ een parabolische kwadriek $Q(2n,q)$. Beschouw een punt $V \in Q(2n,q)$. We willen het aantal rechten $|\,\mathcal{G}'_V\,|$ door V op $Q(2n,q)$ bepalen. Aangezien $V^{\perp}\cap Q(2n,q) = VQ(2n-2,q)$, zijn dit er

$$|\,\mathcal{G}'_V\,| = |Q(2n-2,q)| = \frac{q^{2n-2}-1}{q-1}.$$

Het aantal rechten $|\,\mathcal{T}'_V\,|$ van $\mathcal{T}'$ die V bevatten is gelijk aan

$$|\,\mathcal{T}'_V\,| = \frac{q^{2n-1}-1}{q-1} - \frac{q^{2n-2}-1}{q-1} = \frac{q^{2n-1}-q^{2n-2}}{q-1} = q^{2n-2}.$$

Er volgt

$$|\,\mathcal{G}'\cup\mathcal{T}'\,| = |Q(2n,q)|\left(|\,\mathcal{T}'_V\,| + \frac{|\,\mathcal{G}'_V\,|}{q+1}\right)$$

$$= \left(\frac{q^{2n}-1}{q-1}\right)\left(q^{2n-2}+\frac{q^{2n-2}-1}{q^2-1}\right)$$
$$= \frac{(q^{2n}-1)^2}{(q-1)(q^2-1)}.$$

Uit vergelijking (4.1) volgt nu

$$\begin{aligned}
|\bar{\pi}\cap\mathcal{H}\,| &= q(q-1)\left(\frac{(q^{2n}-1)^2}{(q-1)(q^2-1)}\right)+\frac{q^{2n+1}-1}{q-1}\\
&= \frac{q(q^{4n}-2q^{2n}+1)+(q^{2n+1}-1)(q+1)}{q^2-1}\\
&= \frac{q^{4n+1}-2q^{2n+1}+q+q^{2n+2}+q^{2n+1}-q-1}{q^2-1}\\
&= \frac{q^{4n+1}+q^{2n+2}-q^{2n+1}-1}{q^2-1},
\end{aligned}$$

wat een van de gezochte waarden is.

Geval 1b: π is een raakhypervlak aan $\mathcal{Q}$
In dit geval is $\pi\cap\mathcal{Q}$ een kegel $\mathcal{Q}'$ met top het punt $P=\pi^\perp$ en basis een niet-singuliere kwadriek in $\mathsf{PG}(2n-1,q)$ van hetzelfde type als $\mathcal{Q}$.
We behandelen eerst het hyperbolisch geval.
We zoeken het aantal rechten in $\mathcal{Q}'$ door een punt $V\in\mathcal{Q}'\setminus\{P\}$, verschillend van de rechte VP. Het aantal rechten door V in $\mathcal{Q}'$ is gelijk aan het aantal rechten door V in $P^\perp\cap V^\perp\cap\mathcal{Q} = \langle P,V\rangle Q^+(2n-3,q)$. Elk punt R van $Q^+(2n-3,q)$ spant een uniek vlak α op met de rechte PV. Aangezien R collineair is in Q met zowel P als V, ligt $\alpha=\langle R,P,V\rangle$ op de kegel $PQ^+(2n-1,q)$. Het aantal rechten door V in α is gelijk aan $q+1$, maar de rechte PV tellen we niet mee. We bekomen

$$|\,\mathcal{G}'_V\,| = q\cdot|Q^+(2n-3,q)| = \frac{q(q^{n-2}+1)(q^{n-1}-1)}{q-1}.$$

Het aantal rechten door V in π die enkel het punt V met de kwadriek $\mathcal{Q}'$ gemeen hebben, is gelijk aan

$$\begin{aligned}
|\,\mathcal{T}'_V\,| &= \frac{q^{2n-1}-1}{q-1}-\frac{q(q^{n-2}+1)(q^{n-1}-1)}{q-1}-1\\
&= \frac{q^{2n-1}-1-q(q^{2n-3}-q^{n-2}+q^{n-1}-1)-q+1}{q-1}\\
&= \frac{q^{2n-1}-q^{2n-2}+q^{n-1}-q^n}{q-1}\\
&= \frac{q^{2n-2}(q-1)-q^{n-1}(q-1)}{q-1}\\
&= q^{2n-2}-q^{n-1}.
\end{aligned}$$

Er volgt

$$|\,\mathcal{G}'\cup\mathcal{T}'\,| = \left(q^{2n-2}-q^{n-1}+\frac{q(q^{n-2}+1)(q^{n-1}-1)}{q^2-1}\right)|\,\mathcal{Q}'\setminus\{P\}|+\frac{q^{2n}-1}{q-1},$$

waarbij de laatste term afkomstig is van de rechten door P in $P^\perp$. Uit (4.1) volgt nu

$$|\bar{\pi}\cap\mathcal{H}\,| = q(q-1)\left[\left(q^{2n-2}-q^{n-1}+\frac{q(q^{n-2}+1)(q^{n-1}-1)}{q^2-1}\right)\cdot q\left(\frac{q^{2n-1}+q^n-q^{n-1}-1}{q-1}\right)\right.$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{q^{2n}-1}{q-1}\Bigg] + \frac{q^{2n+1}-1}{q-1} \\
&= \frac{1}{q^2-1}\left[(q^{2n+1}-q^{n+2}+q^{n+1}-q^2)(q^{2n}+q^{n+1}-q^n-q) + (q^{2n}-1)(q^3-q)\right. \\
&\quad \left. +(q^{2n+1}-1)(q+1)\right] \\
&= \frac{q^{4n+1}+q^{2n+2}-q^{2n+1}-1}{q^2-1}.
\end{aligned}
$$

In het elliptisch geval volgt via analoge berekeningen

$$
\begin{aligned}
|\,\mathcal{G}'_V\,| &= \frac{q(q^{n-2}-1)(q^{n-1}+1)}{q-1}, \\
|\,\mathcal{T}'_V\,| &= q^{2n-2}+q^{n-1}, \\
|\,\mathcal{G}'\cup\mathcal{T}'\,| &= \left(q^{2n-2}+q^{n-1}+\frac{q(q^{n-2}-1)(q^{n-1}+1)}{q^2-1}\right)|\,\mathcal{Q}'\setminus\{P\}| + \frac{q^{2n}-1}{q-1}, \\
|\bar{\pi}\cap\mathcal{H}\,| &= \frac{q^{4n+1}+q^{2n+2}-q^{2n+1}-1}{q^2-1}.
\end{aligned}
$$

Geval 1 is bijgevolg volledig afgerond.

Geval 2: π is een deelruimte van Σ van codimensie 2
Zij π' de deelruimte van PG$(2n+1,q^2)$ van codimensie 2 die π bevat. Dan is $\pi'\subseteq\bar{\pi}$. Zij $\mathcal{G}''$ de verzameling rechten van π die bevat zijn in $\mathcal{Q}$ en $\mathcal{T}''$ de verzameling rechten van π die juist één punt gemeen hebben met $\mathcal{Q}$. We noemen $\mathcal{G}'''$ resp. $\mathcal{T}'''$ de deelverzameling van $\mathcal{G}$ resp. $\mathcal{T}$ bestaande uit de rechten van $\mathcal{G}$ resp. $\mathcal{T}$ die scheef zijn aan π. Een rechte van PG$(2n+1,q^2)$ die een Baer deelrechte in Σ bevat, maar niet bevat is in π' snijdt $\bar{\pi}$ ofwel in een punt van π, ofwel in een punt van $\bar{\pi}\setminus\pi'$. Bijgevolg is

$$|\bar{\pi}\cap\mathcal{H}\,| = (q^2-q)|\,\mathcal{G}''\cup\mathcal{T}''\,| + |\,\mathcal{G}'''\cup\mathcal{T}'''\,| + |\pi|. \tag{4.2}$$

Om $|\,\mathcal{G}''\cup\mathcal{T}''\,|$ en $|\,\mathcal{G}'''\cup\mathcal{T}'''\,|$ te bepalen, splitsen we het bewijs op in vier delen: we beschouwen de verschillende mogelijkheden voor de grootte van de doorsnede van de rechte $\pi^\perp=\ell$ in Σ met de kwadriek $\mathcal{Q}$.

