Clément Vidal
Maîtrise de philosophie 2002-2003
Université Paris I (Panthéon-Sorbonne)
Direction : Jacques Dubucs.
Co-direction : Jean Gayon.

Georg Cantor et la découverte des infinis.

Le délicat problème de la philosophie des mathématiques qui me procure la plus grande fascination –et je maintient que c'est un authentique problème– est celui de l'existence, ou réalité, ou intelligibilité, ou objectivité de totalités infinies.

Abraham Robinson [1973, p556]

Table des matières.

Avant propos

Pour les citations internes, nous utiliserons toujours une notation absolue ; par exemple [III.1.1] correspond à notre partie sur les intervalles emboîtés.

En ce qui concerne le fonctionnement des références bibliographiques, se référer à la bibliographie.

Le glossaire et les définitions des notations utilisées sont à la fin de ce mémoire. Pour faciliter l'emploi du glossaire, les mots définis dans le glossaire sont plusieurs fois marqués d'un astérisque. Ainsi, la lecture du connaisseur ne sera pas gênée, tandis que celle du néophyte sera amplement facilitée.

L'infini est une énigme qui a de tous temps fasciné les Hommes. En effet, l'idée de l'infini s'impose dès que l'on a l'ambition de proposer une philosophie systématique, c'est-à-dire qui tente de répondre à *toutes* les questions que l'Homme se pose. C'est pour cette raison que les grands systèmes philosophiques laissent une place à Dieu, infini par définition. L'étude de l'infini se présente donc comme naturellement liée à Dieu. Plus encore par le fait suivant : étudier l'infini soulève des difficultés et produit des paradoxes. Ce qui paraît attester que l'infini n'est pas abordable par un esprit fini, c'est-à-dire humain. Paradoxes et relation avec Dieu semblaient donc proscrire l'étude rigoureuse de l'infini.

Cependant, si l'infini est nécessaire en métaphysique, il l'est aussi pour la science, car il en existe bien une qui doit faire face à des objets infinis : les mathématiques[1]. Comment a-t-on abordé l'infini en mathématiques ? Cette question est évidement trop vaste pour être traitée ici dans son intégralité. Mais nous pouvons très grossièrement distinguer trois périodes dans l'histoire de l'infini : l'infini dans l'Antiquité ; l'infini aux XVII^{e} et XVIII^{e} siècles avec le calcul infinitésimal* ; l'infini achevé, avec Georg Cantor (1845-1918) et ses disciples. C'est cette dernière période que nous allons étudier. En effet, cette étape est particulièrement fascinante, car elle constitue le tournant le plus radical dans l'histoire de l'infini. Cantor y traite l'infini d'une manière nouvelle et parfaitement rigoureuse, ce qui le fait rompre avec une longue tradition. Des questions restées sans réponse vont connaître alors un nouvel essor. Existe-t-il des *nombres* infinis ? Si oui, n'y a-t-il qu'un infini, ou existe-t-il différents infinis ?

[1] On peut penser par exemple à l'ensemble infini des nombres entiers, la droite réelle infinie, l'infinité des triangles quelconques, etc…

S'il y en a effectivement plusieurs, comment montre-t-on qu'un ensemble infini est plus grand qu'un autre ? Combien y a t il de tailles différentes d'ensembles infinis ?

Plus précisément, nous essayerons de comprendre la naissance de la théorie des ensembles infinis achevés de Cantor, ou *théorie des nombres transfinis*. Il existe deux types de nombres infinis (ou transfinis) : les cardinaux et les ordinaux. Nous nous axerons principalement sur la théorie des *cardinaux* transfinis, c'est-à-dire sur les questions des tailles d'ensembles infinis; les questions relatives aux *ordinaux* transfinis nécessitant davantage de technicité.

Notre but est de faire une introduction historique, mathématique et philosophique à cette partie de l'œuvre de Cantor. Un des objectifs de ce travail serait donc de permettre à un lecteur non mathématicien, d'aborder l'étude moderne de l'infini, en suivant quelques grands moments de sa genèse. Plus particulièrement, nous voulons comprendre comment s'est effectuée la *découverte des infinis* chez Cantor. Pour cela il faut appréhender au moins les deux points suivants. Premièrement, saisir comment l'infini achevé a pu se constituer comme concept mathématique [II]. Deuxièmement, comment Cantor a réussi à faire des distinctions au-delà du couple fini-infini, à travers l'infini [III]. Mais, avant cela, nous examinerons quelques grandes thèses classiques sur l'infini mathématique [I]. Après ces différentes études, nous pourrons alors examiner comment Cantor a réfuté les conceptions antérieures de l'infini, et les problèmes inévitables soulevés entre mathématiques et théologie [IV]. Enfin, nous ouvrirons notre débat en nous interrogeant sur les limites de la théorie de Cantor ; nous indiquerons aussi quelques développements contemporains de théories de l'infini actuel [V].

Dans notre première partie, nous exposerons synthétiquement quelques positions de philosophes et mathématiciens pré-cantoriens, vis-à-vis de l'infini. *Comment était vu l'infini* *avant Cantor ?* Pourquoi n'y avait-il pas de nombres infinis avant lui ? Cette partie historique et philosophique n'a bien sûr aucune prétention d'exhaustivité, mais a pour fonction de mettre en relief le travail de Cantor. En effet, ce rappel sur les grandes thèses de l'infini permettra de mieux comprendre les enjeux de l'orientation surprenante de Cantor. L'infini *actuel* était avant Cantor inexistant en mathématiques. Pourquoi en était-il ainsi ? Quels étaient les obstacles à la constitution positive de l'infini ?

Notre deuxième partie aura également un caractère préliminaire, mais mathématique. En effet, pour comprendre ce qu'est un nombre infini, nouéments essayerons de répondre à la question : *qu'est-ce qu'un nombre ?* Et ce, toujours dans l'optique de préparer la compréhension de la révolution cantorienne. Ainsi, nous montrerons comment l'extension du nombre peut se faire, du nombre entier au nombre infini, en passant par la construction cantorienne des réels. Nous exposerons aussi quelques concepts de base de la théorie des ensembles, éléments indispensables pour saisir l'essence du nombre infini. Nous pourrons alors répondre à la question : *comment le nombre infini –et donc l'infini achevé– a-t-il pu se constituer comme concept mathématique ?*

Cela étant posé, nous aurons les moyens de nous pencher, dans la troisième partie, sur la difficile question : *Existe-t-il différents infinis ?* Nous verrons alors comment Cantor a apporté des réponses précises et fécondes, en exposant deux démonstrations. La première date de kind1874 et est connue parce qu'elle utilise la méthode des « intervalles emboîtés* » ; la seconde, qui date de 1891 est celle qui utilise le célèbre procédé diagonal, d'une importance fondamentale pour la théorie des nombres. Nous examinerons par ailleurs certains obstacles et incompréhensions majeurs relatifs à ces résultats.

La quatrième partie aura un aspect plus philosophique. Cantor avait compris que sa nouvelle création mathématique avait des conséquences philosophiques et théologiques. Il a donc défendu ses mathématiques relativement à ces deux disciplines. *Comment Cantor a-t-il réussi à réfuter les thèses classiques sur l'infini, qui refusaient l'infini actuel ?* De plus, l'infini en acte paraissait être un concept purement divin. Dès lors, nous essayerons de répondre à une question à mi-chemin entre les mathématiques et la théologie : *comment Cantor a-t-il pu concilier sa foi et son étude positive de l'infini ?*

Enfin, notre dernière partie nous emmènera vers les limites de la théorie cantorienne des ensembles. *Quels sont les problèmes et limites relatives à la théorie des ensembles ?* Cette question est néanmoins trop vaste pour que nous la traitions dans une seule partie. Ainsi, nous verrons promptement comment Cantor a réagi aux paradoxes ; puis nous nous interrogerons sur le rapport des mathématiques de Cantor avec les infinitésimaux. Nous esquisserons pour finir deux développements modernes de l'étude mathématique de l'infini : vers l'infiniment petit avec l'analyse non standard et vers l'infiniment grand avec les grands cardinaux.

I. Aperçu de l'infini avant Cantor.

Notre première interrogation sera très large, puisqu'elle sera : *comment était vu l'infini avant Cantor ?* Néanmoins, nous n'allons explorer que les grandes thèses de l'infini, en restant autant que possible dans le champ mathématique. Nous verrons quelques figures marquantes, comme Aristote et Euclide pour l'Antiquité [I.1] ; Galilée [I.2.1], Leibniz pour le calcul infinitésimal* [I.2.2], et enfin le cas particulier de Bolzano [I.3]. Ces auteurs ayant presque tous été par la suite repris et critiqués par Cantor. En particulier, nous n'allons pas traiter les fameux paradoxes de Zénon, qui mériteraient beaucoup de développements pour être bien examinés. De plus, la résolution de ces paradoxes se situe plutôt dans le champ de l'analyse mathématique que dans la théorie cantorienne proprement dite. [2]

1. L'infini dans l'antiquité

1.1 Aristote

Dans livre III de la *Physique*, Aristote commence par remarquer :

> Mais l'étude de l'infini comporte une aporie car, qu'on le pose comme existant ou non, il arrive de nombreuses impossibilités.[3]

Aristote est donc bien conscient qu'il n'est pas possible d'évacuer le problème de l'infini, en faisant comme s'il n'existait pas. Il faut donc, d'une manière ou d'une autre, lui laisser une place. Il en arrive alors à une première conclusion :

> Il est manifeste aussi que l'infini ne peut exister comme étant en acte ni comme une étance et un principe, car, quelque partie de lui qu'on prenne, elle sera infinie. [4]

[2] Cependant, pour plus de détail sur l'infini en général, on pourra consulter l'ouvrage de Moore [1993].
[3] *Physique*, p136.
[4] *Physique*, p137.

Cette remarque est un peu étrange, car on peut très bien prendre une partie finie dans un ensemble infini. Par contre, et c'est sans doute ce qu'Aristote trouve pathologique, c'est qu'il est possible qu'une partie d'un ensemble infini soit elle aussi infinie. Prenons un exemple. Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels ; et P l'ensemble des entiers pairs :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

$$P = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$$

P est bien inclus* dans $\mathbb{N}$ (ce que l'on note par $P \subset \mathbb{N}$), car tout nombre pair est aussi un nombre entier. Mais pourtant P est toujours un ensemble infini. Cela semble paradoxal, car étant donné que nous avons omis tous les entiers impairs, il serait tentant de dire que P est « deux fois plus petit » que $\mathbb{N}$. On appelle ce phénomène le paradoxe de *réflexivité* ; qui était donc bien connu d'Aristote. Mais ce paradoxe n'est pas le seul. Voyons ce qui se passe si on accepte l'infini en acte, comme un tout achevé. On ne peut alors pas l'additionner sans tomber dans des contradictions. Car par exemple :

> L'infini peut être infini, soit par addition, soit par retranchement, ou par les deux à la fois.[5]

En effet, si on admettait qu'il existe un nombre infini, certaines opérations n'auraient plus de sens. Par exemple, pour n et m des entiers positifs, on a toujours :

$$n+m>n \text{ et } n+m>m$$

Mais si m était infini, on aurait :

$$n+m = n+\infty = \infty$$

Ceci est en contradiction avec les règles usuelles de l'addition, un peu comme si le nombre infini « absorbait » tout autre nombre. Il paraît donc sensé de ne pas admettre l'infini comme un nombre en tant que tel[6]. Comment caractériser alors l'infini ? Aristote nous propose :

[5] *Métaphysique*, 1066b, p 387.

> Il est manifeste que [l'être de] l'infini […] est la privation[7]

C'est-à-dire qu'Aristote propose de voir l'infini comme ce qui, étymologiquement, n'est pas fini[8]. Mais, conscient et soucieux de l'intérêt de l'infini en mathématiques il précise à la fin de son analyse :

> Ma théorie n'enlève rien aux considérations des mathématiciens, en supprimant l'infini selon l'accroissement qu'on ne saurait parcourir ; car les mathématiciens n'ont pas besoin de l'infini et ne l'utilisent pas : ils ont simplement besoin d'une grandeur finie, choisie aussi grande qu'ils veulent.[9]

L'expression « l'infini selon l'accroissement qu'on ne saurait parcourir » fait ici référence à un infini qui existerait effectivement, en acte, même si on ne pourrait évidemment pas le parcourir. Ainsi, cet infini, est inutile au mathématicien. Aristote pourra alors établir la célèbre distinction entre infini *potentiel** et infini *actuel** (ou en acte). Cette distinction permet de résoudre bien des paradoxes, tout en légitimant le travail du mathématicien. L'infini actuel*, par définition, considéré comme un tout existant, est donc évité. Seul l'infini potentiel est accepté, car utile au mathématicien, qui l'utilise comme une grandeur plus grande que toute grandeur donnée.

Aristote a donc su donner à l'infini un statut provisoire, qui permet d'éviter certains paradoxes. L'infini potentiel était né, pour une influence plurimillénaire. Comment cette adoption de l'infini potentiel se traduit-elle dans les mathématiques de l'époque d'Aristote ? Pour examiner cela, penchons nous maintenant sur Euclide, sans doute le plus grand mathématicien de la Grèce Antique.

---

[6] Le lecteur impatient ou tout simplement curieux pourra aller voir la solution par Cantor de ce problème en [IV.1].
[7] *Physique*, p138, 204b15.
[8] Etymologiquement, le terme grec « *a-peiron » (άπειρο)*, tout comme « in-fini » en français est privatif. C'est ce qui n'est pas fini.
[9] *Physique*, 207b8.

1.2 Euclide

C'est à Euclide que l'on doit –entre autres– la toute première axiomatisation de la géométrie. Sa méthode est déductive, c'est-à-dire qu'il pose des notions communes (ou axiomes), des postulats (ou demandes) et des définitions. A partir de ces prémisses, toute la géométrie peut alors se démontrer. Rétrospectivement, on peut considérer son approche moderne, féconde et très rigoureuse. Elle a servie de modèle et de base à des générations de mathématiciens. Mais la question qui nous intéresse ici est la suivante : quel était le point de vue d'Euclide sur l'infini ? La réponse est qu'il est dans la lignée Aristote. Comment cette attitude se traduit-elle dans ses textes ? Observons par exemple, la définition de deux droites parallèles :

> Des droites parallèles sont celles qui étant dans le même plan et *indéfiniment prolongées* de part et d'autre, ne se rencontrent pas, ni d'un côté, ni de l'autre.[10]

Il est clair que Euclide ne souhaite pas employer une expression qui sous-entendrait l'infini actuel*, comme par exemple « prolongées à l'infini ». L'infini est donc appréhendé négativement, comme ce qui n'est pas fini. Pourquoi n'y a-t-il pas de concept positif de l'infini ? Parce que l'on s'en méfie : l'infini, nous l'avons vu avec Aristote, conduit à des paradoxes. De plus, il existe à cette époque une confusion entre le fini et le défini d'une part ; et l'infini et l'indéfini d'autre part. L'infini est associé à l'inconnu, l'inconnaissable, l'indéterminé, l'inachevé. A l'inverse, le fini est connu, connaissable, déterminé et achevé. Cela dit, on peut déjà critiquer cette vision car il existe bel et bien des finis mal définis, et des infinis bien définis. Par exemple, le nombre de grains de sables de notre planète est mal défini, bien qu'il soit forcément fini. Concernant l'infini bien défini, on peut penser à

[10] *Les Elements*, définition 23, p166. Nous soulignons.

l'ensemble infini des entiers naturels, qu'un enfant qui apprend à compter peut engendrer facilement.

