3. The Sensitivity Conjecture

Beschouw een Boolse functie $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Voor $x \in \{0,1\}$ en $S \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$, noteer $x^S \in \{0,1\}^n$ de binaire vector die ontstaat uit x door op alle elementen van x met index in S de binaire `NOT` operatie toe te passen (een zogenaamde bitflip). De *lokale gevoeligheid* van f met betrekking tot x, genoteerd $s(f,x)$, is het aantal indices i waarvoor $f(x) \neq f(x^{\{i\}})$ en de *gevoeligheid* van f is $\max_x s(f,x)$. De *lokale blokgevoeligheid*, genoteerd $bs(f,x)$, is het maximaal aantal disjuncte blokken $B_1,\ldots,B_k \subseteq \{1,\ldots,n\}$ zodat voor elk blok B_i geldt dat $f(x) \neq f(x^{B_i})$. De *blokgevoeligheid* $s(f) := \max_x bs(f,x)$.

De zogenaamde *Sensitivity Conjecture* stelt dat er een absolute constante $C > 0$ bestaat zodat voor elke Boolse functie f geldt dat

$$bs(f) \leq s(f)^C .$$

Tot voor kort was deze conjectuur uit de complexiteitsleer onopgelost. Begin juli 2019 werd door de wiskundige Hao Huang van Emory University deze conjectuur bewezen. Het bewijs van deze conjectuur blijkt *elementair en elegant* te zijn. Het gebruikt geen uiterst ingewikkelde wiskundige concepten, maar is gebaseerd op grafen en de bekende interlace-stelling van Cauhcy.

De hyperkubus is een graaf Q^n, waarbij de toppen van Q^n de vectoren in $\{0,1\}^n$ zijn, en waarbij twee toppen adjacent zijn als en slechts als de bijhorende vectoren in slechts één positie verschillen. Voor een graaf γ noteren we met $\Delta(\Gamma)$ de maximale graad. De stelling die door Hao Huang aangetoond wordt is de volgende

Stelling 1. *Beschouw de hyperkubus Q^n, $n \geq 1$ en stel dat H een geïnduceerd deelgraaf is van Q^n met precies $(2^{n-1} - 1)$ toppen. Dan geldt*

$$\Delta(H) \geq \sqrt{n} .$$

Daarenboven is deze ongelijkheid een gelijkheid als n een volkomen kwadraat is.

De adjacentiematrix van ongerichte grafen is symmetrisch. Dus de eigenwaarden zijn reeël. In de algebraïsche grafentheorie kunnen daardoor heel vaak stellingen over eigenwaarden gebruikt worden. De volgende stelling is heel belangrijk in het bewijs van Hao Huang

Stelling 2 (Interlace-stelling van Cauchy)**.** *Stel dat A een symmetrische $n \times n$-matrix is, en B een $m \times m$ leidende deelmatrix van A voor een $m < n$. Noteer met $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ de eigenwaarden van A en met $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_m$ de eigenwaarden van B. Dan geldt, voor alle $1 \leq i \leq m$,*

$$\lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{i+n-m} .$$

Het doel van dit project is om grondig de paper van Hao Huang te bestuderen, samen met de noodzakelijke resultaten uit de algebraïsche grafentheorie.

Referenties

[1] H. Huang. Induced subgraphs of hypercubes and a proof of the Sensitivity Conjecture. ArXiv:1907.00847v2

[2] Noam Nisan and Márió Szegedy. On the degree of Boolean functions as real polynomials. volume 4, pages 301–313. 1994. Special issue on circuit complexity (Barbados, 1992).