Geval 2a: $|\ell\cap\mathcal{Q}\,|=0$
Veronderstel eerst dat $\mathcal{Q}$ een hyperbolische kwadriek $Q^+(2n+1,q)$ is. Wegens stelling 1.3.38 volgt dat $\pi\cap\mathcal{Q}$ een elliptische kwadriek $\mathcal{Q}''=Q^-(2n-1,q)$ is. Zij V een punt van $\mathcal{Q}''$. Aangezien $V^\perp\cap\mathcal{Q}''=VQ^-(2n-3,q)$, is het aantal rechten door V op $\mathcal{Q}''$ gelijk aan

$$|\,\mathcal{G}''_V\,| = |Q^-(2n-3,q)| = \frac{(q^{n-2}-1)(q^{n-1}+1)}{q-1}.$$

Het aantal rechten door V in π die juist één punt gemeen hebben met $\mathcal{Q}''$, wordt gegeven door

$$
\begin{aligned}
|\,\mathcal{T}''_V\,| &= \frac{q^{2n-2}-1}{q-1} - \frac{(q^{n-2}-1)(q^{n-1}+1)}{q-1} \\
&= \frac{q^{2n-2}-1-q^{2n-3}-q^{n-2}+q^{n-1}+1}{q-1} \\
&= \frac{q^{2n-3}(q-1)+q^{n-2}(q-1)}{q-1} \\
&= q^{2n-3}+q^{n-2}.
\end{aligned}
$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned}
|\,\mathcal{G}'' \cup \mathcal{T}''\,| &= \left(|\,\mathcal{T}''_V\,| + \frac{|\,\mathcal{G}''_V\,|}{q+1}\right) \cdot |Q^-(2n-1,q)| \\
&= \left(q^{2n-3} + q^{n-2} + \frac{(q^{n-2}-1)(q^{n-1}+1)}{q^2-1}\right) \cdot \left(\frac{q^{2n-1} - q^n + q^{n-1} - 1}{q-1}\right) \\
&= \left(\frac{q^{2n-1} - q^{2n-3} + q^n - q^{n-2} + q^{2n-3} + q^{n-2} - q^{n-1} - 1}{q^2-1}\right) \cdot \left(\frac{q^{2n-1} - q^n + q^{n-1} - 1}{q-1}\right) \\
&= \frac{q^{4n-2} - q^{2n} - q^{2n-2} + 1}{(q^2-1)(q-1)}.
\end{aligned}$$

We willen nu $|\,\mathcal{G}''' \cup \mathcal{T}'''\,|$ bepalen.
De rechten van $\mathcal{G}''' \cup \mathcal{T}'''$ gaan zeker door een punt van $Q^+(2n+1,q) \setminus Q^-(2n-1,q)$. Zo zijn er

$$\begin{aligned}
|Q^+(2n+1,q)| - |Q^-(2n-1,q)| &= \frac{q^{2n+1} + q^{n+1} - q^n - 1}{q-1} - \frac{q^{2n-1} - q^n + q^{n-1} - 1}{q-1} \\
&= \frac{(q^2-1)q^{2n-1} + (q^2-1)q^{n-1}}{q-1} \\
&= (q+1)q^{n-1}(q^n+1)
\end{aligned}$$

punten. Beschouw een punt $P \in Q^+(2n+1,q) \setminus Q^-(2n-1,q)$. De rechten van $\mathcal{G}''' \cup \mathcal{T}'''$ door P liggen zeker in het raakhypervlak $P^\perp$ door P aan $Q^+(2n+1,q)$. De doorsnede $P^\perp \cap Q^+(2n+1,q)$ is een kegel $PQ^+(2n-1,q)$ met top P en basis een hyperbolische kwadriek $Q^+(2n-1,q)$ in een $(2n-1)$-dimensionale deelruimte π_{2n-1} van Σ die P niet bevat. De doorsnede van deze hyperbolische kwadriek $Q^+(2n-1,q)$ met $Q^+(2n+1,q) \cap \pi$ is een parabolische kwadriek $Q(2n-2,q)$.

Een rechte van $\mathcal{G}'''$ door P is bevat in $P^\perp \cap Q^+(2n+1,q)$ en snijdt $Q^+(2n-1,q)$ in een punt $R \notin Q(2n-2,q)$. Het aantal mogelijke punten R wordt gegeven door

$$\begin{aligned}
|Q^+(2n-1,q)| - |Q(2n-2,q)| &= \frac{q^{2n-1} + q^n - q^{n-1} - 1}{q-1} - \frac{q^{2n-2} - 1}{q-1} \\
&= \frac{q^{2n-2}(q-1) + q^{n-1}(q-1)}{q-1} \\
&= q^{n-1}(q^{n-1}+1).
\end{aligned}$$

Elke rechte van de vorm PR bevat $q+1$ geschikte punten P. Hieruit volgt dat het totaal aantal rechten in $\mathcal{G}'''$ gelijk is aan

$$\begin{aligned}
|\,\mathcal{G}'''\,| &= \frac{(q+1)q^{n-1}(q^n+1)q^{n-1}(q^{n-1}+1)}{q+1} \\
&= q^{2n-2}(q^n+1)(q^{n-1}+1).
\end{aligned}$$

Elke rechte van $\mathcal{T}'''$ snijdt π_{2n-1} in een punt $R \notin (\pi \;\cup\; Q^+(2n-1,q))$. Het aantal mogelijkheden voor R is nu gelijk aan

$$\begin{aligned}
&|\pi_{2n-1}| - |\pi_{2n-1} \cap \pi| - \big(|Q^+(2n-1,q)| - |Q(2n-2,q)|\big) \\
&= \frac{q^{2n}-1}{q-1} - \frac{q^{2n-1}-1}{q-1} - \left(q^{2n-2} + q^{n-1}\right) \\
&= q^{n-1}\left(q^n - q^{n-1} - 1\right).
\end{aligned}$$

Aangezien elke rechte van $\mathcal{T}'''$ juist één geschikt punt P bevat, geldt

$$|\,\mathcal{T}'''\,| = (q+1)q^{n-1}(q^n+1)q^{n-1}(q^n - q^{n-1} - 1)$$

$$= q^{2n-2}(q^n+1)(q^{n+1}-q^{n-1}-q-1).$$

We vinden

$$\begin{aligned}
|\,\mathcal{G}''' \cup \mathcal{T}'''\,| &= |\,\mathcal{G}'''\,| + |\,\mathcal{T}'''\,| \\
&= q^{2n-2}(q^n+1)(q^{n-1}+1) + q^{2n-2}(q^n+1)(q^{n+1}-q^{n-1}-q-1) \\
&= \left(q^{3n-2}+q^{2n-2}\right)\left(q^{n+1}-q\right) \\
&= q^{4n-1}-q^{2n-1}.
\end{aligned}$$

Uit (4.2) volgt nu

$$\begin{aligned}
|\bar{\pi} \cap \mathcal{H}\,| &= \frac{1}{q^2-1}\left[q\left(q^{4n-2}-q^{2n}-q^{2n-2}+1\right) + \left(q^{4n-1}-q^{2n-1}\right)(q^2-1) + (q^{2n}-1)(q+1)\right] \\
&= \frac{q^{4n+1}-q^{2n+1}+q^{2n}-1}{q^2-1},
\end{aligned}$$

wat een van de toegelaten waarden is.
In het elliptisch geval is de doorsnede $\pi \cap \mathcal{Q}$ een hyperbolische kwadriek $\mathcal{Q}'' = Q^+(2n-1,q)$. Op analoge manier als in het hyperbolisch geval, vinden we achtereenvolgens

$$\begin{aligned}
|\,\mathcal{G}''_V\,| &= \frac{(q^{n-2}+1)(q^{n-1}-1)}{q-1}, \\
|\,\mathcal{T}''_V\,| &= q^{2n-3}-q^{n-2}, \\
|\,\mathcal{G}''_V \cup \mathcal{T}''_V\,| &= \left(q^{2n-3}-q^{n-2}+\frac{(q^{n-2}+1)(q^{n-1}-1)}{q^2-1}\right)\cdot\left(\frac{q^{2n-1}+q^n-q^{n-1}-1}{q-1}\right) \\
&= \frac{q^{4n-2}-q^{2n}-q^{2n-2}+1}{(q^2-1)(q-1)}, \\
|\,\mathcal{G}'''_V \cap \mathcal{T}'''_V\,| &= q^{2n-2}(q^n-1)(q^{n-1}-1) + q^{2n-2}(q^n-1)(q^{n+1}-q^{n-1}+q+1) \\
&= q^{4n-1}-q^{2n-1}, \\
|\bar{\pi} \cap \mathcal{H}\,| &= \frac{q^{4n+1}-q^{2n+1}+q^{2n}-1}{q^2-1}.
\end{aligned}$$

Geval 2b: $|\ell \cap \mathcal{Q}\,| = 2$
In het hyperbolisch geval is de doorsnede $\pi \cap \mathcal{Q}$ een hyperbolische kwadriek $Q^+(2n-1,q)$. Dit volgt uit stelling 1.3.39. Op volledig analoge manier als in geval 2a berekenen we

$$\begin{aligned}
|\,\mathcal{G}'' \cup \mathcal{T}''\,| &= \left(\frac{(q^{n-2}+1)(q^{n-1}-1)}{q^2-1}+\frac{q^{2n-2}-1}{q-1}-\frac{(q^{n-2}+1)(q^{n-1}-1)}{q-1}\right)\cdot|Q^+(2n-1,q)|, \\
|\,\mathcal{G}''' \cup \mathcal{T}'''\,| &= q^{2n-2}(q^n-1)(q^{n-1}+1) + q^{2n-2}(q^n-1)(q^{n+1}-q^{n-1}+q-1).
\end{aligned}$$

In het elliptisch geval is $\pi \cap \mathcal{Q}$ een elliptische kwadriek $Q^-(2n-1,q)$. Dan vinden we

$$\begin{aligned}
|\,\mathcal{G}'' \cup \mathcal{T}''\,| &= \left(\frac{(q^{n-2}-1)(q^{n-1}+1)}{q^2-1}+\frac{q^{2n-2}-1}{q-1}-\frac{(q^{n-2}-1)(q^{n-1}+1)}{q-1}\right)\cdot|Q^-(2n-1,q)|, \\
|\,\mathcal{G}''' \cup \mathcal{T}'''\,| &= q^{2n-2}(q^n+1)(q^{n-1}-1) + q^{2n-2}(q^n-1)(q^{n+1}-q^{n-1}-q+1).
\end{aligned}$$