Essayons de raisonner sur l'infini comme le ferait un mathématicien grec. Les mathématiques sont une science sûre. Or l'infini n'est pas sûr, donc l'infini ne peut pas être objet des mathématiques. Ainsi considéré, il parait tout à fait légitime de ne pas accepter l'infini sous toutes ses formes dans les mathématiques.

Notons cependant que l'infini en métaphysique et en philosophie religieuse est tout de même perçu positivement. Il est alors désigné par des termes comme l'Eternel, l'Absolu, le Tout, le Un.

Pour revenir à l'infini mathématique, le point le plus important à remarquer dans la mathématique euclidienne est le suivant. Il existe un axiome à première vue tout à fait anodin, car relativement évident :

> Le tout est plus grand que la partie.[11]

En effet, si l'axiome est évidement vrai dans le fini, dans l'infini, il est problématique. Pour illustrer ce point, reprenons notre exemple vu avec Aristote. $\mathbb{N}$ est infini ; et P l'est aussi. Le tout ($\mathbb{N}$) n'est donc pas plus grand que la partie (P). L'infini et cet axiome ne sont donc pas compatibles. Mais cela ne prête pas vraiment à conséquence dans la mathématique grecque, puisqu'elle n'utilise pas et n'essaye pas d'utiliser l'infini actuel*. Cependant, comme nous le verrons dans la suite de ce chapitre, cet axiome sera un obstacle considérable à la constitution du nombre infini.

[11] Euclide, *Les Elements*, 8^{e} notion commune, p179.

2. L'infini au XVII^e siècle.

2.1 Galilée

Galilée, dans son œuvre immense, très souvent consacrée à réexaminer les thèses de la philosophie scolastique, ne s'est pas soustrait à l'examen de l'infini. Cet examen se trouve dans les *Discours et démonstrations mathématiques concernant deux sciences nouvelles* [1638]. La thèse de Galilée, qu'annonce Salvatio, est la suivante :

> […] j'estime que les épithètes comme « plus grand », « plus petit » et « égal » ne conviennent pas aux grandeurs infinies, dont il est impossible de dire que l'une est plus grande, plus petite ou égale à une autre.[12]

Pour démontrer cela, il va exposer la fameuse mise en correspondance des entiers naturels et de leurs carrés. Pour présenter les choses plus clairement, considérons le tableau suivant :

Entiers	1	2	3	4	5	6	7	8	etc…
Carrés	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	etc…
Résultat des carrés	1	4	9	16	25	36	49	64	etc…

L'examen du problème se fait en deux temps. *Premièrement*, regardons la première et la troisième ligne du tableau. On remarque qu'il y a « moins » de carrés que d'entiers. En effet, notre troisième ligne ne contient pas les éléments 2, 3, 5, 6, 7, 8, … C'est-à-dire que l'ensemble des carrés est inclus* dans celui des entiers. C'est ce qu'exprime Galilée en disant

> Salvatio : Par conséquent, si je dis que les nombres pris dans leur totalité, en incluant les carrés et les non-carrés, sont plus nombreux que les carrés seuls, j'énoncerai, n'est-ce pas, une proposition vraie ?
> Simplicio : Très certainement.[13]

[12] Galilée [1638, p78].
[13] Galilée [1638, p78].

Remarquons qu'il y a un enthymème que Galilée ne précise pas pour arriver à cette conclusion : c'est bien entendu que le tout est plus grand que la partie. L'axiome euclidien* lui paraît sans doute tellement naturel, qu'il doit lui sembler superflu de l'expliciter.

Deuxièmement, examinons les deux premières lignes du tableau. Elles nous montrent qu'il y a « autant » d'entiers que de carrés. Plus précisément :

> Si je demande maintenant combien il y a de nombre carrés, on peut répondre, sans se tromper, qu'il y en a autant que de racines correspondantes, attendu que tout carré a sa racine et toute racine son carré, qu'un carré n'a pas plus d'une racine, et une racine pas plus d'un carré. [14]

En langage moderne, nous pouvons dire qu'il y a une correspondance biunivoque –ou *bijection**– entre ces deux ensembles.

La conclusion serait donc qu'il « faudrait admettre que les carrés sont aussi nombreux que tous les nombres pris ensemble. »[15] Cela paraît bien sur inadmissible, toujours en vertu de l'axiome implicite. Pour résumer, on peut dire que le critère de l'inclusion* (le 1er point) nous fait dire que les entiers sont plus nombreux que les carrés ; et le critère de la bijection (2e point) que les entiers et les carrés sont aussi nombreux. Les deux points exposés ci-dessus nous mettent ainsi en présence du paradoxe de *réflexivité*. Ce paradoxe est accentué ici par le fait que « la proportion des carrés diminue toujours davantage quand on passe à des nombres plus élevés »[16].

> Sagredo : Qu'en conclure dans ces conditions ?
> Salvatio : A mes yeux la seule issue possible est de dire que l'ensemble des nombres est infini, que le nombre des carrés est infini, et le nombre de leurs racines pareillement ; que le total des nombres carrés n'est pas inférieur à l'ensembles des nombres, ni supérieur à celui-là, et, finalement, que les attributs « égal », « plus grand » et « plus petit » n'ont pas de sens pour les quantités infinies, mais seulement pour les quantités finies.[17]

Il n'y a donc pour Galilée, qu'un nombre infini, susceptible d'aucune comparaison, et qui ne peut donc sûrement pas être arithmétisé. Le concept de nombre infini est donc très restreint.

[14] Galilée [1638, p78].
[15] Galilée [1638, p79].
[16] Galilée [1638, p78].
[17] Galilée [1638, p79].

Le paradoxe soulevé prouve, pour Galilée, qu'il est impossible de comparer des ensembles infinis.

2.2 Leibniz

Le XVII^e^ siècle apporte beaucoup de nouveaux concepts mathématiques. Essentiellement, le calcul infinitésimal* a été simultanément inventé par Leibniz et Newton. Comme son nom l'indique, ce nouveau calcul manipule des objets infinis. Cela est caractérisé par la manipulation de suites* infinies, par exemple :

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

On calcule aussi les limites de suite ; par exemple la limite de la suite ci-dessus est 1, quand n tend vers l'infini. La notion de limite, ainsi que celle de dérivée d'une fonction* sont ainsi introduites[18]. Ces découvertes permettent de calculer avec des approximations *aussi grandes que l'on veut*, les courbes, les surfaces, les volumes… Mais, si nous avons souligné l'expression « aussi grandes que l'on veut » c'est pour une raison très précise. En effet, ce calcul n'utilise mathématiquement que l'infini potentiel*. On considère que l'on peut toujours affiner le calcul, par des approximations croissantes. L'infini potentiel peut être caractérisé par la formule suivante :

$$\forall x \; \exists y \quad x<y$$ [19]

[18] Nous ne détaillerons pas cet épisode de l'histoire des mathématiques. Cependant, on pourra se reporter à l'ouvrage de [Dahan-Dalmedico et Peiffer, chapitre 5, §10, p190-197] pour plus de détails.
[19] On remarquera à ce propos que quand Weierstrass introduira le $\forall\varepsilon\ \exists\delta$ pour formuler rigoureusement les limites, il ne s'agit que de la formulation de l'infini potentiel.

Si x et y sont des nombres, cela signifie que pour tout nombre, on peut en trouver un plus grand. Cela dit, en pratique, le calcul infinitésimal est très fécond. En effet, les mathématiques de l'ingénieur du XIX^e^ et XX^e^ siècle viennent en grande partie de ces découvertes. Si bien que l'on pourrait dire, d'un point de vue mathématique –*uniquement*– qu'il aurait été possible d'envoyer une fusée sur la Lune à cette époque, tant le calcul infinitésimal permet de calculer précisément les trajectoires des planètes et de tout autre objet en mouvement.

Mais revenons sur Terre, et demandons-nous ce qui fait penser à Leibniz, ce mathématicien de l'infini, que le nombre infini ne peut pas être cohérent. La responsabilité incombe encore à l'axiome d'Euclide*, dont il refuse catégoriquement de se défaire. Il reprend l'exemple classique de la bijection* de Galilée :

> Qui peut nier que le nombre de tous les nombres contient le nombre des nombres carrés qu'on trouve parmi tous les nombres ? Contenir signifie toujours être partie et je pense que la proposition la partie est plus petite que le tout est aussi vraie dans l'infini que dans le fini.[20]

On remarque que Leibniz, contrairement à Galilée, cite explicitement l'axiome d'Euclide. Il conclut, non pas –comme Galilée– qu'il n'y a *qu'un seul* nombre infini, mais qu'il *n'y a pas* de nombre infini, parce qu'il est contradictoire :

> [il] sera en même temps égal et inégal, donc impossible, parce qu'il s'en suit une impossibilité.[21]

Dans une lettre au mathématicien Jean Bernoulli (1667-1748), Leibniz synthétise son point de vue :

> …ou bien l'infini n'est pas, en réalité, un tout, ou bien, s'il est un tout et s'il n'est pas plus grand qu'une de ses parties, il est quelque chose d'absurde. [22]

[20] Leibniz [1676, p612].
[21] Leibniz [1676, p612-613].
[22] Leibniz [1698].

L'alternative n'est pas large, et finalement, si l'on veut garder un infini, elle revient exactement à n'accepter que l'infini potentiel.

Cependant, tout ce que nous venons de voir de Leibniz ne concerne que l'infini *mathématique*. Car l'infini *métaphysique* a, pour lui, une toute autre place. Citons la phrase très célèbre de Leibniz, –que nous noterons (1) – et qui soutient :

> Je suis tellement pour l'infini actuel, qu'au lieu d'admettre que la nature l'abhorre, comme l'on dit vulgairement, je tiens qu'elle l'affecte partout, pour mieux marquer les perfections de son Auteur. Ainsi je crois qu'il n'y a aucune partie de la matière qui ne soit, je ne dis pas divisible, mais actuellement divisée ; et par conséquent, la moindre parcelle doit être considérée comme un monde plein d'une infinité de créatures différentes. [23]

La vision de l'infini est donc, chez Leibniz, *actuelle* d'un point de vue métaphysique mais pas du tout d'un point de vue mathématique. Cela dit, Cantor pense que Leibniz est « en contradiction avec lui-même *en ce qui concerne* l'infini proprement dit »[24]. Or, nous voulons montrer que Cantor a tort de penser qu'il y a là une contradiction dans la pensée de Leibniz ; et que la position de Leibniz est tout à fait cohérente. Voyons comment l'argumentation de Cantor se présente. En premier lieu, il cite Leibniz :

> « Il n'y a point de nombre infini ni de ligne ou autre quantité infinie, si on les prend pour des Touts véritables. »
> « L'infini véritable n'est pas une modification, c'est l'absolu ; au contraire, dès qu'on [le] modifie on se borne ou forme un fini. »[25]

Il accorde la première assertion, mais pas la seconde. On peut s'étonner à première vue de cet accord avec la première proposition. En effet, elle exhibe une négation de l'infini actuel*. Mais il faut ici être attentif au « Touts » qui comporte une majuscule. Et ce « Touts » a en fait un caractère Absolu[26] ; c'est pour cela que Cantor est d'accord avec Leibniz, en ne se

---

[23] Cité par Cantor [1883b, p179].
[24] Cantor [1883b, p179]. L'infini proprement dit désigne chez Cantor l'infini actuel. Voir [IV.1.1] pour plus de détails.
[25] Cantor [1883b, p179].
[26] Leibniz reprend ici un concept classique. En effet, nous avons déjà signalé que le Tout désigne, dans l'Antiquité, dans une perspective métaphysique, une certaine forme de positivité de l'infini. Voir [I.1.2].

permettant pas d'identifier un objet mathématique avec l'absoluité de Dieu[27]. Pour la seconde proposition, on comprend plus facilement qu'il soit en désaccord, puisque Cantor, véritable arithméticien de l'infini, sait très bien que l'infini n'est pas forcément l'Absolu, et qu'on peut le modifier mathématiquement.

Cantor cite ensuite la citation (1) ci-dessus, en disant que cela fait apparaître « dans une certaine mesure », une contradiction. Or, si Leibniz est pour l'infini actuel*, c'est *uniquement* d'un point de vue métaphysique ; et Leibniz le souligne bien, puisqu'il relie directement l'actualité de l'infini avec Dieu, l' « Auteur ». A aucun moment, Leibniz ne fait de confusion entre infini mathématique et infini métaphysique, ce que Cantor a pourtant essayé de nous laisser penser[28].

Cependant, un autre penseur, lui aussi mathématicien et philosophe va affronter les difficultés de l'infini, en apportant de nouveaux éléments. Il s'agit de Bernard Bolzano, dans *Les paradoxes de l'infini* [1851].

3. Bolzano

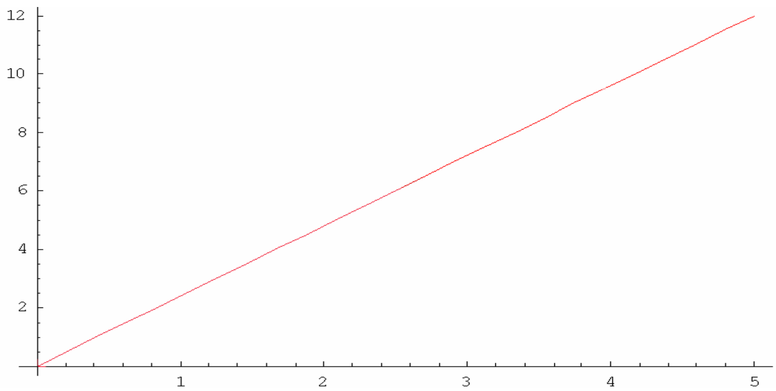
Bolzano n'a pas fait une théorie des nombres infinis. Mais il a le mérite d'avoir affirmé que les mathématiques pouvaient soutenir le concept d'infini actuel*. Il prend comme exemple l'équation $y = \frac{12}{5}x$, qui est représentée par le graphe suivant[29] :

---

[27] L'Absolu est pour Cantor au-delà de l'infini actuel. Voir le chapitre [IV.2] pour plus de détails.

[28] La confusion est donc certainement chez Cantor.

[29] Bolzano [1851, §20, p87].



Il fait alors l'observation suivante (qu'il juge vraie) :

> […] à chaque valeur de *x* dans l'ensemble des grandeurs comprises entre 0 et 5 correspond une valeur de *y* dans l'ensemble des grandeurs comprises entre 0 et 12, qui forme avec *x* une paire, de telle sorte qu'aucun élément d'aucun des deux ensembles ne reste seul ni ne se trouve dans plus d'une paire à la fois. [30]

Bolzano exhibe donc une bijection* de l'intervalle [0,5] sur son intervalle image [0,12]. Mais ces deux ensembles de points ne peuvent pas, pour Bolzano, avoir la même puissance, car il affirme un peu plus haut :

> Il est évident que l'ensemble des grandeurs comprises entre 0 et 5 (ou qui sont inférieures à 5) est infini; de même l'ensemble des grandeurs inférieures à 12. Il n'en est pas moins certain que le deuxième ensemble doit être dit plus grand que le premier, puisque celui-ci n'en est incontestablement qu'une partie.[31]

On voit ici encore resurgir l'axiome Euclidien*, que Bolzano tient pour vrai. Il exhibe donc une propriété qui paraissait jusqu'ici paradoxale, –celle de la possibilité de mettre en bijection un ensemble infini* avec une de ses parties propre– comme une propriété caractéristique des ensembles infinis. Mais les deux infinis [0,5] et [0,12] restent inégaux. Cependant, dans la

[30] Bolzano [1851, §20, p87].
[31] Bolzano [1851, §20, p87].

suite de cet ouvrage Bolzano a, pendant un petit instant, dépassé l'axiome bimillénaire. En prenant les séries associées aux suites que Galilée avait déjà pris comme exemple[32] il déclare :

> Malgré toute apparence du contraire, les deux séries […] comportent en effet le même *ensemble de termes*.[33]

Nous voyons donc que l'ouvrage de Bolzano porte bien son titre, puisque Bolzano est toujours hésitant, et il n'arrive pas à résoudre systématiquement les paradoxes de l'infini. Si la volonté d'accepter l'infini actuel est bien présente, la rigueur a du mal à suivre. De plus, il n'y a pas non plus de nombre infini pour Bolzano. Car dire d'une chose qu'elle est infinie, c'est parler « d'une pluralité *non susceptible d'être déterminée par un simple nombre* »[34]. Corrélativement, s'il n'y a pas de nombre infini, il n'y a pas non plus de calcul possible sur l'infini :

> *Le concept d'un calcul de l'infini* semble, je l'avoue, être une contradiction en soi. Car vouloir *compter* quelque chose, c'est essayer de le *déterminer par des nombres*. Or, selon notre propre définition, l'infini est un ensemble constitué d'une infinité de parties, i.e. un ensemble plus grand que n'importe quel nombre. Comment veut-on alors tenter de déterminer l'infini par des nombres ?[35]

Remarquons deux éléments dans cette citation. Premièrement, Bolzano « avoue » qu'il n'y a pas de calcul de l'infini, ce qui laisse penser qu'il a cherché à rendre possible un tel calcul. En effet, établir des règles de calcul pour l'infini aurait assuré sa légitimité. Deuxièmement, il parle d'un « ensemble plus grand que n'importe quel nombre »; ce qui est encore une formulation proche de l'infini potentiel*, même s'il essaye d'une certaine façon de s'en détacher.

---

[32] Voir un peu plus haut [I.2.1].
[33] Bolzano [1851, p114].
[34] Bolzano [1851, §26, p96].
[35] Bolzano [1851, §28, p102].

Si Cantor a qualifié l'ouvrage de Bolzano de « haute valeur »[36] c'est sans doute plus relativement à la portée et à l'audace philosophique de Bolzano, qu'à la partie mathématique de son ouvrage.

Nous avons vu que le paradoxe de la réflexivité constitue le principal obstacle à la possibilité d'un nombre infini. Comment trancher entre la définition de la grandeur par la bijection*, et par l'inclusion* ? Il faut l'avouer, ces deux notions sont, *a priori*, assez proches. Et c'est précisément ce type de situation qui amène à des paradoxes ; nous n'arrivons pas à distinguer des notions voisines. Car, à chaque fois que l'on essaye de prendre en compte l'infini actuel, on a des bijections qui sont jugées paradoxales, vis-à-vis de ce critère d'inclusion. Si bien qu'au XIX^e siècle –avant Cantor– à une question comme « combien y a-t-il de points sur la droite ? », on ne pouvait que répondre, que ce nombre était *potentiellement* infini. L'infini actuel était donc proscrit dans les mathématiques au temps de Cantor. On peut dépeindre cet état d'esprit de l'époque par une célèbre lettre de Gauss adressée à Schumacher :

> En ce qui concerne votre preuve, je proteste surtout contre l'utilisation d'une quantité infinie comme un tout *complet*, qui n'est en mathématiques jamais autorisée. L'infini n'est qu'une *façon de parler*[37], dont on parle correctement avec des limites.[38]

Pourtant Cantor prétend que ses *nombres* transfinis sont aussi naturels que les autres. Pour comprendre comment il a pu en arriver à une telle affirmation, il nous faut faire un petit détour. En effet, il nous faut examiner en profondeur ce qu'est un nombre et essayer de saisir son essence. *Qu'est-ce qu'un nombre ?* Cette question occupera notre deuxième partie.

---

[36] Cantor [1883b, p180].
[37] En français dans le texte.
[38] Cité dans Dauben [1979, p120]. Lettre du 12 juillet 1831. Voir la lettre #396 dans Gauss [1860, p269].

II. Les pré-requis à la théorie des nombres infinis.

1. Extension et généralisation du nombre.

Dans ce chapitre, nous allons montrer comment à partir des entiers naturels, il est possible de construire d'autres ensembles de nombres. En présentant les ensembles de nombres de la sorte, nous ne voulons pas dire que toutes les mathématiques sont fondées sur les entiers naturels. Ces entiers n'ont pas plus de réalité que les autres nombres. La preuve en est qu'il est possible d'axiomatiser la théorie des nombres entiers, comme l'ont fait Peano et Frege. De plus, nous ne prétendons pas du tout ici à la parfaite rigueur mathématique. Rigueur qui aurait nécessité des développements bien plus longs, et pas forcément nécessaires à notre point de vue[39]. Car nous voulons simplement montrer le principe de fonctionnement de l'extension du nombre. De cette manière, le lecteur pourra juger si l'extension du nombre, au nombre infini, est plus ou moins naturelle que les autres extensions de nombres.

Pourquoi a-t-on besoin d'élargir la notion de nombre ? Les nouveaux nombres apparaissent le plus souvent pour donner un sens à certains calculs qui n'en avaient pas. Nous allons donc emprunter la voie de l'extension algébrique* du nombre.

1.1 Nombres négatifs

Comment peut-on légitimer l'existence de nombres négatifs ? Cette question paraît peut-être rudimentaire, et presque inutile aujourd'hui, mais il faut savoir que les nombres négatifs se sont développés relativement tard dans l'histoire des mathématiques. Car, même s'ils

[39] Néanmoins, on pourra se reporter à une présentation moderne, très rigoureuse et synthétique de la construction du système des nombres dans [REINHARDT et SOEDER, p53-59]. Notamment, nous ne montrerons pas que l'ensemble *b* obtenu par l'extension doit pouvoir être plongé dans l'ensemble de départ *a*.

étaient sans doute déjà présent très tôt, sous la figure de dettes, ce n'est, en Occident qu'en 1484 que le mathématicien français Nicolas Chuquet utilise les nombres négatifs explicitement. Dans ce qui suit, nous présenterons l'extension algébrique du nombre en nous inspirant d'un ouvrage très abouti, extrêmement rigoureux, perçant, philosophique, tout en étant didactique; nous voulons parler d'une des perles de la philosophie mathématique, l'ouvrage de Couturat, *De l'infini mathématique*[40].

Pour commencer notre extension algébrique, plaçons nous *uniquement* dans le domaine $\mathbb{N}$ des entiers naturels positifs. Rappelons alors qu'une équation est résolue quand on a réussi à la mettre sous la forme

$$x = \mathrm{A}$$

où A est connu. Mais, pour obtenir une équation sous une telle forme, il faudra faire des opérations sur cette égalité, comme par exemple retrancher un même nombre de chaque côté. Prenons l'exemple de l'équation

$$b + x = a \qquad (1)$$

où $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$. Pour résoudre l'équation, on fait "passer" b du côté droit de l'équation; c'est-à-dire que l'on retranche b à chaque membre de l'équation. On a ainsi le résultat

$$x = a - b \qquad (2)$$

Mais cette formule n'a de sens que si $a>b$, car nous sommes dans un domaine qui ne contient pas de nombres négatifs. Si $a<b$, l'équation sera alors dite impossible, et $(a - b)$ ne sera alors qu'un symbole d'impossibilité. Très naturellement, nous avons envie de dire que notre équation (1) a *toujours* une solution : (2). Si nous voulons cette généralisation, il faudra créer

[40] Plus précisément, nous suivrons Couturat [1896, Première partie, livre II, p81-115].

un nouveau nombre dans le cas où $a<b$, pour représenter le symbole $(a - b)$. Il s'agit du *nombre négatif*. Nous avons donc généralisé le nombre du point de vue de la soustraction. Autrement dit, d'un point de vue moderne, cela revient à considérer non plus la structure $<\mathbb{N},+,*,0,1>$, mais le groupe des entiers relatifs $<\mathbb{Z}, +,0>$[41]. Mais on remarque que ce groupe ne contient pas la multiplication. Il faudrait donc l'étendre pour le rendre complet avec cette opération, et son inverse, la division. Avant cela, montrons une propriété importante des nombres relatifs : leur dénombrabilité.

1.1.1 Dénombrabilité de l'ensemble des entiers relatifs.

On peut démontrer que l'ensemble que nous venons de construire est *dénombrable**. C'est-à-dire, par définition, qu'il peut être *mis sous forme d'une suite* semblable à celle des entiers naturels**. On montre ainsi que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ont la même puissance, en exhibant la bijection* ci-dessous :

$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	6	…
$\mathbb{Z}$	0	-1	1	-2	2	-3	3	…

Plus rigoureusement, la fonction* f bijective en question est la suivante :

$$\begin{cases} f(0) = 0 & \\ n \longmapsto f(n) = -n & \text{si } n \text{ est impair} \\ = \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

1.2 Nombres rationnels

Maintenant, nous pouvons considérer l'équation du premier degré suivante :

[41] Pour la théorie des groupes, on pourra consulter l'ouvrage bien conçu de Lang [1976].

$$bx = a \qquad (3)$$

avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$. Sa solution sera bien évidemment,

$$x = \frac{a}{b} \qquad (4)$$

Cependant, cette solution n'a de sens que si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$. Par exemple, pour $a = 4$ et $b = 2$, l'équation (3) devient $2x = 4$ et sa solution (4) $x = \frac{4}{2} = 2$. Donc, ici $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$.

Mais on imagine très bien que le cas se présente rarement, et que si on avait eu $a = 2$ et $b = 4$, la solution aurait été $x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Et donc que $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Z}$. L'expression $\frac{a}{b}$ serait à nouveau symbole d'impossibilité. Ici encore, une généralisation semble donc s'imposer. Nous voulons pouvoir dire que la solution (4) est valable dans tous les cas, de même que l'était la solution (2) en [II.1.1]. Il faudra donc créer un nouveau nombre pour le cas $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Z}$, il s'agit du *nombre rationnel*. D'un point de vue moderne, nous pouvons maintenant engendrer le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels, $<\mathbb{Q}^*, +, *, 0, 1>$. Rigoureusement, nous devrions vérifier que $\mathbb{Z}$ peut être « plongé » dans $\mathbb{Q}$. C'est-à-dire montrer que l'on peut faire correspondre les entiers relatifs aux rationnels de dénominateur 1.

1.2.1 La division par zéro

Remarquons un point qui est d'importance. Nous considérons le corps $\mathbb{Q}^*$, c'est-à-dire le corps des rationnels, privé de zéro. Pourquoi se priver du zéro ? Citons Couturat :

> Il y a pourtant une exception, une seule, à la propriété essentielle de l'ensemble des nombres rationnels : la division par *zéro* reste impossible, bien que *zéro* fasse partie de l'ensemble; cet ensemble n'est donc

> pas absolument complet au point de vue de la généralité de la division. C'est là une lacune d'autant plus choquante qu'elle est unique.[42]

Pour examiner cette lacune, reprenons notre équation (3)

$$bx = a$$

et voyons ce qui se passe lorsque *a* ou *b* prend la valeur zéro.

Si $a = 0$ et $b \neq 0$, la solution est claire, c'est

$$x = \frac{0}{b}$$

Ou plus simplement $x = 0$. Cela en vertu de la propriété suivante; le produit de deux nombres est nul *si et seulement si* un des facteurs est nul.

Mais si $b = 0$ et $a \neq 0$, la solution de notre équation serait

$$x = \frac{a}{0} \quad (5)$$

Et on prétend couramment que cette expression n'a pas de sens, car la division par zéro est impossible. Pourquoi cette expression est-elle vide de sens ? Pourtant, on a bien défini le produit par zéro quand nous avons affirmé que " le produit de deux nombres est nul si et seulement si un des facteurs est nul."; alors pourquoi ne pas aussi statuer quelque chose pour la division par zéro ? Reprenons notre solution problématique (5) et essayons d'examiner le cas particulier où $a = 0$. Notre solution serait alors $\frac{0}{0}$, solution de l'équation

$$0 \times x = 0$$

Citons l'explication de Couturat :

---

[42] Couturat [1896, p91].

> Quel est le nombre qui multiplié par *zéro* produit *zéro* ? La réponse est évidemment : un nombre quelconque, car tous les nombres multipliés par *zéro* donnent pour produit *zéro*. Ainsi la fraction $\frac{0}{0}$ représente n'importe quel nombre entier ou fractionnaire; c'est pourquoi on l'appelle un *symbole d'indétermination.* [43]

Nous pouvons maintenant revenir à notre solution générale (5) et nous demander ce que peut signifier $\frac{a}{0}$, où $a \neq 0$, dans l'équation

$$0 \times x = a$$

Couturat répond :

> Quel est le nombre qui multiplié par *zéro* produit *a* ? La réponse est : aucun, puisque tout nombre multiplié par *zéro* donne *zéro* pour produit. C'est pourquoi l'on dit que la fraction $\frac{a}{0}$ est un *symbole d'impossibilité*.[44]

Couturat s'interroge sur la légitimité d'un rejet de telles fractions, puis, après avoir dénoncé quelques cercles vicieux, en arrive à une objection plus sérieuse : « si l'on admettait les fractions $\frac{a}{0}$, la division par zéro serait tantôt impossible, tantôt indéterminée. »[45] Ce qui serait un problème sérieux, puisque la division n'aurait plus son caractère univoque. Ainsi, le quotient $\frac{a}{0}$ est impossible parce qu'une *infinité* de fractions de la forme $\frac{a}{0}$ le représentent. Mais on peut rétorquer qu'une fraction quelconque, comme par exemple $\frac{2}{3}$ est aussi représentée par une infinité de fractions :

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \cdots$$

---

[43] Couturat [1896, p93].
[44] Couturat [1896, p94].
[45] Couturat [1896, p96].