Zowel in het hyperbolisch als in het elliptisch geval vinden we uiteindelijk

$$|\bar{\pi} \cap \mathcal{H}\,| = \frac{q^{4n+1}-q^{2n+1}+q^{2n}-1}{q^2-1}.$$

Geval 2c: $|\ell \cap \mathcal{Q}\,| = 1$
In dit geval is ℓ een raaklijn aan $\mathcal{Q}$ en π een raakruimte. De doorsnede van π met $\mathcal{Q}$ is een kegel $\mathcal{Q}''$ met top het punt $P = \ell \cap \mathcal{Q}$ en basis een parabolische kwadriek $Q(2n-2,q)$. Beschouw nu een punt $V \in \mathcal{Q}''\setminus\{P\}$. We zoeken het aantal rechten door V op $\mathcal{Q}''$, verschillend van de rechte VP. Het aantal rechten door V op $\mathcal{Q}''$ is gelijk aan het aantal rechten door V in $P^\perp \cap V^\perp \cap \mathcal{Q} = \langle P, V\rangle Q(2n-4,q)$. Elk punt $R \in Q(2n-4,q)$ spant een vlak α op met de rechte PV. In α zijn er $q+1$ rechten door V, maar de rechte PV tellen we niet mee. We bekomen dus

$$|\,\mathcal{G}''_V\,| = q \cdot |Q(2n-4,q)| = \frac{q(q^{2n-4}-1)}{q-1}.$$

Het aantal rechten door V in π die enkel V met de kwadriek $\mathcal{Q}''$ gemeen hebben, wordt gegeven door

$$\begin{aligned}
|\,\mathcal{T}''_V\,| &= \frac{q^{2n-2}-1}{q-1} - \frac{q(q^{2n-4}-1)}{q-1} - 1 \\
&= \frac{q^{2n-2}-1-q^{2n-3}+q-q+1}{q-1} \\
&= \frac{q^{2n-3}(q-1)}{q-1} \\
&= q^{2n-3}.
\end{aligned}$$

Er volgt

$$\begin{aligned}
|\,\mathcal{G}'' \cup \mathcal{T}''\,| &= \left(q^{2n-3} + \frac{q(q^{2n-4}-1)}{q^2-1}\right) \cdot |\,\mathcal{Q}''\setminus\{P\}| + \frac{q^{2n-1}-1}{q-1} \\
&= \left(\frac{q^{2n-1}-q^{2n-3}+q^{2n-3}-q}{q^2-1}\right) \cdot q\left(\frac{q^{2n-2}-1}{q-1}\right) + \frac{q^{2n-1}-1}{q-1} \\
&= \frac{(q^{2n-1}-q)^2}{(q^2-1)(q-1)} + \frac{q^{2n-1}-1}{q-1} \\
&= \frac{q^{4n-2}+q^{2n+1}-2q^n-q^{2n-1}+1}{(q^2-1)(q-1)}.
\end{aligned}$$

Om $|\,\mathcal{G}''' \cup \mathcal{T}'''\,|$ te bepalen, definiëren we in het hyperbolisch geval de kegels

$$K = \pi \cap \mathcal{Q} = PQ(2n-2,q) \quad \text{en} \quad K' = P^\perp \cap \mathcal{Q} = PQ^+(2n-1,q).$$

Merk op dat $Q(2n-2,q) \subseteq Q^+(2n-1,q)$. We definiëren vervolgens de verzamelingen

$$S_1 = \mathcal{Q} \setminus K' \quad \text{en} \quad S_2 = K' \setminus \pi.$$

We berekenen

$$\begin{aligned}
|S_1| &= |Q^+(2n+1,q)| - |PQ^+(2n-1,q)| \\
&= \frac{q^{2n+1}+q^{n+1}-q^n-1}{q-1} - \left(1 + q \cdot \frac{q^{2n-1}+q^n-q^{n-1}-1}{q-1}\right) \\
&= \frac{q^{2n+1}-q^{2n}}{q-1} \\
&= q^{2n}
\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}|S_2| &= |PQ^+(2n-1,q)| - |PQ(2n-2,q)| \\ &= 1 + q \cdot \frac{q^{2n-1}+q^n-q^{n-1}-1}{q-1} - \left(1 + q \cdot \frac{q^{2n-2}-1}{q-1}\right) \\ &= \frac{q^{2n}-q^{2n-1}+q^{n+1}-q^n}{q-1} \\ &= q^{2n-1}+q^n.\end{aligned}$$

De volgende observaties zijn belangrijk:

- Elke rechte van $\mathcal{G}'''$ scheef aan π door een punt van S_1 snijdt K' noodzakelijk in juist één punt, want $P^\perp$ is een hypervlak van Σ.
- Elke rechte van $\mathcal{G}'''$ scheef aan π door een punt van S_2 bevat juist één punt van S_2 en q punten van S_1, want π is een hypervlak in $P^\perp$.

Om het aantal rechten in G''' te bepalen, moeten we S_1 als verzameling van geschikte punten gebruiken. Door elk punt $R \in S_1$ gaan er juist

$$|Q^+(2n-1,q)| - |Q(2n-2,q)| = q^{2n-2} + q^{n-1}$$

rechten van $\mathcal{G}'''$, vermits $R^\perp \cap P^\perp \cap \ Q^+(2n+1,q)$ een niet-singuliere hyperbolische kwadriek $Q^+(2n-1,q)$ is en $R^\perp \cap \pi \cap Q^+(2n+1,q)$ een niet-singuliere parabolische kwadriek $Q(2n-2,q)$ is. Aangezien elke rechte van $\mathcal{G}'''$ op deze manier q keer geteld wordt, geldt

$$|\,\mathcal{G}'''\,| = \frac{q^{2n}\left(q^{2n-2}+q^{n-1}\right)}{q} = q^{4n-3} + q^{3n-2}.$$

Om het aantal rechten in $\mathcal{T}'''$ te bepalen, moeten we rekening houden met de bijdragen van de punten in S_1 en S_2.
Beschouw eerst een punt $R \in S_1$ en noem π_{2n-1} de $(2n-1)$-dimensionale deelruimte die de basis van de kegel $R^\perp \cap Q^+(2n+1,q)$ bevat. Noem π_{2n-2} de doorsnede $\pi_{2n-1} \cap \pi$. Het aantal rechten van $\mathcal{T}'''$ door R is dan gelijk aan

$$|\pi_{2n-1}| - |\pi_{2n-2}| - \left(|Q^+(2n-1,q)| - |Q(2n-2,q)|\right) = q^{2n-1} - q^{2n-2} - q^{n-1}.$$

Beschouw vervolgens een punt $R \in S_2$. Merk op dat $R \in P^\perp$, waaruit volgt dat

$$R^\perp \cap P^\perp \cap Q^+(2n+1,q) = RPQ^+(2n-3,q).$$

Aangezien $R \notin \pi$, is $R^\perp \cap Q^+(2n+1,q) \cap \pi$ de kegel $PQ^+(2n-3,q)$. Het aantal rechten van $\mathcal{T}'''$ door R wordt gegeven door

$$|\pi_{2n-1}| - |\pi_{2n-2}| - \left(|Q^+(2n-1,q)| - |PQ^+(2n-3,q)|\right) = q^{2n-1} - q^{2n-2}.$$

We vinden

$$\begin{aligned}|\,\mathcal{T}'''\,| &= q^{2n}\left(q^{2n-1}-q^{2n-2}-q^{n-1}\right) + \left(q^{2n-1}+q^n\right)\left(q^{2n-1}-q^{2n-2}\right) \\ &= q^{4n-1} - q^{4n-2} - q^{3n-1} + q^{4n-2} - q^{4n-3} + q^{3n-1} - q^{3n-2} \\ &= q^{4n-1} - q^{4n-3} - q^{3n-2}.\end{aligned}$$

We bekomen uiteindelijk

$$|\mathcal{G}''' \cup \mathcal{T}'''| = q^{4n-3} + q^{3n-2} + q^{4n-1} - q^{4n-3} - q^{3n-2} = q^{4n-1}.$$

Na een analoge redenering volgt in het elliptisch geval

$$|\mathcal{G}''' \cup \mathcal{T}'''| = q^{4n-3} - q^{3n-2} + q^{4n-1} - q^{4n-3} + q^{3n-2} = q^{4n-1}.$$

Met behulp van (4.2) vinden we

$$\begin{aligned}|\bar{\pi} \cap \mathcal{H}| &= \frac{1}{q^2-1}\left[q(q^{4n-2} + q^{2n+1} - 2q^n - q^{2n-1} + 1) + q^{4n-1}(q^2-1) + (q^{2n}-1)(q+1)\right] \\ &= \frac{q^{4n+1} + q^{2n+2} - q^{2n+1} - 1}{q^2-1}.\end{aligned}$$

Geval 2d: $|\ell \cap \mathcal{Q}| = q + 1$
In het hyperbolisch geval is de doorsnede $\pi \cap \mathcal{Q}$ een kegel $\mathcal{Q}''$ met top de rechte ℓ en basis een hyperbolische kwadriek $Q^+(2n-3, q)$.
Beschouw een punt $P \in \ell$. We zoeken het aantal rechten door P, verschillend van de rechte ℓ, die bevat zijn in $\mathcal{Q}''$. Elk punt R van $Q^+(2n-3, q)$ spant een vlak α op met ℓ, waarbij geldt $\alpha \subseteq \mathcal{Q}''$. Het aantal rechten door P in α is gelijk aan $q+1$, maar we tellen de rechte ℓ niet mee. Bijgevolg is

$$|\mathcal{G}''_P| = q \cdot |Q^+(2n-3, q)| = \frac{q(q^{n-2}+1)(q^{n-1}-1)}{q-1}.$$