Le seul problème se situe donc dans la véritable indétermination de $\frac{0}{0}$; mais ce cas ne se présente que rarement. C'est pourquoi Couturat propose alors d'introduire les fractions de la forme $\frac{a}{0}$, qui sont l'inverse de zéro, par l'infini. C'est-à-dire :

$$\frac{a}{0} = \frac{1}{0} = \infty$$

Couturat conclu alors :

> Toutes ces considérations font de plus en plus éclater la vérité de cette proposition : c'est le *zéro* qui est la source de l'*infini*; et en effet, dès qu'on accepte le nombre *zéro* comme multiplicateur, on n'a plus de raison pour le rejeter comme diviseur, car on est obligé de répondre à la question : Quel est le nombre qui, multiplié par *zéro*, produit tel nombre ? En résumé, et c'est la conclusion qui ressort de toute cette discussion, il faut, ou bien exclure à la fois *zéro* et l'*infini* de l'ensemble des nombres fractionnaires, ou bien les y admettre au même titre.[46]

Ces considérations, ne sont pas exemptes de problèmes. Couturat propose, malheureusement sans vraiment le développer, d'introduire un zéro et un infini du deuxième ordre. En tous cas, cela nous montre que l'infini émerge avec une grande nécessité lorsqu'on entreprend d'étendre la notion de nombre.

A présent, avant de voir la construction des réels, démontrons tout de même une propriété importante des rationnels : leur dénombrabilité.

1.2.2 <u>La dénombrabilité des rationnels</u>

Nous voulons montrer que l'ensemble $\mathbb{Q}$ que nous venons de construire est, lui aussi, dénombrable. Montrons d'abord que $\mathbb{Q}^+$ l'est[47]. Ecrivons les fractions par ordre de grandeur. Sur une même ligne les fractions ayant 1 comme dénominateur, en dessous les fractions ayant 2 comme dénominateur, et ainsi de suite.

---

[46] Couturat [1896, p99].

[47] Nous empruntons la présentation de cette démonstration à Kamke [1964, p5-6].

Nous obtenons alors les suites ci-dessous :

$$\begin{array}{cccc}
1, & 2, & 3, & 4, \dots \\[6pt]
\frac{1}{2}, & \frac{2}{2}, & \frac{3}{2}, & \frac{4}{2}, \dots \\[6pt]
\frac{1}{3}, & \frac{2}{3}, & \frac{3}{3}, & \frac{4}{3}, \dots \\[6pt]
\frac{1}{4}, & \frac{2}{4}, & \frac{3}{4}, & \frac{4}{4}, \dots
\end{array}$$

Mais on peut également écrire les fractions en suivant le « serpentin » tracé ci-dessus. En ne gardant que les fractions irréductibles, et en supprimant les fractions déjà rencontrées, on obtient les rationnels positifs

$$1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3, 4, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

Suite que nous désignerons par $\{r_1, r_2, r_3, r_4, \dots\}$. L'ensemble $\mathbb{Q}^+$ étant maintenant sous la forme d'une suite semblable à celle des entiers naturels, il est dénombrable. Pour montrer que l'ensemble des rationnels, positifs et négatifs, est lui aussi dénombrable, il suffit de prendre la suite $\{0, -r_1, r_1, r_2, -r_2, \dots\}$. L'ensemble des rationnels est donc bien dénombrable.

Nous ne détaillerons pas la construction des nombres complexes*, mais nous dirons que leur construction se fait de manière très semblable aux précédentes. En effet, ils ont été inventés de manière à donner des solutions à des équations du type $x^2+1 = 0$, qui n'admettent pas de solutions réelles. Le lecteur curieux pourra se reporter à Couturat [1896, p101-115] pour le détail. Voyons plutôt comment Cantor propose de construire les nombres réels, ensemble de grande importance, puisqu'il constitue ce que l'on appelle le *continu**.

1.3 Nombres réels

La théorie des nombres réels de Cantor est développée principalement dans les *Grundlagen* [1883, §9][48]. Il commence par admettre l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels, dont il énonce les propriétés :

1. Fermeture pour les quatre opérations élémentaires (+, -, ×, ÷)
2. Relation d'ordre total. Soit deux rationnels p et q, il est toujours possible de dire s'il sont égaux ou différents, relativement à la relation *strictement inférieur* : <.
3. Propriété de densité : entre deux rationnels p et q, il en existe toujours au moins un autre.[49]

La notion de suite fondamentale dans $\mathbb{Q}$ est ensuite définie[50]. C'est une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de rationnels telle que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ $(u_{n+m} - u_m)$ devient arbitrairement fini quand n croît. De deux choses l'une : ou bien la suite est convergente* dans $\mathbb{Q}$, ou bien elle ne l'est pas. Par exemple, la suite infinie que nous avons vu en [I.1.2] est convergente dans $\mathbb{Q}$, car sa limite est 1 :

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

[48] Cantor [1872] développe aussi une théorie des nombres réels, plus technique. Voir l'ouvrage de Belna [2000, p60-74] pour plus de détails; ouvrage dont nous nous inspirons quelque peu pour cette sous-partie.
[49] Belna [2000, p62, note 24] parle du "caractère continu de $\mathbb{Q}$". C'est une formulation ambiguë, puisqu'elle peut faire penser que $\mathbb{Q}$ est continu, ce qui est faux. Il aurait fallu préciser que $\mathbb{Q}$ n'a qu'une seule propriété du continu, et qui ne suffit pas pour faire un continu : celle d'être dense.
[50] Aujourd'hui, on parle de "suite de Cauchy".

Une suite de Cauchy* peut aussi avoir une limite rationnelle, comme par exemple :

$$1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots, \frac{1}{10^n}, \ldots$$

Dont la limite est clairement $\frac{10}{9}$.

Cependant, une suite de Cauchy peut aussi être non convergente* dans $\mathbb{Q}$, et avoir une limite irrationnelle*. En voici un exemple, découvert par Leibniz, et dont la limite est $\frac{\pi}{4}$:

$$u_1 = 1$$

$$u_2 = 1 - \frac{1}{3}$$

$$u_3 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$$

$$u_4 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$$

Le fait qu'il existe des limites non rationnelles prouve que $\mathbb{Q}$ n'est pas complet pour l'opération *limite d'une suite de Cauchy*. Si une telle suite n'est pas convergente* dans $\mathbb{Q}$, on défini alors un nouveau nombre irrationnel* *b*, comme étant sa limite. Cantor appelle B le domaine constitué des limites des suites de Cauchy non convergentes dans $\mathbb{Q}$. Nous ne détaillerons pas la suite de l'exposé qui consiste à prouver que B $\cup$ $\mathbb{Q}$ possède les propriétés 1, 2, 3 énoncées plus haut. Si on admet que ces trois propriétés sont démontrées, B $\cup$ $\mathbb{Q}$ n'est autre que l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels. Plus simplement, sans suivre Cantor, on peut identifier $\mathbb{R}$ à l'ensemble de toutes les suites de Cauchy possibles.

Il faut noter tout de même que cette construction n'est pas parfaite. En effet, un irrationnel est défini comme la limite d'une suite divergente dans $\mathbb{Q}$. Or, une suite ne peut pas être divergente et avoir une limite, car la notion de convergence* est relative à l'ensemble examiné. On sait aujourd'hui résoudre ce problème en définissant un nombre irrationnel comme une classe d'équivalence de deux suites dont la différence tend vers 0.[51] Cela dit, nous voulons mettre l'accent sur deux points plus essentiels. D'une part, les réels ont bien été définis à partir de l'ensemble de nombres précédemment construits, celui des rationnels. D'autre part, *chaque* irrationnel est défini par une suite de Cauchy*, donc une suite infinie. Tandis qu'il nous fallait seulement un couple d'entiers pour créer un nombre rationnel, il faut une *infinité* de rationnels pour produire *un seul* nombre réel. On peut donc déjà pressentir la richesse de $\mathbb{R}$[52].

Nous avons vu que les nombres réels sont crées à partir de séries infinies. Mais nous avons toujours le sentiment d'être en présence d'entités bien déterminées ; par exemple π, même si ses décimales sont infinies, n'en demeure pas moins appréhendable comme la circonférence du cercle de rayon 1. Dès lors, qu'en est-il des nombres infinis ? Comment Cantor va-t-il les introduire ? Pour répondre à ces questions, il nous faut faire un petit approfondissement de quelques concepts de base de théorie des ensembles, et commencer à avoir une vision ensembliste des mathématiques. Ce que nous allons faire, avant de montrer comment engendrer un nombre infini.

---

[51] Voir Belna [2000, p66-74] pour plus de détails sur les problèmes et les solutions de la construction des réels de Cantor.

[52] En anticipant de beaucoup sur notre troisième partie, on peut préciser cette remarque, car elle est très utile pour saisir ce que peut-être une différence de puissance d'infini. Nous avons démontré que l'ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable [II.1.2.2]. Or l'ensemble des suites de Cauchy est l'ensemble de toutes les suites infinies possibles de rationnels. Cet ensemble a donc la puissance de l'ensemble des parties de $\mathbb{Q}$. C'est-à-dire, en termes de cardinalités, $2^{\aleph_0}=c$, la puissance du continu.

2. Théorie des ensembles : concepts fondamentaux.

2.1 La bijection

La bijection* est sans doute l'un des concepts les plus fondamentaux pour la théorie des ensembles. D'ailleurs, nous l'avons déjà utilisé à plusieurs reprises dans notre travail[53]. Si Cantor utilise la bijection dans beaucoup de ses écrits précédents 1878, ce n'est que dans un article de cette année qu'il l'utilise pour définir la notion de puissance et d'équivalence, en toute généralité. Voici ce qu'il pose dans les toutes premières lignes de l'article :

> Si on peut faire correspondre élément par élément deux *ensembles* bien définis *M* et *N* par une opération à sens unique (et quand on peut le faire d'une manière, on peut le faire aussi de beaucoup d'autres), convenons pour la suite de nous exprimer en disant que ces *ensembles* ont la même *puissance* ou encore qu'ils sont *équivalents*.[54]

Cette définition peut susciter deux remarques[55]. D'une part, Cantor ne précise pas si M et N doivent être finis ou infinis. Cela montre bien que sa définition est très générale et fonctionne aussi bien dans le fini que dans l'infini. Nous verrons plus loin que la bijection est la clé qui permet de différentier les tailles des ensembles infinis. En effet, s'il n'y a pas de bijection entre deux ensembles infinis, c'est qu'ils ne sont pas équivalents, et qu'ils ont donc des tailles différentes[56]. La bijection sera donc un élément fondamental, au centre des démonstrations que nous présenterons en [III.1] et [III.2]. D'autre part, on peut noter que la notion de puissance ainsi définie est très primitive. Pour donner un exemple de la vie courante, considérons le nombre de fourchettes et de couteaux dans une salle de restaurant. Je n'ai pas

---

[53] Typiquement pour les démonstrations de la dénombrabilité de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ ([II.1.1.1] et [II.1.2.2]) ; mais aussi pour montrer que $\mathbb{N}$ et les entiers pairs étaient « aussi grands » ([I.1.1]) ; ou encore avec Galilée, quand nous avons vu que $\mathbb{N}$ et les carrés ont le même nombre d'éléments [I.2.1].

[54] Cantor [1878fr, p30].

[55] Une troisième remarque concernant la parenthèse s'impose. Intuitivement, et pour reprendre notre démonstration [II.1.2.2], il suffit de se dire qu'on aurait très bien pu tracer le « serpentin » autrement. On aurait donc eu une autre manière de faire la bijection.

[56] On dit aussi qu'ils sont de *cardinalités* différentes. Cependant, ce concept n'est introduit chez Cantor explicitement qu'en [1895], mais nous l'introduisons maintenant pour faciliter l'exposition.

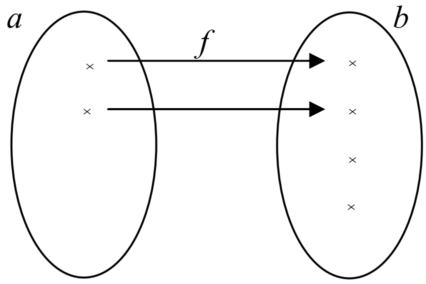
besoin de savoir compter pour « voir » qu'il y a autant de fourchettes que de couteaux. Il suffit que je remarque qu'à chaque fourchette correspond un couteau, et à chaque couteau une fourchette, c'est-à-dire qu'il y a une bijection entre l'ensemble des fourchettes et l'ensemble des couteaux. Je peux donc constater qu'il y a autant de fourchettes que de couteaux, sans connaître leur nombre. La bijection permet donc de déterminer si deux ensembles ont *même nombre d'éléments*, sans savoir combien ils ont d'éléments. De part l'abstraction et la généralité de la définition, la notion de bijection est donc antérieure à celle du nombre. Nous verrons dans un moment comment on défini plus précisément le nombre [II.2.2]. Mais auparavant, essayons d'affiner le concept de bijection en le décomposant, avec l'injection et la surjection. Notons que ces explications ne sont pas des raffinements superflus, mais bien des précisions fondamentales pour comprendre notre troisième chapitre.

2.1.1 Injection

L'injection, la surjection et la bijection sont toutes des propriétés de relations fonctionnelles. En mathématiques, les relations les plus courantes et les plus intéressantes sont les *fonctions** dont nous avons d'ailleurs déjà fait usage[57]. On parle d'injection et de surjection d'un ensemble dans un autre. Soit alors deux ensembles a et b, et une fonction f de a dans b. Par définition f est injective *si et seulement si* un élément de l'ensemble d'arrivée a *au plus* un antécédent.

[57] Plus précisément, l'*application* qui est une relation fonctionnelle et totale, mais nous ne ferons pas de distinction, et nous emploierons le mot fonction pour application.