Het aantal rechten van π die enkel het punt P met $\mathcal{Q}''$ gemeen hebben, wordt gegeven door

$$\begin{aligned}|\mathcal{T}''_P| &= \frac{q(q^{2n-2}-1)}{q-1} - \frac{q(q^{n-2}+1)(q^{n-1}-1)}{q-1} \\ &= \frac{q^{2n-1} - q - q^{2n-2} + q^{n-1} - q^n + q}{q-1} \\ &= q^{2n-2} - q^{n-1}.\end{aligned}$$

Beschouw nu een punt $V \in \mathcal{Q}'' \setminus \ell$. We zoeken het aantal rechten door V op $\mathcal{Q}''$, verschillend van de rechten van de vorm VL met $L \in \ell$. Het aantal rechten door V op $\mathcal{Q}''$ is gelijk aan het aantal rechten door V in $\ell^\perp \cap V^\perp \cap \mathcal{Q} = \langle \ell, V\rangle Q^+(2n-5, q)$. Elk punt R van $Q^+(2n-5, q)$ spant een drieruimte β op met het vlak $\langle \ell, V\rangle$. In β gaan er q^2+q+1 rechten door V, maar de $q+1$ rechten van de vorm VL met $L \in \ell$ mogen we niet meetellen. We bekomen

$$|\mathcal{G}''_V| = q^2 \cdot |Q^+(2n-5, q)| = \frac{q^2(q^{n-3}+1)(q^{n-2}-1)}{q-1}.$$

Het aantal rechten door V in π die enkel V gemeen hebben met $\mathcal{Q}''$, is gelijk aan

$$\begin{aligned}|\mathcal{T}''_V| &= \frac{q^{2n-2}-1}{q-1} - \frac{q^2(q^{n-3}+1)(q^{n-2}-1)}{q-1} - (q+1) \\ &= \frac{1}{q-1}\left[q^{2n-2} - 1 - q^2(q^{2n-5} - q^{n-3} + q^{n-2} - 1) - (q+1)(q-1)\right] \\ &= \frac{q^{2n-2} - q^{2n-3} - q^n + q^{n-1}}{q-1} \\ &= q^{2n-3} - q^{n-1}.\end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned}
|\mathcal{G}'' \cup \mathcal{T}''| &= \left(|\mathcal{T}''_V| + \frac{|\mathcal{G}''_V|}{q+1} \right) \cdot |\mathcal{Q}'' \setminus \ell| + \left(|\mathcal{T}''_P| + |\mathcal{G}''_P| \right) \cdot |\ell| + 1 \\
&= \left(q^{2n-3} - q^{n-1} + \frac{q^2(q^{n-3}+1)(q^{n-2}-1)}{(q-1)(q+1)} \right) q^2 \left(\frac{q^{2n-3}+q^{n-1}-q^{n-2}-1}{q-1} \right) \\
&\quad + (q+1) \left(q^{2n-2} - q^{n-1} + \frac{q(q^{n-2}+1)(q^{n-1}-1)}{q-1} \right) + 1 \\
&= \left(\frac{q^{2n-1} - q^{2n-3} - q^{n+1} + q^{n-1} + q^{2n-3} - q^{n-1} + q^n - q^2}{q^2-1} \right) \left(\frac{q^{2n-1}+q^{n+1}-q^n-q^2}{q-1} \right) \\
&\quad + \left(\frac{q+1}{q-1} \right) \left(q^{2n-1} - q^{2n-2} - q^n + q^{n-1} + q^{2n-2} - q^{n-1} + q^n - q \right) + 1 \\
&= \frac{1}{(q^2-1)(q-1)} \left(q^{2n-1} - q^2 + q^n - q^{n+1} \right) \left(q^{2n-1} - q^2 - \left(q^n - q^{n+1} \right) \right) \\
&\quad + \frac{(q+1)(q^{2n-1}-q)}{q-1} + 1 \\
&= \frac{\left(q^{2n-1} - q^2 \right)^2 - \left(q^n - q^{n+1} \right)^2}{(q^2-1)(q-1)} + \frac{(q+1)(q^{2n-1}-q)}{q-1} + 1.
\end{aligned}$$

We willen nu $|\mathcal{G}''' \cup \mathcal{T}'''|$ bepalen.
De rechten van $\mathcal{G}''' \cup \mathcal{T}'''$ bevatten een punt van $Q^+(2n+1,q) \setminus \ell Q^+(2n-3,q)$. Het aantal zulke punten is gelijk aan

$$\begin{aligned}
&|Q^+(2n+1,q)| - |\ell Q^+(2n-3,q)| \\
&\qquad = \frac{q^{2n+1}+q^{n+1}-q^n-1}{q-1} - \left(q+1+q^2 \cdot \frac{q^{2n-3}+q^{n-1}-q^{n-2}-1}{q-1} \right) \\
&\qquad = q^{2n-1}(q+1).
\end{aligned}$$

Beschouw een punt $P \in Q^+(2n+1,q) \setminus Q^-(2n-1,q)$. De rechten van $\mathcal{G}''' \cup \mathcal{T}'''$ door P liggen zeker in het raakhypervlak $P^\perp$ door P aan $Q^+(2n+1,q)$. De doorsnede $P^\perp \cap Q^+(2n+1,q)$ is een kegel $PQ^+(2n-1,q)$ met top P en basis een hyperbolische kwadriek $Q^+(2n-1,q)$ in een $(2n-1)$-dimensionale deelruimte π_{2n-1} van Σ die P niet bevat. Aangezien $P \notin \pi$, geldt $\pi^\perp = \ell \nsubseteq P^\perp$. Het hypervlak $P^\perp$ snijdt de rechte ℓ dus in één punt, stel X. De doorsnede van de hyperbolische kwadriek $Q^+(2n-1,q)$ met de kegel $\ell Q^+(2n-3,q)$ is de kegel $XQ^+(2n-3,q)$. Een rechte van $\mathcal{G}'''$ door P is bevat in $P^\perp \cap Q^+(2n+1,q)$ en snijdt $Q^+(2n-1,q)$ in een punt $R \notin XQ^+(2n-3,q)$. Het aantal mogelijke punten R wordt gegeven door

$$\begin{aligned}
&|Q^+(2n-1,q)| - |XQ^+(2n-3,q)| \\
&\qquad = \frac{q^{2n-1}+q^n-q^{n-1}-1}{q-1} - \left(1+q \cdot \frac{q^{2n-3}+q^{n-1}-q^{n-2}-1}{q-1} \right) \\
&\qquad = q^{2n-2}.
\end{aligned}$$

Aangezien elke rechte van de vorm PR juist $q+1$ geschikte punten P bevat, is het totaal aantal rechten in $\mathcal{G}'''$ gelijk aan

$$|\mathcal{G}'''| = \frac{q^{2n-1}(q+1)q^{2n-2}}{q+1} = q^{4n-3}.$$

Elke rechte van $\mathcal{T}'''$ snijdt π_{2n-1} in een punt $R \notin (\pi \,\cup\, Q^+(2n-1,q))$. Het aantal mogelijkheden voor R is nu gelijk aan

$$|\pi_{2n-1}| - |\pi_{2n-1} \cap \pi| - \left(|Q^+(2n-1,q)| - |XQ^+(2n-3,q)| \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{q^{2n}-1}{q-1} - \frac{q^{2n-1}-1}{q-1} - q^{2n-2} \\
&= q^{2n-2}(q-1).
\end{aligned}$$

Aangezien elke rechte van $\mathcal{T}'''$ juist één geschikt punt P bevat, geldt

$$|\,\mathcal{T}'''\,| = q^{2n-1}(q+1)q^{2n-2}(q-1) = (q^2-1)q^{4n-3}$$

We vinden

$$|\,\mathcal{G}''' \cup \mathcal{T}'''\,| = q^{4n-3} + q^{4n-3}(q^2-1) = q^{4n-1}.$$

We kennen nu alle waarden die voorkomen in (4.2) en kunnen vervolgens $|\bar{\pi} \cap \mathcal{H}\,|$ bepalen:

$$\begin{aligned}
|\bar{\pi} \cap \mathcal{H}\,| &= q\left(\frac{\left(q^{2n-1}-q^2\right)^2 - \left(q^n - q^{n+1}\right)^2}{q^2-1} + (q+1)(q^{2n-1}-q) + q - 1\right) + q^{4n-1} + \frac{q^{2n}-1}{q-1} \\
&= \frac{1}{q^2-1}\left[q\left(q^{4n-2} - 2q^{2n+1} + q^4 - q^{2n} + 2q^{2n+1} - q^{2n+2}\right) + (q^2+q)\left(q^{2n-1}-q\right)(q^2-1)\right. \\
&\qquad \left. +(q^2-q)(q^2-1) + q^{4n-1}(q^2-1) + \left(q^{2n}-1\right)(q+1)\right] \\
&= \frac{q^{4n+1} + q^{2n+2} - q^{2n+1} - 1}{q^2-1}.
\end{aligned}$$