Pour comprendre cela, voici un exemple de diagramme sagittal où f est injective :

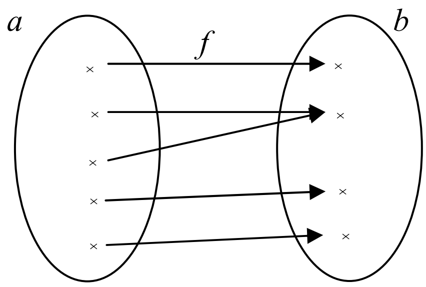


Plus précisément, f est injective, *si et seulement si* $\forall x \in a \ \ \forall y \in a \ \ [f(x) = f(y) \longrightarrow x = y]$

On remarque que tous les éléments de b n'ont pas forcément d'antécédent.

2.1.2 Surjection

Une fonction f est surjective *si et seulement si* un élément de l'ensemble d'arrivée admet *au moins* un antécédent par f.



On remarque que tous les éléments de b ont au moins un antécédent.

Plus précisément, f est surjective, *si et seulement si* $\forall y \in b \ \ \exists\, x \in a \ \ [f(x) = y]$

Nous pouvons maintenant énoncer une nouvelle définition de la bijection. Une fonction est bijective *si et seulement si* elle est à la fois injective *et* surjective.

2.2 Les nombres sont des ensembles.

Avant de voir que les nombres peuvent être considérés comme des ensembles, il nous faut examiner comment définir un ensemble. Il en existe deux manières. La première est d'énumérer ses éléments. C'est la définition par *extension*. Par exemple :

$$x = \{0, 1, 2, 3\}$$

Mais je peux définir ce même ensemble sans énumérer ses éléments, simplement en énonçant la propriété qui permet de le constituer. Cette seconde manière de définir un ensemble, est dite définie par *compréhension*[58]. Par exemple notre ensemble x peut être défini comme ceci :

$$x = \{x; x \in \mathbb{N} \text{ et } x < 4\}$$

Ce qui se lit : l'ensemble des x tels que x est un entier naturel et x est strictement inférieur à 4. On peut s'interroger sur l'intérêt d'une définition par compréhension. Mais l'intérêt est immédiat dès que l'on veut manipuler des objets infinis. En effet, seule la définition par compréhension, qui donnera une loi de génération de l'ensemble pourra être satisfaisante. Tandis qu'une définition par extension ne pourra jamais fonctionner, car on ne pourra évidement jamais énumérer tous les éléments d'un ensemble infini*.

Pour la définition du nombre d'un point de vue ensembliste, voyons comment Russell présente la chose :

> Le nombre d'une classe est la classe des classes qui lui sont équivalentes.[59]

En négligeant un peu de rigueur, on peut remplacer « classe » par « ensemble ». Le nombre d'un ensemble est donc l'ensemble des ensembles qui lui sont équivalents, ou plutôt *la classe*

[58] Ce vocabulaire moderne est dû à Bertrand Russell ; mais, conceptuellement, Cantor avait l'idée, puisqu'il parle souvent de « loi de génération » pour un ensemble. Nous en reparlerons en [III.1].
[59] Russell [1919fr, p62].

d'équivalence de cet ensemble[60]. Essayons d'expliquer cette formulation au premier abord un peu énigmatique. Prenons l'exemple du nombre 2. Le nombre 2 est en fait l'ensemble des paires. C'est-à-dire qu'il est l'ensemble qui contient toutes les paires possibles. Le nombre 2 est donc ce qui est commun à deux chiens, deux voitures, deux insectes, etc… De même pour le nombre 3, qui est l'ensemble de tous les triplets possibles.

Maintenant que nous savons que les nombres sont des ensembles, nous pouvons définir les relations inférieur, supérieur et l'égalité, en termes d'injection, de surjection, et de bijection*, comme suit.

Soit a et b deux ensembles[61].

$a \geq b$ *si et seulement si* il n'existe pas d'injection de a dans b.

$a \leq b$ *si et seulement si* il n'existe pas de surjection de a dans b.

$a=b$ *si et seulement si* il existe une bijection de a dans b.

Lorsqu'on défini ainsi le nombre, on se détache totalement du rapprochement que l'on a tendance à faire facilement, et qui est source de confusion dès que l'on veut de la précision. En effet, on associe intuitivement l'acte de compter avec la notion de nombre. De fait, l'acte de compter n'utilise finalement que l'infini potentiel, puisque l'on pense toujours pouvoir « ajouter un ». Mais nos nouvelles définitions nous permettent d'évacuer totalement cette idée, qui ne pouvait en fait atteindre que des nombres finis. Il n'y a alors plus de raison de limiter les nombres au fini, sachant que l'on peut très bien considérer nos ensembles a et b comme étant infinis.

[60] Cette négligence est tout de même importante, car elle nous fait tomber sous le paradoxe de Russel. En effet, lorsque nous disons que le nombre d'un ensemble est *l'ensemble de tous les ensembles* qui lui sont équivalents, cela n'est pas correct. Parler de *classes* permet d'éviter de considérer l'ensemble de tous les ensembles, qui est un ensemble paradoxal.

[61] Notons que les définitions qui vont suivre ne valent que pour le nombre *cardinal*. Voir la suite pour plus de précisions sur les nombres infinis.

A présent, des ensembles et donc aussi des nombres infinis peuvent émerger des seules notions d'injection, de surjection et de bijection ; et peuvent être comparés.

2.3 Nombres infinis

Cantor ouvre son ouvrage phare de 1883, les *Grundlagen*, en disant :

> Telle que je l'ai menée jusqu'à maintenant, la présentation de mes recherches touchant la théorie des ensembles en est venue à un point où je ne peux la poursuivre qu'en étendant au-delà de ses limites antérieures le concept de nombre entier existant réellement. En vérité, cette extension s'oriente dans une direction où, à ma connaissance, nul ne l'avait jusqu'à présent cherchée.[62]

Il faut de la prudence, car seule une fine distinction permet de définir rigoureusement le nombre dans l'infini. En conséquence, voyons d'abord comment peut se définir un ensemble infini* [II.2.3.1]; puis examinons ensuite la différence entre cardinal* [II.2.3.2] et ordinal* [II.2.3.3], distinction vitale pour ne pas se perdre dans l'infini.

2.3.1 Définition de Dedekind d'un ensemble infini

Dedekind (1831-1916) a fait de la propriété réflexive des ensembles infinis une définition. Remarquons que c'est une définition tout à fait renversante, car elle pose comme *définition* une propriété qui était à la source des *paradoxes* de réflexivité que nous avons vu[63]. L'aspect contradictoire de l'infini est ainsi totalement détruit. Historiquement, cette définition est également importante, puisque c'est encore celle-là que nous utilisons aujourd'hui. Citons la préface de la seconde édition du célèbre article intitulé *Les nombres. Que sont-ils et à quoi servent-ils ?* :

[62] Cantor [1883b, §1, p165]. Traduction de Belna [2000, p113].
[63] Chez Aristote, Euclide, Galilée, Leibniz, Bolzano ... (voir [I]) et sûrement encore chez bien d'autres penseurs.

> La propriété que j'ai utilisée pour définir (64)[64] le système infini a déjà été soulignée avant que paraisse mon essai, par G. Cantor [1878] et même déjà par Bolzano [1851, §20][65]. Mais aucun de ces auteurs n'a essayé de transformer cette propriété en définition de l'infini et de construire d'une façon rigoureusement logique la science des nombres sur cette base ; or, c'est précisément en cela que consiste le contenu de mon pénible travail, que j'avais pour l'essentiel achevé déjà plusieurs années avant que ne paraisse l'essai de Cantor et à un moment où le nom même de l'ouvrage de Bolzano m'était totalement inconnu. [66]

Notons que nous avons ici, comme souvent en histoire des sciences, une sorte de triple « découverte » simultanée d'une propriété positive des ensembles infinis : leur réflexivité. Cependant, cette remarque mérite d'être nuancée ; Bolzano n'a fait qu'apercevoir cette propriété et Cantor la signale simplement. Mais Dedekind, qui est plus soucieux des fondements des mathématiques que Cantor, en fait une véritable définition de l'infini.

Comment se présente ce fameux point (64) de Dedekind ? Le voici :

> 64. Définition : un système S est dit infini quand il est semblable à une de ses parties propres (32) ; dans le cas opposé, S est dit système fini.[67]

On peut faire deux remarques sur ce paragraphe. D'une part, l'infini est défini primitivement par rapport au fini. En effet, le fini est bien défini comme la *négation* de l'infini[68]. Ce qui inverse la logique de l'étymologie du mot « infini ». De plus, en mathématiques modernes, on remarque que la propriété « être infini » peut être définie en logique du premier ordre, tandis que « être fini » ne peut se définir qu'en logique du second ordre. D'autre part, il y a une note sur ce paragraphe qui spécifie en particulier :

> Tous les autres essais faits pour différencier l'infini du fini que je connais me paraissent si peu réussis que je crois pouvoir renoncer à en faire une critique.

Cette remarque tranchante clôt le débat sur la définition d'un ensemble infini.

---

[64] Ce chiffre renvoie à la numérotation de l'article de Dedekind.
[65] Pour plus de clarté, nous avons adapté les références de Dedekind à notre système de référence.
[66] Dedekind [1888fr, p 73].
[67] Dedekind [1888fr, p93].
[68] On peut s'interroger sur la pertinence de la définition du fini comme étant la négation de l'infini. En effet, cette définition peut paraître très artificielle. Nous serions plutôt porter à définir un nombre fini comme étant simplement un entier naturel quelconque. Cette définition est aussi correcte, mais la démonstration qu'elle est équivalente à la définition du fini de Dedekind n'a rien d'évident.

2.3.2 Nombre cardinal

Revenons maintenant à la définition du nombre, en commençant par le nombre cardinal*, qui cette fois, pourra être infini. Commençons par citer la définition de Cantor, de 1895 :

> Nous appelons "puissance" ou "nombre cardinal" de *M* le concept général qui, à l'aide de notre faculté active de pensée, résulte de l'ensemble *M* quand nous faisons abstraction de la nature de ses différents éléments *m* et de l'ordre dans lequel ils sont donnés.[69]

On remarquera que Cantor a choisi sa notation en fonction de sa définition, puisqu'il note le cardinal de *M* par :

$$\overline{\overline{M}}$$

où les deux barres du haut font référence aux deux actes d'abstraction[70].

Un exemple de nombre cardinal d'un ensemble fini est celui de notre ensemble x proposé en plus haut en [II.2.2]. On avait $x = \{0, 1, 2, 3\}$, d'où card $(x) = 4$. On constate que le cardinal de x n'est autre que le nombre que nous utilisons tous les jours. Mais nous pouvons aussi –et surtout– appliquer les nombres cardinaux aux ensembles infinis que nous avons construits. Cantor, pour bien montrer la nouveauté de ses nombres, a décidé de désigner le cardinal des ensembles infinis par un nouvel alphabet, hébraïque. Un des cardinaux infinis le plus courant est celui des entiers naturels, noté $\aleph_0$. On voit aussi qu'il y a l'indice 0 apposé à ce nouveau symbole, ce qui suggère déjà qu'il va être possible d'avoir des cardinaux infinis plus grands que d'autres... Cela dit, comme nous avons montré que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables*, ils ont aussi le même cardinal que $\mathbb{N}$. Ce que l'on exprime par :

$$\text{card}(\mathbb{N}) = \text{card}(\mathbb{Z}) = \text{card}(\mathbb{Q}) = \aleph_0.$$

---

[69] Cantor [1895-1897, p282].

[70] Aujourd'hui, cette notation est remplacée par card (*M*). La définition de Cantor sera cependant très critiquée, car elle est plutôt vague et psychologique. Cantor parle de « faculté de pensée », de « faire abstraction ». Ces notions sont bien sûr trop imprécises pour être exprimées mathématiquement.

Quel est le cardinal de $\mathbb{R}$? Nous gardons la réponse –plus difficile– à cette question pour notre troisième partie.

De plus, la notion de cardinal est très intéressante, car elle peut s'appliquer à tout type d'objets mathématiques. Cantor avait déjà bien saisi que la théorie des ensembles, avec la notion de cardinalité, permettait de faire communiquer les différentes branches des mathématiques. En effet, en introduisant les seules notions d'ensemble et de puissance, « […] la *théorie des ensembles* ainsi conçue embrasse l'arithmétique, la théorie des fonctions et la géométrie; grâce au concept de puissance, elle les rassemble en une unité supérieure. »[71]

2.3.3 Nombre ordinal

Remarquons tout de suite la symétrie de notation, entre cardinal et ordinal. En effet, Cantor note le nombre ordinal* avec une seule barre, représentant l'abstraction de la nature des éléments, tout en conservant l'ordre :

$$\overline{M}$$

Une autre remarque importante est que les ordinaux ont acquis le statut de nombre dès les *Grundlagen*, tandis que le nombre cardinal remplacera la notion de puissance qu'en 1887, dans les *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten* [1887-1888]. Il y a donc de fortes raisons de penser que le nombre ordinal a un intérêt mathématique plus immédiat que celui de cardinal. Même si le concept de puissance reste bien entendu très intéressant, le penser comme un nombre n'avait pas pour Cantor un intérêt direct. Voyons à présent comment Cantor introduit son premier ordinal. Il présente la suite

[71] Cantor [1882, p152].

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots \quad (\mathrm{I})$$

qui n'est autre que la suite des entiers naturels. Il défini alors ω comme étant le nombre *ordinal* [Anzahl] de cette collection[72]. Il peut en effet être considéré comme la limite de la suite (I).

Pour légitimer ce nombre Cantor ajoute :

> Si contradictoire que ce serait de parler d'un plus grand nombre de la classe (I), il n'y a par ailleurs rien de choquant de penser un *nouveau* nombre, que nous nommerons ω, qui devra être l'expression de la totalité du système (I) dans sa loi naturelle de succession. [73]

On a donc ici l'affirmation parfaitement positive de l'infini, qui peut se traduire par l'affirmation de l'existence d'un nombre infini, plus grand que tous les autres; ou, plus précisément par la formule suivante :

$$\exists \omega \; \forall x \quad x < \omega$$

Formule qui est bien entendu à comparer avec celle de l'infini potentiel*, que nous évoquions avec Leibniz [I.2.1] :

$$\forall x \; \exists y \quad x < y$$

En comparant nos deux formules, on remarque –outre que y=ω dans la première– qu'il y a eu une inversion de quantificateurs. C'est-à-dire que Cantor a affirmé l'*existence d'un ensemble infini actuel**, alors que la conception de l'infini potentiel ne permettait que de trouver des nombres toujours plus grands.

[72] Il ne faut pas oublier que le nombre doit être considéré comme un ensemble, que ce soit un cardinal ou un ordinal.
[73] Cantor [1883b, §11, p195].

Quels peuvent être des exemples d'ordinaux différents ? Nous avons bien entendu

$$\{<1, 2, 3, \ldots>\}=\omega.$$

Mais

$$\{<2, 3, 4, \ldots, 1>\} = \omega+1$$

tout comme

$$\{<20, 30, 40, \ldots, 10>\}= \omega+1$$

Ou encore, si l'on envisage la suite des nombres pairs, suivie des nombres impairs :

$$\{<2, 4, 6, \ldots, 1, 3, 5,\ldots>\} = \omega + \omega = 2\omega$$

On peut ainsi remarquer que la différence d'ordinal se fait par rapport à l'endroit où se fait le "saut" infini. Le fait que tous ces nombres ordinaux ne soient pas les mêmes dans l'infini explique que la notion de nombre infini pouvait créer des paradoxes, tant que la distinction cardinal / ordinal n'existait pas[74].

Nous pouvons maintenant nous demander : comment se fait le passage du fini à l'infini, en tenant compte des deux nouveaux types de nombres inventés ?

> A concevoir l'infini comme je l'ai fait ici et dans mes tentatives antérieures, j'éprouve un véritable plaisir à voir que le concept de nombre entier se *divise* pour ainsi dire, lorsque nous montons vers l'infini, en *deux* concepts : la *puissance* et le *nombre ordinal*. […] Et si je redescends de l'infini vers le fini, je vois avec une clarté et une beauté égales les deux concepts ne faire à nouveau qu'un et *converger* vers le concept de nombre entier fini.[75]

En effet, nous avons bien vu avec notre exemple ci-dessus que l'ensemble des nombres pairs, suivis des nombres impairs avait pour ordinal 2ω qui est donc différent de ω. Or le cardinal de

---

[74] On peut penser par exemple au savant arabe Thābit ibn Qurra de Harrān (836-901) qui pense que les entiers pairs représentent la moitié de tous les entiers; et ainsi que l'infini des entiers est "double" de l'infini des entiers pairs. Voir Lévy [2000, p48-52] pour plus de détails sur la conception de l'infini de ce savant.
[75] Cantor [1883b, §7, p181]. Traduction de Belna [2000, p116].

$\mathbb{N}$, comme le cardinal de notre exemple, est le même, $\aleph_0$[76]. Il y a donc bien, dans l'infini, une différence essentielle entre cardinal et ordinal. Aujourd'hui, on peut même être plus précis – mais nettement moins poétique que Cantor– en disant qu'un ensemble *a* est fini *si et seulement si* card (*a*) = ordinal (*a*).

2.4 Transfini et irrationnels.

Cantor qualifie ses nombres (infinis) de cardinaux et d'ordinaux *transfinis**, pour bien les démarquer de tout autre sorte d'infini peu précis (métaphysique, potentiel, etc…). Cependant, comment justifie-t-il leur introduction ? Il propose une comparaison aussi élégante que convaincante :

> Les nombres transfinis sont en un certain sens eux-mêmes de *nouvelles irrationalités* et, effectivement, la meilleure méthode, à mes yeux, pour définir les nombres irrationnels *finis* […], est, dans son principe, la même que ma méthode d'introduction des nombres transfinis. On peut dire absolument : les nombres transfinis *restent ou tombent* avec les nombres irrationnels finis. Ils se ressemblent les uns les autres selon leur essence la plus intime; les uns comme les autres sont des transformations ou des modifications distinctement définies de l'infini actuel.[77]

Ontologiquement, les nombres transfinis* et les nombres irrationnels* ont donc le même statut. Tous deux sont définis par des ensembles infinis, et par les mêmes types de procédures. Nous sommes donc arrivés à montrer, avec une définition précise du nombre, que le nombre infini est un nombre comme un autre. Mais combien y a-t-il de puissances d'infinis ? Y a-t-il des cardinaux infinis plus grands que d'autres ? En particulier, quelle est la puissance de l'ensemble $\mathbb{R}$ que nous avons construit, et dont nous avons pressenti la richesse [II.1.4] ? Notre troisième partie tachera de répondre à ces questions en exposant deux résultats fondamentaux de Cantor.

[76] Nous ne démontrons pas ce point, mais nous pouvons suggérer cette égalité de puissance. En associant tous les pairs aux nombres négatifs, et tous les impairs aux nombres positifs, nous avons une bijection de notre ensemble sur $\mathbb{Z}$. Or $\mathbb{Z}$ est dénombrable [II.1.1.1], donc l'ensemble de notre exemple l'est aussi. Cela explique aussi le problème de Thābit ibn Qurra.
[77] Cantor [1887-1888, p 395-396], traduction de Belna [1996, p185].

Or, qu'il y ait un infini plus
grand que l'infini me semble
une idée totalement inintelligible.

Réplique de Simplicio, Galilée [1638, p77]

III. La découverte des deux infinis

Maintenant, nous avons un outil pour déterminer le cardinal* d'un ensemble, qu'il soit fini ou infini. Il s'agit de la bijection*. Nous pouvons donc reposer notre question laissée en suspens depuis l'introduction : y a-t-il plusieurs infinis ? Peut être un des plus grands mérites de Cantor est d'avoir répondu par l'affirmative à cette question. Comment est-ce possible ? Quelles sont les démonstrations que Cantor a fournies pour prouver l'existence de puissances infinies distinctes ? Ce sont ces questions qui vont nous occuper maintenant.

En 1872, Cantor avait posé, dans un cadre mathématique qui était celui de ses recherches, la suite des ensembles de points, qu'il dérive comme suit :

$$P', P'', \ldots, P^{(\upsilon)}, \ldots, P^{(\infty)}, P^{(\infty+1)}, \ldots$$

Mais à ce stade le symbole ∞ reste flou, car hérité des mathématiques de son époque et finalement peu discernable de υ ci-dessus. Mais le fait qu'il écrive $\infty+1$ montre bien qu'il considère le symbole ∞ comme représentant l'infini actuel*. Cependant, à cette époque, il n'y a pour Cantor qu'un seul infini. Et, selon Dauben, « avant la fin de 1873, il ne *soupçonnait* même pas la possibilité d'une différence de grandeur entre le discret* et le continu* »[78]. Les différentes puissances d'infinis n'ont donc jamais été évidentes pour Cantor.

Quoi qu'il en soit, dans l'infini, l'intuition est très peu fiable. Par exemple, on serait enclin à penser, intuitivement, qu'en terme de taille, les ensembles se classent comme ceci[79] :

$\mathbb{N} < \mathbb{Z} < \mathbb{Q} < \mathbb{A} < \mathbb{R}$ [80] ($\mathbb{A}$ étant l'ensemble des nombres algébriques*).

Nous avons vu que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ ont la même puissance[81]. Il nous reste à déterminer la puissance de l'ensemble des nombres algébriques (qui contient des irrationnels) et la puissance de l'ensemble des réels. L'article fondateur, *Sur une propriété du système de tous les nombres algébriques réels* [82] que nous allons étudier ici [III.1], répond à ces deux problèmes. Premièrement, en montrant que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable*[83] (le §1 de l'article). Et deuxièmement en prouvant que l'ensemble des réels n'est pas dénombrable (§2), c'est-à-dire qu'on ne peut pas établir de bijection* entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$. C'est sans doute la portée de cette découverte qui a fait dire aux commentateurs que cet article constitue le début de la théorie des ensembles[84].

Le second article datant de 1891 établi, également, avec la célèbre démonstration « diagonale » que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable [III.2].

1.1 Intervalles emboîtés [1874]

Le 29 novembre 1873, Cantor pose la question à Dedekind de la différence entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$:

---

78 Dauben [1979, p49].
79 Voir Sierpinski [1928, §11-12, p19-24] pour une excellente introduction aux différentes puissances infinies.
80 On remarquera que ce classement est correct si l'on remplace le symbole inférieur (<), qui fait référence aux grandeurs, par l'inclusion ($\subset$). L'intuition n'est ici en fait qu'une confusion entre taille et inclusion.
81 Voir [II.1.1.1] pour la dénombrabilité de $\mathbb{Z}$ et [II.1.2.2] pour la dénombrabilité de $\mathbb{Q}$.
82 Cantor [1874].
83 Notons que cela entraîne *ipso facto* que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables, car ces ensembles peuvent être obtenus avec des équations algébriques, comme nous l'avons démontré dans notre deuxième chapitre.
84 Voir par exemple la note de Zermelo dans Cantor [1932, p118] ou encore Kanamori [1996, p3].

> Prenons l'ensemble de tous les individus entiers positifs n, et représentons-le par (n) ; puis considérons l'ensemble de toutes les grandeurs numériques réelles positives x, et représentons-le par (x) ; la question est simplement de savoir si (n) peut être mis en correspondance avec (x) de telle manière qu'à chaque individu d'un des ensembles corresponde un individu et un seul de l'autre.[85]

Le pressentiment de Cantor est le bon, puisqu'il opine :

> A première vue, on se dit que ce n'est pas possible, car (n) est composé de parties discrètes, tandis que (x) forme un continu […][86]

Mais, sans démonstration, cette intuition n'est guère valable. Et Cantor en est tout à fait conscient, puisqu'il ajoute :

> Ne serait-on pas aussi tenté de conclure au premier abord que (n) ne peut être mis en correspondance univoque avec l'ensemble $\left(\frac{p}{q}\right)$ de tous les nombres rationnels $\frac{p}{q}$? Et pourtant, il n'est pas difficile de montrer que (n) peut être mis en correspondance univoque […] avec cet ensemble.[87]

Le 7 décembre 1873, Cantor envoie à Dedekind la démonstration recherchée[88]. Ce n'est pas celle que nous exposerons, car elle n'est pas simplifiée au maximum[89]. Le §1 est assez technique et ne présente pas d'intérêt particulier pour notre étude[90]. Ainsi, nous nous pencherons sur l'article original publié en [1874] et plus précisément sur le §2, qui traite –indirectement– de la non dénombrabilité de $\mathbb{R}$[91].

<u>Théorème</u> : *Pour toute suite de réels ω_n et pour tout intervalle $[\alpha,\beta]$, on peut déterminer un nombre η dans $[\alpha,\beta]$ qui n'appartient pas à ω_n. Il existe, par conséquent, une infinité de tels nombres.*

---

85 Cavaillès [1962, p188].
86 Cavaillès [1962, p188].
87 Cavaillès [1962, p188].
88 Cavaillès [1962, p189-191].
89 Voir Dauben [1979, bas de la page 51-53] pour une exposition détaillée de cette preuve.
90 Voir l'article de Cantor, bien sûr, ou bien Kamke [1964, p6-7] pour une présentation plus moderne et très claire de la dénombrabilité de l'ensemble des nombres algébriques.
91 Nous utilisons le terme de dénombrabilité par abus de langage, car il n'est pas encore présent dans la terminologie de Cantor. De plus, nous suivrons l'exposé de Gray [1994, p820-821], qui est fidèle à Cantor, tout en gardant une terminologie moderne.

Il faut trouver un η dans $[\alpha,\beta]$ qui n'appartient pas à la suite.

On trouve d'abord les deux premiers nombres de la suite donnée qui appartiennent à $[\alpha,\beta]$. On note α_1 le plus petit et β_1 le plus grand. Maintenant, depuis l'intervalle $[\alpha_1,\beta_1]$ on trouve de la même façon α_2 et β_2 tel que α_2, $\beta_2 \in [\alpha_1,\beta_1]$. On forme ainsi l'intervalle $[\alpha_2,\beta_2]$, et on continue ce processus de génération d'intervalles.

De deux choses l'une :

a) le procédé produit un nombre fini d'intervalles $[\alpha_n,\beta_n]$.

b) le procédé produit un nombre infini d'intervalles.

Analysons les deux situations.

a) Soit $[\alpha_N,\beta_N]$ le dernier intervalle. Etant donné qu'on ne peut plus former d'intervalles, il ne peut y avoir au plus qu'un ω_k dans $[\alpha_N,\beta_N]$. Dès lors, n'importe quel η dans $[\omega_k,\beta_N]$ pourra satisfaire la conclusion du théorème.

b) Pour le cas infini, posons : $\alpha_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$

et $\beta_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n$

Ces limites existent, car les α_n forment une suite croissante majorée ; et les β_n forment une suite décroissante minorée.

Deux choses peuvent maintenant se produire.

i) Soit $\alpha_\infty=\beta_\infty$

ii) Soit $\alpha_\infty<\beta_\infty$

i) Si $\alpha_\infty=\beta_\infty$, on pose simplement η comme étant cette limite commune ; η ne peut pas être un membre de la suite, car pour tout k, ω_k n'appartient pas à $[\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]$

ii) Si $\alpha_\infty<\beta_\infty$, on pose η un nombre quelconque de l'intervalle $[\alpha_\infty,\beta_\infty]$

Dans tous les cas, nous avons été capables de trouver un η dans $[\alpha,\beta]$ qui n'appartient pas à ω_n. Le théorème est donc démontré. Comment peut-on, à partir de ce théorème, montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable* ? De la façon suivante ; que l'on peut envisager comme le corollaire suivant :

Corollaire : Si on *suppose* qu'il existe une bijection* entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$, alors on peut ordonner les réels en une suite ω_n. Or nous savons par le théorème qu'il existe toujours un η qui n'est pas dans la suite ω_n. Une telle suite n'existe donc pas. Et, il n'y a pas de bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$.

Notons bien qu'il s'agit ici simplement d'un corollaire. La non dénombrabilité de $\mathbb{R}$ n'est donc pas mise en valeur directement par Cantor. De fait, l'article a pour titre « Sur une propriété du système de tous les nombres algébriques réels ». On peut s'interroger sur ce titre, et même sur sa présentation, qui ne met pas en valeur le principal résultat que Cantor cherchait à atteindre : la non dénombrabilité de $\mathbb{R}$[92]. En fait cette présentation a des motivations éditoriales. L'article de Cantor paru dans le Journal de Crelle, dont Kronecker, très grand mathématicien, était un éditeur. Par cette position élevée dans la communauté mathématique, il était libre d'accepter ou de refuser des articles qui ne satisfaisaient pas ses exigences. Quelles étaient ses exigences ? La constructibilité et la finitisme. Cantor savait tout

[92] Ce point peut être attesté par la correspondance Cantor-Dedekind, ou tout simplement par les fragments cités plus haut.

cela, et c'est pour cela qu'il a adapté son article de telle sorte qu'il soit irréprochable aux yeux de Kronecker. On notera à ce propos que Cantor utilise le terme de « loi » [93] en parlant de suite de nombres. Ce qui satisfait l'exigence de Kronecker qui voulait que toute suite soit déterminée par une loi arithmétique. Et ce fut effectivement le cas, car ce dernier accepta finalement la publication.