Het elliptisch geval gaat volledig analoog. Nu is $\mathcal{Q}''$ een kegel met top de rechte ℓ en basis een elliptische kwadriek $Q^-(2n-3,q)$. Er volgt

$$\begin{aligned}
|\,\mathcal{G}''_P\,| &= \frac{q(q^{n-2}-1)(q^{n-1}+1)}{q-1}, \\
|\,\mathcal{T}''_P\,| &= \frac{q(q^{2n-2}-1)}{q-1} - \frac{q(q^{n-2}-1)(q^{n-1}+1)}{q-1} \\
&= q^{2n-2} + q^{n-1}, \\
|\,\mathcal{G}''_V\,| &= \frac{q^2(q^{n-3}-1)(q^{n-2}+1)}{q-1}, \\
|\,\mathcal{T}''_V\,| &= \frac{q^{2n-2}-1}{q-1} - \frac{q^2(q^{n-3}-1)(q^{n-2}+1)}{q-1} - (q+1) \\
&= q^{2n-3} + q^{n-1}, \\
|\,\mathcal{G}'' \cup \mathcal{T}''\,| &= \frac{\left(q^{2n-1}-q^2\right)^2 - \left(q^{n+1}-q^n\right)^2}{(q^2-1)(q-1)} + \frac{(q+1)(q^{2n-1}-q)}{q-1} + 1, \\
|\,\mathcal{G}''' \cup \mathcal{T}'''\,| &= q^{4n-3} + q^{4n-3}(q^2-1) = q^{4n-1}, \\
|\bar{\pi} \cap \mathcal{H}\,| &= \frac{q^{4n+1} + q^{2n+2} - q^{2n+1} - 1}{q^2-1}.
\end{aligned}$$

Bij deze is de stelling volledig bewezen. □

Stelling 4.3.6. *De verzameling $\mathcal{H}$ heeft een groep van automorfismen die isomorf is met*

$$\mathsf{P\Gamma O}^{\pm}(n+1,q) \ltimes C_2,$$

alnaargelang $\mathcal{Q}$ hyperbolisch of elliptisch is.

Bewijs. Het is duidelijk dat elke collineatie van de deelmeetkunde PG$(2n+1, q)$ die de kwadriek stabiliseert, ook alle punten van $\mathcal{H}$ stabiliseert. De groep PΓO$^{\pm}(2n+2, q)$ is dus zeker een deelgroep van de volledige automorfismegroep van $\mathcal{H}$. Het veldautomorfisme ϕ : GF$(q^2) \to$ GF(q^2); $x \mapsto x^q$ fixeert alle punten van PG$(2n+1, q)$, dus ook alle rechten die $\mathcal{H}$ bepalen. Anderzijds induceert ϕ een involutie op de punten van PG$(2n+1, q^2) \setminus$ PG$(2n+1, q)$, dus zeker niet alle punten van $\mathcal{H}$ worden gefixeerd. Hierdoor induceert ϕ dus zeker een niet-triviaal automorfisme van $\mathcal{H}$. Alle automorfismen die we vinden zijn dus bevat in een groep isomorf met

$$\mathsf{PGO}^{\pm}(2n+1, q) \ltimes C_{2h} = \mathsf{PGO}^{\pm}(2n+1, q) \ltimes (C_h \times C_2) \cong \mathsf{P\Gamma O}(2n+1, q) \ltimes C_2.$$

□

Definitie 4.3.7. Twee quasi-Hermitische variëteiten in PG$(2n+1, q^2)$ zijn **isomorf** als er een collineatie van PG$(2n+1, q^2)$ bestaat die de ene quasi-Hermitische variëteit op de andere afbeeldt.

Stelling 4.3.8. *Als q oneven is, is de quasi-Hermitische variëteit $\mathcal{H}$ uit stelling 4.3.5 niet isomorf met een quasi-Hermitische variëteit die geconstrueerd wordt via een gepivotteerde verzameling. Als q even is, is $\mathcal{H}$ niets anders dan de niet-singuliere Hermitische variëteit $H(2n+1, q^2)$.*

Het bewijs van deze stelling is terug te vinden op blz. 207 van [16].

Hoofdstuk 5

Een karakterisering van kwadrieken en Hermitische variëteiten

De bedoeling van dit hoofdstuk is om een karakterisering te bespreken van kwadrieken en Hermitische variëteiten door gebruik te maken van de intersectiegetallen met hypervlakken en ruimten van codimensie twee. Dit zal ons dan ook een karakterisering opleveren om te zeggen wanneer quasikwadrieken resp. quasi-Hermitische variëteiten niet-singuliere kwadrieken resp. Hermitische variëteiten zijn. Dit hoofdstuk is gebaseerd op het artikel *Characterizations of finite classical polar spaces by intersection numbers with hyperplanes and spaces of codimension 2* van S. De Winter en J. Schillewaert uit 2007, zie [9].

5.1 Karakteriseringen van polaire ruimten

De stelling die we in dit hoofdstuk willen bewijzen is deze:

Stelling 5.1.1. *Zij K een puntenverzameling in* PG(n,q) *met $n \geq 4$ en $q > 2$. Stel dat K dezelfde intersectiegetallen heeft m.b.t. hypervlakken en ruimten van codimensie twee als een polaire ruimte $P \in \{H(n,q), Q^+(n,q), Q^-(n,q), Q(n,q)\}$, dan is K de puntenverzameling van een niet-singuliere polaire ruimte P.*

We gaan hiervoor verschillende karakteriseringen van polaire ruimten gebruiken, die we eerst overlopen.

Definitie 5.1.2. Een punt-rechte meetkunde S is **volledig ingebed** in een projectieve ruimte PG(n,q) als de rechtenverzameling van S een deelverzameling is van de rechtenverzameling van PG(n,q) en als de punten van S precies alle punten zijn van PG(n,q) die bevat zijn in die rechten.

Definitie 5.1.3. Een **Buekenhout-Shultruimte** is een punt-rechte meetkunde die voldoet aan de volgende vier axioma's:

(BS1) Elke rechte heeft minstens drie punten.

(BS2) Geen enkel punt is collineair met elk ander punt.

(BS3) Elke genestelde familie van singuliere deelruimten is eindig.

(BS4) **"Eén-of-alle"-axioma**: Voor elk punt p en elke rechte L niet door p geldt ofwel dat er juist één punt op L collineair is met p, ofwel dat alle punten op L collineair zijn met p.

Stelling 5.1.4. *Zij S een niet-ontaarde Buekenhout-Shultruimte. Als S volledig ingebed is in een projectieve ruimte, bestaat S uit de punten en rechten van een eindige klassieke polaire ruimte.*

Definitie 5.1.5. Een puntenverzameling K van PG(n, q) is van het **type** $(r_1, r_2, \ldots, r_s)$ als voor elke rechte L van PG(n, q) geldt $|L \cap K| \in \{r_1, r_2, \ldots, r_s\}$. Een punt $p \in K$ is **singulier** t.o.v. K als alle rechten door p juist 1 of $q+1$ punten gemeen hebben met K. De verzameling K is **singulier** als K een singulier punt bevat.

De volgende stelling is een samenraapsel van resultaten van Tallini Scafati [24], Hirschfeld en Thas [15] en Glynn [11].

Stelling 5.1.6. *Zij K een niet-singuliere verzameling punten van het type $(1, r, q^2 + 1)$ in PG(n, q^2) met $n \geq 4$ en $q > 2$. Als K voldoet aan de voorwaarden*

- $3 \leq r \leq q^2 - 1$,
- *Er bestaat geen vlak π zo dat elke rechte van π de verzameling $\pi \cap K$ snijdt in r of $q^2 + 1$ punten,*

dan is K de puntenverzameling van een niet-singuliere Hermitische variëteit $H(n, q^2)$.

Definitie 5.1.7. Een k-**boog** in een projectieve ruimte PG(n, q) met $n \geq 3$ is een verzameling van $k \geq n + 1$ punten waarvan geen $n + 1$ punten in eenzelfde hypervlak gelegen zijn.

Stelling 5.1.8. *Zij K een niet-singuliere puntenverzameling van het type $(0, 1, 2, q + 1)$ in PG(n, q) met $n \geq 4$ en $q > 2$. Als*

$$\frac{q^n - 1}{q - 1} \leq |K| \leq \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1},$$

is een van de volgende mogelijkheden voldaan:

- $|K| = \frac{q^n-1}{q-1}$, *n is even en K is de puntenverzameling van een parabolische kwadriek $Q(n, q)$;*
- $|K| = \frac{q^n-1}{q-1} + q^{\frac{n-1}{2}}$, *$n$ is oneven en K is de puntenverzameling van een hyperbolische kwadriek $Q^+(n, q)$;*
- $|K| = \frac{q^n-1}{q-1} + 1$, *$q$ is even en $K = \Pi_t K' \cup \{N\}$ met Π_t een t-dimensionale deelruimte van PG(n, q) en K' de puntenverzameling van een parabolische kwadriek $Q(n - t - 1, q)$, dus $n - t - 1$ is even, in een $(n - t - 1)$-dimensionale deelruimte van PG(n, q) scheef aan Π_t of K' is een $(q + 1)$-boog scheef aan Π_t als $t = n - 3$. In beide gevallen is N de kern van K'.*

Dit resultaat werd bekomen door Tallini in de jaren 1950, zie [22] en [23].

Deze laatste twee stellingen karakteriseren bepaalde polaire ruimten d.m.v. de doorsnedes met rechten. Het is een natuurlijke vraag of deze polaire ruimten ook via doorsnedes met andere deelruimten gekarakteriseerd kunnen worden. Het bestaan van quasikwadrieken en quasi-Hermitische variëteiten toont aan dat er geen karakterisering bestaat van kwadrieken resp. Hermitische variëteiten via de doorsnede met enkel hypervlakken.

We willen nu de belangrijkste stappen weergeven van het bewijs van stelling 5.1.1. We zullen dit doen voor de verschillende gevallen afzonderlijk. We veronderstellen vanaf nu dat we werken in een projectieve ruimte van dimensie minstens 4 en dat $q > 2$.

5.2 Hermitische variëteiten

Het eerste dat we gaan doen, is de verschillende mogelijkheden opsommen voor de grootte van de doorsnede van een niet-singuliere Hermitische variëteit $H(n, q^2)$ in PG(n, q^2) met hypervlakken resp. deelruimten van codimensie twee. Een hypervlak van PG(n, q^2) kan $H(n, q^2)$ snijden in een niet-singuliere Hermitische variëteit $H(n-1, q^2)$ of in een kegel $pH(n-2, q^2)$. De mogelijke groottes van de doorsnedes met hypervlakken zijn

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{(q^n - (-1)^n)\left(q^{n-1} + (-1)^n\right)}{q^2 - 1}, \\ H_2 &= 1 + q^2 \frac{\left(q^{n-1} + (-1)^n\right)\left(q^{n-2} - (-1)^n\right)}{q^2 - 1}. \end{aligned}$$

Een ruimte van codimensie 2 snijdt $H(n, q^2)$ in een niet-singuliere Hermitische variëteit $H(n-2, q^2)$, in een kegel $pH(n-3, q^2)$ of in een kegel $LH(n-4, q^2)$ met p een punt en L een rechte. De mogelijke intersectiegetallen met deelruimten van codimensie 2 zijn dus

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\left(q^{n-1} + (-1)^n\right)\left(q^{n-2} - (-1)^n\right)}{q^2 - 1}, \\ C_2 &= 1 + q^2 \frac{\left(q^{n-2} - (-1)^n)\right)\left(q^{n-3} + (-1)^n\right)}{q^2 - 1}, \\ C_3 &= 1 + q^2 + q^4 \frac{\left(q^{n-3} + (-1)^n)\right)\left(q^{n-4} - (-1)^n\right)}{q^2 - 1}. \end{aligned}$$

Zij K een deelverzameling van de punten van PG(n, q^2) met intersectiegetallen H_1 en H_2 t.o.v. hypervlakken en intersectiegetallen C_i $(i = 1, 2, 3)$ t.o.v. deelruimten van codimensie 2. Dan moeten we bewijzen dat K de puntenverzameling is van een Hermitische variëteit $H(n, q^2)$.

De hypervlakken die H_2 punten gemeen hebben met K noemen we **raakhypervlakken**. Deelruimten die K snijden in m punten noemen we **deelruimten van type** m.

Noem $\mathcal{H}$ de verzameling raakhypervlakken van K. Zij δ : PG$(n, q^2) \to$ PG$(n, q^2)^D$ een dualiteit van PG(n, q^2).

Lemma 5.2.1. *De puntenverzameling $K' = \mathcal{H}^\delta$ is een $(1, q+1, q^2+1)$-verzameling in* PG$(n, q^2)^D$.

Dit lemma wordt bewezen via allerlei combinatorische berekeningen. Men gaat voornamelijk via dubbele tellingen stelsels opstellen die men met behulp van computersoftware kan oplossen. Voor de details verwijs ik graag naar [9].

Voor het vervolg van het bewijs hebben we enkele resultaten nodig uit de theorie van de (k, d)-bogen in een projectief vlak.

Definitie 5.2.2. Een (k, d)-**boog** in PG$(2, q)$ is een verzameling A van $|A| = k$ punten zodat elke rechte van PG$(2, q)$ de verzameling A in hoogstens d punten snijdt en zodat er minstens een rechte is in PG$(2, q)$ die A snijdt in juist d punten.

Stelling 5.2.3. *Het aantal punten k van een (k, d)-boog A in* PG$(2, q)$ *is hoogstens $qd + d - q$.*

Definitie 5.2.4. Een (k, d)-boog A in PG$(2, q)$ is **maximaal** als $k = qd + d - q$.

Stelling 5.2.5. *Een (k, d)-boog A is maximaal als er enkel rechten zijn die A in 0 of d punten snijden.*

Stelling 5.2.6. *Zij A een maximale (k, d)-boog in* PG$(2, q)$. *Dan is d een deler van q.*

Lemma 5.2.7. *De verzameling K' is de puntenverzameling van een niet-singuliere Hermitische variëteit $H(n, q^2)$ in* PG$(n, q^2)^D$.

Bewijs. Om dit te bewijzen, willen we graag stelling 5.1.6 gebruiken. Uit de berekeningen waarnaar hierboven verwezen werd, volgt dat elk raakhypervlak deelruimten van type C_1 bevat. Elk punt van K' is dus bevat in rechten die K' in juist $q + 1$ punten snijden. Bijgevolg is K' niet-singulier. Aangezien $q > 2$ is ook aan de eerste voorwaarde van stelling 5.1.6 voldaan. Stel nu dat er een vlak π is zodat elke rechte van π de verzameling $K' \cap \pi$ snijdt in $q + 1$ of $q^2 + 1$ punten. Zij C het complement van $K' \cap \pi$ in π. Dan snijdt elke rechte van π de verzameling C in 0 of $q^2 - q$ punten. Hieruit volgt m.b.v. stelling 5.2.5 dat C een maximale $(k, q^2 - q)$-boog is in π. Uit stelling 5.2.6 volgt dat $q^2 - q \mid q^2$. Dit is echter strijdig, vermits $q > 2$. Bijgevolg is ook de tweede voorwaarde voldaan. Er volgt dat K' de puntenverzameling is van een niet-singuliere Hermitische variëteit in PG$(n, q^2)^D$. □

Stelling 5.2.8. *De verzameling K is de puntenverzameling van een niet-singuliere Hermitische variëteit $H(n, q^2)$ in* PG(n, q^2).

Bewijs. De verzameling K' voldoet aan dezelfde voorwaarden op de intersectiegetallen met hypervlakken en deelruimten van codimensie 2 in PG$(n, q^2)^D$ als K in PG(n, q^2). De raakhypervlakken van K' zijn die hypervlakken die H_2 punten van K' bevatten. Als we nu de dualiteit δ^{-1} toepassen op PG$(n, q^2)^D$, zien we dat de raakhypervlakken van K' bijectief afgebeeld worden op de punten van K. Dit volgt ook uit de berekeningen in lemma 2.4 van [9]. Nu kunnen we lemma 5.2.7 toepassen, waarbij we K' vervangen door K en PG$(n, q^2)^D$ door PG(n, q^2). Er volgt dat K de puntenverzameling is van een niet-singuliere Hermitische variëtiet $H(n, q^2)$. □

5.3 Hyperbolische kwadrieken

Het bewijs van stelling 5.1.1 voor hyperbolische kwadrieken gaat analoog aan het bewijs voor Hermitische variëteiten. We vermelden hier de belangrijkste stappen. Voor de voorafgaande berekeningen verwijzen we opnieuw naar [9].

We vertrekken van een verzameling K van punten in PG$(2n + 1, q)$ die dezelfde intersectiegetallen heeft met hypervlakken en ruimten van codimensie 2 als een niet-singuliere hyperbolische kwadriek $Q^+(2n + 1, q)$. Deze intersectiegetallen zijn

$$\begin{aligned}
H_1 &= \frac{q^{2n} - 1}{q - 1},\\
H_2 &= 1 + q\frac{(q^n - 1)\left(q^{n-1} + 1\right)}{q - 1},\\
C_1 &= \frac{(q^n + 1)\left(q^{n-1} - 1\right)}{q - 1},\\
C_2 &= 1 + q\left(\frac{q^{2n-2} - 1}{q - 1}\right),\\
C_3 &= \frac{(q^n - 1)\left(q^{n-1} + 1\right)}{q - 1},
\end{aligned}$$

$$C_4 = 1 + q + q^2 \frac{\left(q^{n-1} - 1\right)\left(q^{n-2} + 1\right)}{q - 1}.$$

Zoals voorheen noemen we de hypervlakken die H_2 punten gemeen hebben met K **raakhypervlakken**. Noem $\mathcal{H}$ de verzameling raakhypervlakken van K. Zij δ : $\mathrm{PG}(2n+1,q) \to \mathrm{PG}(2n+1,q)^D$ een dualiteit van $\mathrm{PG}(2n+1,q)$.

Lemma 5.3.1. *De verzameling $K' = \mathcal{H}^\delta$ is de puntenverzameling van een niet-singuliere hyperbolische kwadriek $Q^+(2n+1,q)$ in $\mathrm{PG}(2n+1,q)^D$.*

Dit lemma volgt uit stelling 5.1.8. In [9] wordt namelijk aangetoond dat in $\mathrm{PG}(2n+1,q)$ door elke ruimte van codimensie twee van het type C_1, C_2, C_3 en C_4 resp. 0, 1, 2 en $q+1$ raakhypervlakken gaan. Hieruit volgt dat K' een verzameling is in $\mathrm{PG}(2n+1,q)^D$ van het type $(0,1,2,q+1)$.