1.1 L'article de [1874] et les nombres transcendants.

Cependant, à cause de cette présentation astucieuse (et/ou de quelques lecteurs pas assez attentifs) il y a eu une mésinterprétation en ce qui concerne un aspect constructif de cet article. Cela concerne la possibilité de construire des nombres transcendants*. Cantor avait remarqué que :

> En combinant les propositions contenues dans les §§1 et 2, l'on obtient ainsi une démonstration nouvelle du théorème suivant démontré pour la première fois par LIOUVILLE[94] : dans chaque intervalle (α ….β)[95] donné d'avance il y a une infinité de nombres transcendants […].[96]

Ceci est juste, à ceci près que Cantor ne mentionne pas que sa preuve est constructive. On peut donc penser, comme l'ont fait Kac et Ulam[97] que Cantor ne fait qu'établir une preuve existentielle des nombres transcendants. Citons E. T. Bell qui a sans doute été un des premiers à faire la confusion[98] :

> La chose la plus remarquable à propos de la preuve de Cantor, c'est qu'elle ne donne aucun moyen par lequel un seul nombre transcendant peut être construit.[99]

---

[93] Cantor [1874fr, p306].
[94] Liouville [1851].
[95] La notation de Cantor, (α ….β) est remplacée aujourd'hui par $[\alpha,\beta]$.
[96] Cantor [1874, p115] ; [1874fr, p306].
[97] Kac et Ulam [1968, p12-13], cité dans Gray [1994, p820]. Encore aujourd'hui cette confusion demeure, voir par exemple l'article erroné sur bien des points de Calder [2000, p74-81].
[98] Selon Dauben [1979] il est aussi à la source de bien d'autres confusions.
[99] Bell [1937, p569].

Le raisonnement est le suivant. Par le résultat du §1, on sait que les nombres algébriques* sont dénombrables*. Et par le *corollaire* mentionné plus haut, on sait que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. On en déduit immédiatement qu'il existe des nombres transcendants*. Et cela exhibe bien une preuve non constructive des nombres transcendants. Mais ce raisonnement est très insuffisant, car, d'une part, il occulte le cœur de l'article, le théorème du §2 que nous avons présenté et qui permet tout à fait de construire des nombres transcendants[100]. Et d'autre part, c'est oublier que l'article de Cantor est paru de telle manière à être tout à fait indiscutable à Kronecker, comme nous l'avons signalé.

2. La démonstration diagonale [1891]

Cantor a démontré qu'il existe différentes puissances d'ensembles infinis. Nous venons de présenter une manière d'accéder à ce résultat : les intervalles emboîtés* [III.1]. Mais la démonstration la plus *générale*, la plus *féconde* et sans doute la plus *élégante* est la démonstration diagonale[101]. D'abord la plus *générale*, car elle prouve, pour *tout ensemble m* que card(2^m) > card (m). C'est-à-dire que l'ensemble des parties* d'un ensemble m quelconque (noté $\mathcal{P}(m)$) a une puissance strictement supérieure à cet ensemble. Ce théorème s'appelle le *théorème de Cantor**. La plus *féconde*, car historiquement, le procédé diagonal sera utilisé après Cantor, en vue de résultats au moins aussi importants : notamment ceux de Gödel[102] et Turing[103]. Enfin la plus *élégante*, car cette preuve est très pure, mobilisant moins de concepts mathématiques que la précédente. Cantor le note en disant :

---

[100] Il suffit pour cela de prendre comme ω_n une suite de nombres algébriques. Voir Gray [1994, p821-823] pour la construction effective de nombres transcendants avec la méthode des intervalles emboîtés.
[101] On parle aussi de méthode ou d'argument diagonal.
[102] Par le procédé diagonal, Gödel construit une formule indécidable dans un système formalisant l'arithmétique élémentaire. Voir [Gödel 1931].
[103] Turing [1936].

> Ce résultat[104] peut être démontré d'une manière beaucoup plus simple et indépendante de la considération des nombres irrationnels. [105]

En présentant ainsi cette preuve, Cantor pouvait espérer que les critiques de Kronecker pourraient enfin être au cœur de ses mathématiques, c'est-à-dire porter sur la théorie des ensembles. En effet, la preuve est débarrassée des notions de limite et de nombre irrationnel*. L'ironie de l'histoire a voulu que 1891 soit l'année de la mort de Kronecker, et qu'il n'ait donc jamais pu examiner cette preuve.

Notons tout de même que Cantor n'est pas l'inventeur du procédé diagonal. En effet, Paul Du Bois Reymond[106] en avait déjà fait un usage[107]. Dans ce texte [1891], c'est la première fois que Cantor affirme qu'il existe une puissance supérieure à celle du continu*, puisqu'il prend comme exemple d'application de son procédé, l'ensemble des fonctions* à une variable dans le segment continu [0,1]. Cependant, cette preuve a suscité beaucoup de discussions et d'interrogations, notamment chez Wittgenstein. Nous allons la présenter en détail, pour essayer ensuite de montrer quelles difficultés elle peut présenter.

2.1 Enoncé et preuve

L'argument diagonal, tel qu'il est présenté par Cantor en 1891 est très général, et a un large panel d'applications. Par conséquent, la présentation qu'en fait Cantor est particulièrement abstraite[108]. Afin de fournir un exposé clair et précis de la démonstration, nous avons choisi de suivre de très près Wilfrid Hodges[109] en appliquant le procédé aux ensembles familiers $\mathbb{N}$ et

[104] Cantor [1874].
[105] Cantor [1891fr, p200].
[106] Du Bois Reymond [1875, p365 et suiv.].
[107] Voir aussi Kanamori [1996, note 15, p48] pour plus de détails sur l'usage de la diagonale par Du Bois Reymond.
[108] Voir Dauben [1979, p165-167] pour un exposé plus fidèle à Cantor que celui qui va suivre. Notons que cela ne change rien sur le fond.
[109] Hodges [1998].

$\mathbb{R}$. Nous allons montrer –par l'absurde– qu'il n'existe pas de bijection* entre les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$. Cette présentation moderne a l'avantage de mobiliser le concept clé d'application qui permet de bien comprendre le fonctionnement de la preuve. En voici l'énoncé et sa démonstration, que nous commenterons ensuite.

(1) Enoncé du théorème : *Pour toute application f de l'ensemble des entiers positifs dans l'intervalle ouvert]0,1[des nombres réels, il y a au moins un nombre réel qui est dans]0,1[mais qui n'est pas dans l'image de f.*

(2) Supposons que f soit une application de l'ensemble des entiers positifs dans]0,1[

(3) Ecrivons

$0{,}a_{n1}a_{n2}a_{n3}a_{n4}a_{n5}a_{n6}\ldots$

pour l'expansion décimale de $f(n)$, où chaque a_{ni} est un chiffre entre 0 et 9. (Quand cela s'applique, nous choisissons l'expansion infinie de 0, et non celle de 9. Voir plus bas [III.2.2.1.i] pour l'explication de ce point.)

(4) Les $f(n)$ peuvent alors s'écrire sous la forme d'une liste :

$$\begin{gathered}
f(1)=0{,}a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}a_{16}\ldots\\
f(2)=0{,}a_{21}\,a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}a_{26}\ldots\\
f(3)=0{,}a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}a_{36}\ldots\\
f(4)=0{,}a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}a_{46}\ldots\\
f(5)=0{,}a_{51}a_{52}a_{53}a_{54}a_{55}a_{56}\ldots\\
f(6)=0{,}a_{61}a_{62}a_{63}a_{64}a_{65}a_{66}\ldots\\
\text{etc.}
\end{gathered}$$

Considérons le nombre $a = 0{,}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}a_{55}a_{66}\ldots$dont les décimales sont les chiffres en rouge de la diagonale de la liste ci-dessus. Le nombre a a un chiffre commun avec $f(1)$, donc, rien ne prouve qu'il diffère de $f(1)$. De même, a a un chiffre en commun avec $f(2)$, donc rien ne nous dit qu'il diffère de $f(2)$, etc…

C'est pourquoi nous modifions chaque décimale de a, pour former un nouveau nombre b. Pour chaque entier positif n, posons que $b_n=5$ si $a_{nn} \neq 5$,

et $b_n=4$ si $a_{nn}=5$.

(5) Soit b le nombre réel dont l'expansion décimale est :

$$0{,}b_1b_2b_3b_4b_5b_6...$$

Notre nombre b diffère donc de $f(1)$ par sa première décimale, de $f(2)$ par sa seconde décimale, etc… Il est différent de tous les f(n).

(6) b est dans $]0,1[$

(7) Si n est un entier positif, alors $b_n \neq a_{nn}$, et ainsi $b \neq f(n)$. Donc b n'est pas dans l'image de f.

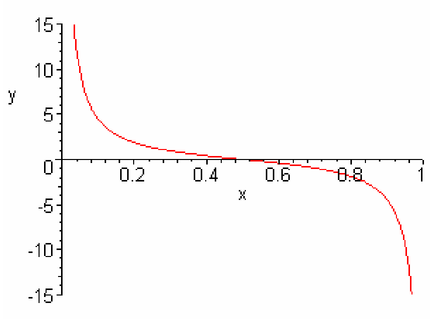
(8) Cela prouve l'énoncé (1)

(9) Nous déduisons qu'il n'y a pas d'application surjective de l'ensemble des entiers positifs sur l'ensemble $]0,1[$.

(10) Comme on peut établir qu'il y a une bijection* entre l'intervalle $]0,1[$ et l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, il suit qu'il n'y a pas de fonction surjective de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ dans l'ensemble des nombres réels.

La bijection entre $\mathbb{R}$ et $]0,1[$ s'explicite, et peut même se voir graphiquement avec la fonction suivante :

$$\begin{cases} f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) = \dfrac{x - \frac{1}{2}}{x(x-1)} \end{cases}$$



Intuitivement[110], pour une valeur de x très proche de 0, on aura un réel positif aussi grand que l'on veut; et pour une valeur proche de 1, un réel négatif aussi petit que l'on veut.

(11) Il n'y a donc pas de bijection entre ces deux ensembles ; autrement dit, ils ont des cardinalités différentes.

Pour mieux apprécier la forme logique de la preuve, nous nous proposons de la présenter à la manière de la déduction naturelle. L désigne ici une liste de nombres réels dans $]0,1[$, r un nombre réel dans $]0,1[$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\exists L\ \forall r\ r \in L]^1}{\forall L\ \exists r\ r \notin L}\text{« diagonale »} \qquad [\exists L\ \forall r\ r \in L]^1}{\bot}\,\neg\,\text{elim}}{\neg\,\exists L\ \forall r\ r \in L}\ {}^{1}\,\neg\,\text{intro}$$

L'argument est fondé sur un raisonnement par l'absurde[111]. On suppose qu'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $]0,1[$ et on essaye d'aboutir à une absurdité. Notre hypothèse ($\exists L\ \forall r\ r \in L$)

[110] Mais il est tout à fait possible de le démontrer rigoureusement.
[111] Mais il n'utilise que la logique intuitionniste, puisque la règle RAA, de réduction à l'absurde n'est pas mobilisée.

correspond ici à la supposition (2) ci-dessus. En dessous, on trouve par le procédé diagonal (qui n'est bien sûr pas une règle logique, et c'est pour cela que nous avons souligné en pointillés et signalé que nous utilisons ici le procédé diagonal) que pour toute liste L de réels, il existe un nombre réel qui n'est pas dans cette liste (précisément le nombre diagonal). Cela correspond aux étapes (3)-(7) ci-dessus. Or, $\forall L\ \exists r\ r \notin L$ est logiquement équivalent à $\neg \exists L\ \forall r\ r \in L$ qui est précisément la négation de notre hypothèse. Cela nous autorise à appliquer la règle de $\neg$ élimination qui abouti à l'absurdité cherchée (noté $\perp$). Nous pouvons alors appliquer la règle de « $\neg$ introduction » et décharger notre hypothèse. Le théorème est alors prouvé (8). C'est-à-dire qu'il n'existe pas de liste L de nombres réels telle que tout réel r soit dans la liste. Autrement dit, qu'il n'est pas possible de dresser une liste complète des nombres réels de l'intervalle]0,1[.

2.2 Contestations

2.2.1 Objections venant naturellement à l'esprit et leurs solutions.

Lorsqu'on observe cette démonstration, on estime qu'il y a peut-être un problème. En effet, il serait tentant de dire que si l'on n'arrive pas à dresser la liste des nombres réels, ce n'est probablement que parce que nous n'avons pas encore réussi à trouver l'astuce qui permet de les mettre sous forme de liste (comme pour les bijections entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$; et entre $\mathbb{N}$ et les nombres algébriques*[112]). Cependant, cela n'affecte pas la preuve. La clé se situe dans une propriété bien spécifique des nombres réels : leur développement décimal. Voyons cela d'un peu plus près.

[112] Pour le détail de ces bijections, voir par exemple Kamke [1964, p5-8].

i) Le problème des décimales

Tout nombre réel peut être écrit, et est *parfaitement déterminé* par son développement décimal. Par exemple :

$$\frac{1}{3}=0,333333333333\ldots$$
$$\frac{1}{4}=0,250000000000\ldots$$
$$\frac{1}{7}=0,142857142857\ldots$$
$$\frac{\pi}{4}=0,785398163397\ldots$$

En fait, une expression du type $\frac{1}{3}=0,3333\ldots$ représente la suite de Cauchy* suivante :

$$\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10\,000}+\ldots$$

où $\frac{1}{3}$ est la limite de cette suite.

Cependant, il faut noter une petite précision à ce développement. Rigoureusement, toute écriture $z,a_1a_2a_3a_4\ldots$ où $z \in \mathbf{Z}$ les a_i étant des chiffres, est l'écriture décimale d'un nombre réel, sous réserve que la suite (a_n) ne soit pas stationnaire à 9 à partir d'un certain rang. En effet, sinon on aurait par exemple : 0,4599999… qui signifierait :

$$\lim_{n \to \infty} [0,45 + 9.10^{-3} + 9.10^{-4} + \ldots+9.10^{-n}] =0,46$$

dont le développement décimal est 0,4600000…Il s'agit donc simplement de choisir un des deux développement décimaux possibles. Ce qui explique la remarque de l'étape (3).

ii) La démonstration fonctionne-t-elle entre les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$?

Cette petite technicité étant réglée, nous pouvons maintenant nous poser la question de savoir : est-ce que la démonstration de Cantor[113] fonctionne entre les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$, de la même manière qu'elle fonctionne entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$?

Si la réponse devait être positive, cela voudrait dire que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ sont de cardinalités différentes (c'est ce que nous entendons par « fonctionne »). Ce qui est faux, en vertu de la bijection* que l'on peut construire entre ces deux ensembles. Si la démonstration fonctionne, ce serait très problématique, et une des deux démonstrations devrait être fausse. Comme la bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ est particulièrement simple (voir [II.1.2.2]), on serait enclin à penser que s'il y avait un élément fallacieux, ce serait plutôt dans la démonstration diagonale de Cantor.