Stelling 5.3.2. *De verzameling K is de puntenverzameling van een niet-singuliere hyperbolische kwadriek $Q^+(2n+1,q)$ in $\mathrm{PG}(2n+1,q)$.*

Bewijs. In het voorgaande lemma is bewezen dat K' de puntenverzameling is van een hyperbolische kwadriek $Q^+(2n+1,q)$. Bijgevolg voldoet K' aan dezelfde voorwaarden op de intersectiegetallen met hypervlakken en ruimten van codimensie twee als K. De raakhypervlakken aan K' zijn precies die hypervlakken die H_2 punten van K' bevatten. Als we de dualiteit δ^{-1} toepassen op $\mathrm{PG}(2n+1,q)^D$, zien we dat de raakhypervlakken van K' bijectief afgebeeld worden op de punten van K. Dat dit inderdaad een bijectie is, volgt uit lemma 2.11 in [9]. We kunnen nu het voorgaande lemma toepassen, waarbij we K' vervangen door K en $\mathrm{PG}(2n+1,q)^D$ door $\mathrm{PG}(2n+1,q)$. Zo zien we dat K de puntenverzameling is van een hyperbolische kwadriek $Q^+(2n+1,q)$. □

5.4 Elliptische kwadrieken

We herhalen eerst de mogelijke groottes van de doorsnedes van een elliptische kwadriek $Q^-(2n+1,q)$ in $\mathrm{PG}(2n+1,q)$ met hypervlakken en deelruimten van codimensie 2.

$$\begin{aligned}
H_1 &= \frac{q^{2n}-1}{q-1}, \\
H_2 &= 1 + q\frac{\left(q^n+1\right)\left(q^{n-1}-1\right)}{q-1}, \\
C_1 &= \frac{\left(q^n-1\right)\left(q^{n-1}+1\right)}{q-1}, \\
C_2 &= 1 + q\left(\frac{q^{2n-2}-1}{q-1}\right), \\
C_3 &= \frac{\left(q^n+1\right)\left(q^{n-1}-1\right)}{q-1}, \\
C_4 &= 1 + q + q^2\frac{\left(q^{n-1}+1\right)\left(q^{n-2}-1\right)}{q-1}.
\end{aligned}$$

We vertrekken opnieuw van een puntenverzameling K in $\mathrm{PG}(2n+1,q)$ die aan de voorwaarden op de intersectiegetallen voldoet en we willen bewijzen dat K de puntenverzameling is van een elliptische kwadriek $Q^-(2n+1,q)$ in $\mathrm{PG}(2n+1,q)$.

De hypervlakken die H_2 punten gemeen hebben met K noemen we opnieuw **raakhypervlakken**. Zij $\mathcal{H}$ de verzameling raakhypervlakken van K. Zij δ : PG$(2n+1,q) \to PG(2n+1,q)^D$ een dualiteit van PG$(2n+1,q)$. Uit de berekeningen in [9] volgt dat $K' = \mathcal{H}^\delta$ een verzameling is van het type $(0,1,2,q+1)$. De verzameling K' voldoet echter niet aan de voorwaarden van stelling 5.1.8. We zullen het bewijs in dit geval anders moeten aanpakken.

We definiëren een punt-rechte meetkunde S met puntenverzameling K'. De rechtenverzameling van S bestaat uit de rechten van PG$(2n+1,q)^D$ die $q+1$ punten gemeen hebben met K'. We behouden de natuurlijke incidentie.

Stelling 5.4.1. *De meetkunde S is een niet-ontaarde Shultruimte.*

Bewijs. Beschouw een punt p van S en een rechte L van S die niet door p gaat. Noem het α het vlak voortgebracht door p en L.
Geval 1: α bevat nog een ander punt r van S
Aangezien de punten p en r niet bevat zijn in L, heeft de rechte pr minstens drie punten gemeen met $S:\ p,\ r$ en $pr \cap L$. Aangezien K' een verzameling is van het type $(0,1,2,q+1)$, is de rechte pr volledig bevat in S. Er volgt dat $\alpha \cap S$ de unie is van twee snijdende rechten (pr en L) of dat α volledig bevat is in S (als α en S nog ergens een punt gemeen hebben). Merk op dat de voorwaarde $q > 2$ hiervoor nodig is. In beide gevallen is het "één-of-alle"-axioma voldaan.
Geval 2: $\alpha \cap S = p \cup L$
Veronderstel dat α niet bevat is in een hypervlak van het type H_1. Tel nu het aantal paren (x,H) met x een punt van S, H een hypervlak dat α bevat en $x \in H \setminus \alpha$. We weten uit lemma 2.14 van [9] dat $|S| = |K'| = |Q^-(2n+1,q)|$. Door de drieruimte $\langle x,\alpha\rangle$ gaan $\frac{q^{2n-2}-1}{q-1}$ hypervlakken. Door een vlak gaan $\frac{q^{2n-1}-1}{q-1}$ hypervlakken. Wegens de gemaakte veronderstelling is $|H \cap S| = H_2$. Hiermee rekeninghoudend vinden we

$$\begin{aligned}
&\big(|Q^-(2n+1,q)| - q - 2\big)\left(\frac{q^{2n-2}-1}{q-1}\right) = \left(\frac{q^{2n-1}-1}{q-1}\right)(H_2 - q - 2)\\
&\Leftrightarrow \big(q^{2n+1} - q^{n+1} + q^n - 1 - q^2 + q - 2q + 2\big)\big(q^{2n-2} - 1\big)\\
&\qquad = \big(q^{2n-1} - 1\big)\big(q^{2n} - q^{n+1} + q^n - 1 - q^2 + q - 2q + 2\big)\\
&\Leftrightarrow q^{3n-2}\big(q^2 - 2q + 1\big) + q^{2n-2}\big(q^2 - 2q + 3\big) = 0.
\end{aligned}$$

Aangezien $q > 2$, geldt $q^2 - 2q > 0$. Bijgevolg hebben we een strijdigheid gevonden. Het vlak α is dus zeker bevat in een hypervlak Π van type H_1. Aangezien Π een deelruimte is van PG$(2n+1,q)^D$, is $K' \cap \Pi$ ook een $(0,1,2,q+1)$-verzameling. Wegens stelling 5.1.8 en het feit dat $|K' \cap \Pi| = H_1$ is $K' \cap \Pi$ een niet-singuliere parabolische kwadriek. Hieruit volgt dat p collineair is met één of alle punten van L.

Aangezien elk punt van S bevat is in een hypervlak van type H_1 is geen punt van S collineair met elk ander punt van S. We moeten nu nog bewijzen dat door elk punt een constant aantal rechten gaat. Beschouw hiervoor twee niet-collineaire punten p en q. Omdat het "1-of-alle"-axioma geldig is in S, volgt er dat voor elke rechte L door p er precies één rechte bestaat die q bevat en L snijdt. Door p en q gaat dus eenzelfde aantal rechten. Beschouw nu twee collineaire punten p en q. Door alle vlakken door de rechte pq te beschouwen, kunnen we een punt r vinden dat niet-collineair is met zowel p als q. Wegens het vorige geval kunnen we ook hier besluiten dat het aantal rechten door p gelijk is aan het aantal rechten door q. □

Gevolg 5.4.2. De verzameling K' is de puntenverzameling van een elliptische kwadriek $Q^-(2n+1,q)$ in PG$(2n+1,q)^D$.

Bewijs. Dit volgt meteen door gebruik te maken van stelling 5.1.4 en $|K'| = |Q^-(2n+1,q)|$. $\square$

Stelling 5.4.3. *De verzameling K is de puntenverzameling van een niet-singuliere elliptische kwadriek $Q^-(2n+1,q)$ in* PG$(2n+1,q)$.

Deze stelling wordt op dezelfde manier bewezen als stelling 5.3.2.

5.5 Parabolische kwadrieken

Het grootste verschil in het parabolische geval t.o.v. de andere gevallen is dat er nu drie mogelijke doorsnedes zijn met hypervlakken. Een niet-singuliere parabolische kwadriek $Q(2n,q)$ in PG$(2n,q)$ heeft met een hypervlak een niet-singuliere hyperbolische kwadriek $Q^+(2n-1,q)$, een niet-singuliere elliptische kwadriek $Q^-(2n-1,q)$ of een kegel $pQ(2n-2,q)$ gemeen. Een deelruimte van codimensie twee snijdt $Q(2n,q)$ in een niet-singuliere parabolische kwadriek $Q(2n-2,q)$ of in kegels van de vorm $pQ^+(2n-3,q)$, $pQ^-(2n-3,q)$ of $LQ(2n-4,q)$ met p een punt en L een rechte. Aangezien $|LQ(2n-4,q)| = |Q(2n-2,q)|$ zijn er hier drie mogelijke intersectiegetallen. De mogelijke waarden voor de grootten van de doorsneden van $Q(2n,q)$ met hypervlakken en ruimten van codimensie twee worden gegeven door

$$\begin{aligned}
H_1 &= \frac{(q^n-1)\left(q^{n-1}+1\right)}{q-1}, \\
H_2 &= \frac{(q^n+1)\left(q^{n-1}-1\right)}{q-1}, \\
H_3 &= 1+q\left(\frac{q^{2n-2}-1}{q-1}\right), \\
C_1 &= \frac{q^{2n-2}-1}{q-1}, \\
C_2 &= 1+q\frac{\left(q^{n-1}+1\right)\left(q^{n-2}-1\right)}{q-1}, \\
C_3 &= 1+q\frac{\left(q^{n-1}-1\right)\left(q^{n-2}+1\right)}{q-1}.
\end{aligned}$$

Zij K een puntenverzameling in PG$(2n,q)$ met dezelfde intersectiegetallen als hierboven. Dan willen we bewijzen dat K de puntenverzameling is van een niet-singuliere parabolische kwadriek $Q(2n,q)$. Een hypervlak dat H_3 punten gemeen heeft met K noemen we een **raakhypervlak**.

Aangezien er nu drie mogelijke doorsnedes zijn met hypervlakken, worden de stelsels uit de berekeningen een stuk ingewikkelder dan in de vorige gevallen. Daarom zullen we deze hier ook niet vermelden. We gaan meteen naar het laatste bewijs in [9].

Stelling 5.5.1. *K is de puntenverzameling van een niet-singuliere parabolische kwadriek $Q(2n,q)$ in $PG(2n,q)$.*

Bewijs. Beschouw een rechte L van PG$(2n,q)$. Stel $x = |L \cap K|$ en neem aan dat $x \geq 3$. Veronderstel dat er geen hypervlak van type H_1 is dat L bevat en noem n_2 het aantal hypervlakken van type H_2 die L bevatten. Tel nu het aantal paren (r,H) met $r \in K$, $r \notin L$ en H een hypervlak dat r en L bevat. Gebruikmakend van het feit dat $|K| = |Q(2n,q)|$ (cf. lemma 2.21 in [9]), vinden we

$$n_2(H_2-x) + \left(\frac{q^{2n-1}-1}{q-1} - n_2\right)(H_3-x) = \left(\frac{q^{2n}-1}{q-1} - x\right)\frac{q^{2n-2}-1}{q-1}$$

$$\Leftrightarrow n_2(H_2 - H_3) = \left(\frac{q^{2n}-1}{q-1} - x\right)\frac{q^{2n-2}-1}{q-1} - (H_3 - x)\left(\frac{q^{2n-1}-1}{q-1}\right).$$

Het rechterlid van deze gelijkheid kunnen we schrijven als

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{q^{2n}-1}{q-1} - x\right)\frac{q^{2n-2}-1}{q-1} - (H_3 - x)\left(\frac{q^{2n-1}-1}{q-1}\right) \\
&\qquad = \frac{q^{4n-2} - q^{2n} - q^{2n-2} + 1}{(q-1)^2} + x\left(\frac{q^{2n-1} - q^{2n-2}}{q-1}\right) - \left(\frac{q^{2n-1}-1}{q-1}\right)^2 \\
&\qquad = \frac{-q^{2n} + 2q^{2n-1} - q^{2n-2}}{(q-1)^2} + x\left(\frac{q^{2n-1} - q^{2n-2}}{q-1}\right) \\
&\qquad = \frac{-q^{2n-2}\left(q^2 - 2q + 1\right)}{(q-1)^2} + x\left(\frac{q^{2n-2}(q-1)}{q-1}\right) \\
&\qquad = -q^{2n-2} + xq^{2n-2} \\
&\qquad = (x-1)q^{2n-2} \\
&\qquad > 0,
\end{aligned}$$

wegens de onderstelling $x \geq 3$. Verder weten we dat $H_2 - H_3 = -q^{n-1} < 0$. Er volgt dat $n_2 < 0$, een strijdigheid. De rechte L is dus zeker bevat in een hypervlak van type H_1. Gevolg 2.26 uit [9] zegt dat elk hypervlak van type H_1 de verzameling K snijdt in de puntenverzameling van een niet-singuliere hyperbolische kwadriek. Daar geldt het "één-of-alle"-axioma, waaruit we mogen besluiten dat $x = q + 1$. Bijgevolg is K een verzameling van het type $(0, 1, 2, q + 1)$ in PG$(2n, q)$. Lemma 2.27 uit [9] zegt dat elk punt van K bevat is in een hypervlak van type H_1. Daaruit volgt dat elk punt van K bevat is in een rechte M met $|M \cap K| = 2$. Er volgt dat K niet-singulier is. Bovendien voldoet K aan de voorwaarden van stelling 5.1.8. Aangezien $|K| = \frac{q^{2n}-1}{q-1}$ volgt het gestelde. □

Bijlage A

English summary

The first introductory chapter of this graduate thesis contains concepts of coding theory, graph theory, geometry and algebra that will be used in the thesis. All definitions, lemma's, theorems, etc. in this chapter are presented as known facts, and belong to one of the courses I attended in the bachelor/master program of mathematics at Ghent University.

The second chapter discusses an article of R. Calderbank and W.M. Kantor. We have surveyed those parts of the paper that describe the connection between two-character sets, two-weight codes and strongly regular graphs, including some constructive results. In our survey we focus on a fully detailed study of some of the most important proofs. Afterwards, we discuss a particular construction of a two-character set in the projective space PG$(5, q^2)$. This two-character set was discovered by A. De Wispelaere and H. Van Maldeghem and uses some unexpected ideas such as an anti-isomorphism between two skew planes of PG$(5, q^2)$, combined with a Baer subplane. Finally, we discuss an example of a two character set in an affine plane.

In the third chaper, quasi-quadrics are discussed. These are point sets in a projective space PG(n, q) that have the same number of points and the same intersection numbers with respect to hyperplanes as non-singular quadrics in the same projective space. After some considerations about pseudo-complements, quasi-quadrics are defined and various constructions are discussed.

In the fourth chapter, the theory about quasi-quadrics is extended to quasi-Hermitian varieties. Different constructions of these are given.

The fifth and last chapter discusses a result of S. De Winter and J. Schillewaert that characterizes non-singular quadrics and quasi-Hermitian varieties by their intersection numbers with hyperplanes and spaces of codimension two. Because of the long combinatorical calculations, only the crucial steps of the proof are given.

Bibliografie

[1] Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A., *Distance-regular graphs*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3, vol. 18), Springer-Verlag, Berlijn, 1989.

[2] Calderbank R., Kantor W.M., *The geometry of two-weight codes*, Bull. London Math. Soc., jaargang 18, 1986, blz. 97-122.

[3] De Beule J., Demeyer J., Metsch K., Rodgers M., *A new family of tight sets in* $Q^+(5, q)$, Springer Science + Business Media, New York, online gepubliceerd, 2014.

[4] De Bruyn B., *Cursus Eindige Meetkunde*, Universiteit Gent, 2013.

[5] De Clerck F., *Cursus Projectieve Meetkunde*, Universiteit Gent, 2011.

[6] De Clerck F., Hamilton N., O'Keefe C., Pentilla T., *Quasi-quadrics and related structures*, Australasian Journal of Combinatorics, jaargang 22, 2000, blz. 151-166.

[7] Delsarte P., *Weigths of linear codes and strongly regular normed spaces*, Discrete Mathematics, nr. 3, 1972, blz. 47-64.

[8] De Winter S., Schillewaert J., *A note on quasi-Hermitian varieties and singular quasi-quadrics*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, jaargang 17, 2010, blz. 911-918.

[9] De Winter S., Schillewaert J., *Characterizations of finite classical polar spaces by intersection numbers with hyperplanes and spaces of codimension 2*, Combinatorica, jaargang 30, 2010, blz. 25-45.

[10] De Wispelaere A., Van Maldeghem H., *Some new two-character sets in* PG$(5, q^2)$ *and a distance-2 ovoid in the generalized hexagon* H(4), Discrete Mathematics, nr. 308, 2008, blz. 2976-2983.

[11] Glynn D., *On the characterization of certain sets of points in finite projective geometry of dimension three*, Bull. London Math. Soc., jaargang 15, 1983, blz. 31-34.

[12] Godsil C.D., *Covers of complete graphs*, Progress in Algebraic Combinatorics, nr. 24 in Advanced Studies in Pure Mathematics, 1996, blz. 137-163.

[13] Hirschfeld J.W.P., *Projective Geometries over Finite Fields*, Clarendon Press, Oxford, 1998.

[14] Hirschfeld J.W.P., Thas J.A., *General Galois Geometries*, Oxford Science Publications, 1991.

[15] Hirschfeld J.W.P., Thas J.A., *Sets of type* $(1, n, q + 1)$ *in* PG(d, q), Proc. London Math. Soc., jaargang 41, nr. 3, 1980, blz. 254-278.

[16] Pavese F., *Geometric constructions of two-character sets*, Discrete Mathematics, nr. 338, 2015, blz. 202-208.

[17] Pentilla T., *Cameron-Liebler line classes in* PG$(3, q)$, Geom. Dedicata, jaargang 37, nr. 3, 1991, blz. 245-252.

[18] Pentilla T., Royle G.F., *Sets of type* (m, n) *in the affine and projective planes of order nine*, Des. Codes Cryptogr., jaargang 6, nr. 3, 1995, blz. 229-245.

[19] Storme L., *Cursus Codeertheorie*, Universiteit Gent, 2014.

[20] Storme L., *Cursus Galoismeetkunde*, Universiteit Gent, 2013.

[21] Sved B., *Baer subspaces in the* n*-dimensional projective space*, Combinatorial Mathematics, X, Adelaide, 1982; in Lecture Notes in Mathematics, vol. 1036, Springer, Berlijn, blz. 375-391.

[22] Tallini G., *Caratterizzazione grafica delle quadriche ellittiche negli spazi finiti*, Rend. Mat. e Appl. (5), nr. 5, 1957, blz. 328-351.

[23] Tallini G., *Sulle* k*-calotte degli spazi lineari finiti, I*, Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., nr. 8, 1956, blz. 311-317.

[24] Tallini Scafati M., *Caratterizzazione grafica delle forme hermitiane di un* $S_{r,q}$, Rend. Mat. e Appl. (5), nr. 26, 1967, blz. 273-303.

[25] Van Maldeghem H., *Cursus Grafentheorie*, Universiteit Gent, 2011.

[26] Van Maldeghem H., Struyve K., *Cursus Polaire Ruimten*, Universiteit Gent, 2013.

[27] Van Puyvelde L., *Algebraïsche grafentheorie: van polaire ruimten tot onderzoekend leren (Masterproef)*, Universiteit Gent, 2014.