Heureusement, nous allons montrer que la réponse est négative et que la démonstration de Cantor ne fonctionne pas avec n'importe quels ensembles. Cette démonstration nous fera donc manipuler les mécanismes de la démonstration, et nous permettra ainsi de comprendre fermement le procédé diagonal. En effet, c'est en maniant une démonstration mathématique, et en examinant dans quelles conditions elle fonctionne que l'on saisi véritablement sa signification.

Nous voulons pour cela prouver que *lorsque nous construisons un nombre diagonal à partir d'une liste d'éléments de $\mathbb{Q}$, celui-ci n'est pas forcément dans $\mathbb{Q}$*, car le développement décimal d'un rationnel est : soit fini, soit infini avec le même chiffre se répétant (ex : 1/3) soit infini et périodique (ex : 1/7, voir ci-dessus.). En effet, il est possible de construire, par la

[113] Nous entendons par « méthode diagonale » une démonstration qui utilise un procédé diagonal ; et « démonstration de Cantor » une démonstration utilisant le procédé diagonal, permettant de conclure une différence de cardinalité entre les ensembles en jeu.

méthode diagonale, un nombre irrationnel, et donc par définition non rationnel. S'il est possible de créer un tel nombre, cela signifie que la méthode diagonale de Cantor ne conduit pas ici à une contradiction, le nombre diagonal n'étant alors pas dans la liste de départ. Autrement dit, qu'on ne peut –heureusement– pas montrer avec la démonstration diagonale que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ sont de cardinalités différentes. La démonstration, transposée aux ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ ne peut donc pas conclure.

Proposons nous, pour illustrer notre propos, de montrer l'existence d'une liste de rationnels dont le nombre diagonal[114] est irrationnel. Pour cela, nous allons construire une liste de rationnels dont le nombre diagonal est π-3= 0.1415926 …

1) Soit une liste infinie quelconque de rationnels $L=\{q_1, q_2, \ldots\}$
2) On construit à partir de L, une liste L' qui a la propriété souhaitée (c'est-à-dire dont le nombre diagonal est π-3). $L'=\{q'_1, q'_2,\ldots\}$

q'_1 est défini comme suit : c'est le premier élément de la liste L dont la première décimale est égale à 1. Soit $L_1= \{q'_1, q_2, q_3 \ldots\}$

q'_2 est défini comme suit : c'est le premier élément de L_1, après q'_1, dont la seconde décimale est égale à 4. Soit $L_2= \{q'_1, q'_2, q_3, \ldots\}$

Plus généralement,

q'_n est défini comme suit : c'est le premier élément de L_{n-1}, après q'_{n-1}, dont la n-ième décimale est égale à la n-ième décimale de π-3. $L_n= \{q'_1, q'_2, q'_3 \ldots\}$

L_n est exactement une liste de type L' recherchée.

Par exemple, L' pourrait avoir l'aspect suivant :

q'_1=0.100000…
q'_2=0.040000…
q'_3=0.111111…
q'_4=0.250500…

[114] Précisons ici que notre nombre diagonal n'est pas diagonal au sens strict, puisqu'on l'obtient directement, sans modifier ses décimales.

…

Nous voyons que le nombre diagonal de cette liste (en rouge), est, par construction π-3 et n'est donc pas dans $\mathbb{Q}$. Notons aussi qu'il est aussi possible de générer un nombre irrationnel, à partir d'une liste d'éléments rationnels, en utilisant la méthode diagonale. Pour plus de détails, voir Gray [1994, p824].

iii) Compléter la liste avec les nombres diagonaux.

Une objection plus sérieuse pourrait être la suivante. Si la liste L des réels est « incomplétable »[115], ce n'est peut-être que parce que nous ne nous en donnons pas les moyens. Ne pourrait-on pas considérer que l'on complète L actuellement en effectuant à l'infini l'opération qui consiste à rajouter un nombre diagonal ?

On peut formuler cette suggestion avec une définition par récurrence. Appelons notre liste initiale L_0 et L_1 la liste obtenue en ajoutant notre nombre diagonal $d(L_0)$ à L_1. En généralisant, on a alors :

$$L_0 = L$$

$$L_{n+1} = L_n \cup \{d(L_n)\}$$

On considère alors la liste $L^* = \lim\limits_{n \to +\infty} L_n$

[115] Nous nous permettons ce néologisme, car il s'agit bien d'une impossibilité de compléter, et pas d'un phénomène d'incomplétude qui pourrait être résorbé par un simple ajout. Pour éclaircir cette justification, prenons un exemple dans l'histoire de la géométrie. Si l'on prend la liste des axiomes de la géométrie neutre (la géométrie euclidienne sans le postulat des parallèles), on a une liste incomplète, au sens où la liste d'axiomes est incapable de prouver ou de réfuter tous les énoncés clos que l'on peut écrire dans le langage géométrique. Mais si on rajoute à cette liste l'axiome des parallèles –ou sa négation– on obtient alors une liste complète. Dans ce cas, il y avait *incomplétude*. Mais pour illustrer l'*incomplétabilité*, on peut penser au fameux théorème de Gödel[1931] qui, en utilisant dans sa preuve un lemme de diagonalisation, établi l'incomplétabilité de l'arithmétique, et pas seulement son incomplétude. Le phénomène d'incomplétabilité est donc caractéristique des arguments diagonaux.

Dans cette opération on procède comme suit :

1/ On construit le nombre diagonal $d(L_n)$ relatif à une liste L_n.

2/ On crée une nouvelle liste L_{n+1} où l'on a rajouté à L_n son nombre diagonal.

3/ On répète ce processus à l'infini.

Le problème est dans la 3$^{\text{ième}}$ étape. En fait, L^* est impossible à construire. Car, les nouveaux nombres diagonaux constitueraient un ensemble dénombrable*. Et, on sait que l'union* de deux ensembles dénombrables est dénombrable[116]. Mais, si, à nouveau, on a un ensemble dénombrable, alors on peut lui appliquer la méthode diagonale … il faudrait donc poursuivre ce processus au-delà de l'infini dénombrable[117] ; ce qui, bien sûr ne peut être permis dans ce contexte.

2.2.2 Wittgenstein ou la diagonale vue de travers.

Malgré la rigueur de cette démonstration, des mathématiciens et des philosophes ont exprimé leur désaccord vis-à-vis de cette étonnante démonstration. D'ailleurs, Hodges a écrit son article [1998] dans le but de montrer que ces réfutations –récurrentes– ne tiennent pas. Nous nous proposons ici d'analyser la position du philosophe Wittgenstein, qui refuse l'argument diagonal.

Préalablement, il convient de faire deux remarques. Premièrement, que la philosophie mathématique de Wittgenstein est d'un genre particulier, et qu'elle n'est en général pas très appréciée des mathématiciens. On pourra consulter à ce sujet les critiques des logiciens P. Bernays et G. Kreisel. Deuxièmement, les pensées de Wittgenstein sur les mathématiques

[116] Voir Kamke [1964, p 14] pour la démonstration de cette affirmation.
[117] Plus exactement, au-delà de oméga, le plus petit ordinal infini.

n'étaient pas proprement destinées à être publiées[118]. Ce dernier point me semble particulièrement important, car cela doit nous amener à rester très prudent. En effet, une multitude d'auteurs reprennent ces fragments de notes posthumes pour les interpréter très librement. Nous voulons montrer que cela ne peut pas tenir, et qu'il n'y a pas de moyen de « sauver » Wittgenstein sur son interprétation de la démonstration diagonale[119]. Et pour cause, ce qu'il a pu écrire à propos de l'argument diagonal ne manque pas de virulence. Ainsi, ces constatations nous motivent à une étude un peu plus précise.

Le texte de Wittgenstein que nous allons explorer date de 1938. Au §7 il écrit :

> Il faut considérer avec défiance le résultat d'un calcul exprimé en langage verbal. Le *calcul* élucide la signification de l'expression verbale. C'est l'instrument *le plus raffiné* pour la détermination de la signification.[120]

Nous allons voir que Wittgenstein a du mal à appliquer son adage, surtout à l'égard de sa propre pensée.

Au §10, il prétend : « Cela ne signifie rien de dire : « *Donc* les nombres – X sont innombrables » »[121]. On remarque tout de suite que le vocabulaire de Wittgenstein n'est pas précis. La démonstration diagonale ne dit pas qu'il y a des *nombres* innombrables, ce qui serait bien sûr absurde. Elle prouve simplement qu'il y a des *ensembles* non dénombrables*. Wittgenstein semble oublier qu'il s'agit d'ensembles.

Les écrits de Wittgenstein qui nous restent sont souvent flous, et donc difficiles à interpréter. Par exemple, au §10 : il parle de « concept numérique X » de « nombres subsumés », alors qu'il devrait, pour être rigoureux, parler d'ensembles, car c'est bien

---

[118] Les textes disponibles de Wittgenstein sur la philosophie des mathématiques sont principalement Wittgenstein [1939] et [1956]. La partie des *Remarques* [1956] qui nous intéresse est parfois constituée d'un choix de remarques tirées d'un cahier dactylographié. Voir p348-349, pour les remarques des éditeurs.
[119] Encore aujourd'hui, des auteurs comme Schmitz [2000, p127-134] tentent de montrer que l'argumentation de Wittgenstein est correcte.
[120] Wittgenstein [1956fr, 2e partie, p121].
[121] Wittgenstein [1956fr, 2e partie, p122].

d'ensembles qu'il s'agit quand on parle de non dénombrabilité. Et, la signification d'un ensemble « non dénombrable » est très précise, car elle ne signifie rien d'autre que cet ensemble ne peut pas être mis en bijection avec $\mathbb{N}$. Wittgenstein utilise donc d'emblée un vocabulaire imprécis et décalé.

Le §16 est plus instructif, car il constitue un développement de presque une page, fait rare dans ce qui nous reste de ses textes. Wittgenstein conclut :

> Il n'y a pas de sens à parler d'une « série de *tous* les nombres réels » parce qu'on appelle aussi « nombre réel » le nombre diagonal de la série.[122]

Cette phrase est très éclairante sur la mécompréhension de Wittgenstein de la preuve diagonale de Cantor. Car Cantor montre précisément qu'il n'y a pas de série de tous les nombres réels. Et sa démonstration, qui est un raisonnement par l'absurde[123] consiste à dire « supposons qu'une telle liste existe » pour en déduire une contradiction. Wittgenstein fait donc une confusion d'ordre logique (!), en oubliant la forme même du raisonnement. Il ne comprend pas que la démonstration *suppose* justement que l'assertion « série de *tous* les nombres réels » a un sens, et que cette supposition conduit à une contradiction (avec la construction d'un nombre réel (diagonal) qui n'est pas dans la liste). C'est donc bien la conclusion de Cantor, qu'il « n'y a pas de sens à parler d'une série de *tous* les nombres réels », non pas parce que le nombre diagonal est aussi un nombre réel ; mais parce que la *supposition* de l'existence d'une série de tous les nombres réels conduit à une contradiction.

Le §22 mérite aussi qu'on s'y attarde. Ce paragraphe compare deux conceptions. D'une part le point de vue de Wittgenstein :

[122] Wittgenstein [1956fr, 2e partie, p125].
[123] Voir [1.3.1] plus haut, notamment la présentation de la preuve en « déduction naturelle », qui permet de bien saisir le mécanisme de la preuve.

> La réflexion sur le procédé de la diagonale nous montre que le *concept* de « nombre réel » a beaucoup moins d'analogie avec le concept de nombre cardinal que l'on incline à le penser à cause de certaines analogies trompeuses.[124]

D'autre part, il critique le fait que :

> l'on « compare « l'ensemble » des nombres réels soi-disant selon leur grandeur avec celui des nombres cardinaux ».[125]

Pour terminer avec une conclusion qui ne manque pas d'audace :

> La différence de genre des deux conceptions est exposée comme différence d'extension par le truchement d'une expression erronée. Je crois et espère qu'une génération à venir rira de cette jonglerie.[126]

En fait, Wittgenstein voudrait montrer qu'il y a une différence de nature entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$, et que donc on ne peut pas comparer ces ensembles. On peut faire remarquer la chose suivante à ce sujet. Les définitions de comparaison de cardinalité se font parfaitement en théorie des ensembles, plus précisément avec des définitions en termes d'applications injectives et surjectives[127]. Comme nous l'avons vu au point (10) de la démonstration ci-dessus, il n'y a pas de surjection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Et cela signifie, par définition, que les ensembles ont des cardinalités différentes. Il n'y a donc pas de « différence de genre » entre ce qui est exposé dans la démonstration diagonale et le fait que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$ aient des cardinalités différentes.

Nous pourrions continuer à analyser le texte de Wittgenstein qui se poursuit dans d'autres remarques peu fondées, mais nous ne jugeons pas cela très utile, étant donné que nous avons bien vu pourquoi Wittgenstein n'avait pas compris la démonstration : une erreur de logique. Concluons simplement en disant que Wittgenstein n'a pas regardé d'assez près la démonstration de Cantor, et c'est pour cela qu'il l'a mal comprise. Citons tout de même le

[124] Wittgenstein [1956fr, 2e partie, p126].
[125] Wittgenstein [1956fr, 2e partie, p126]. Notons, pour dissiper toute ambiguïté, que « nombre cardinal » signifie ici nombre entier naturel, i.e. $\mathbb{N}$.
[126] Wittgenstein [1956fr, 2e partie, p126].
[127] Nous avons fait cela en [II.2.1].

dernier paragraphe de cette partie (§62) où Wittgenstein parle de sa méthode en philosophie des mathématiques :

> Je montre qu'il existe [l'intérêt de soumettre des calculs à un test], et ce qu'il faut examiner. Je ne peux donc dire : « on ne doit pas s'exprimer de cette façon » ou bien « c'est absurde » ou bien « cela est sans intérêt », mais « examine de la façon suivante la justification de cette expression ». On ne peut donner la justification d'une expression – *qui consiste justement en son utilisation* – en considérant seulement une facette de cette utilisation ; un peu comme une image qui lui est attachée.[128]

Cette citation nous montre le peu d'ambition et la faible portée de la philosophie mathématique de Wittgenstein. D'ailleurs, n'est-il pas en contradiction avec lui-même, puisque, d'une part, il notifie :

> Je ne peux donc dire : « c'est absurde »

et d'autre part, il disait (§16, cité plus haut) :

> Il n'y a pas de sens à parler d'une « série de *tous* les nombres réels »

Wittgenstein analyse donc des « expressions », sans réaliser que les mathématiques sont une science avec un langage indépendant, formel, et que la justification d'une preuve n'est pas à chercher dans le langage ordinaire, mais bien dans la démonstration elle-même. Manifestement, il n'a pas saisi la démonstration de Cantor.

Notons que, selon Kanamori[129], la non dénombrabilité pose problème à Wittgenstein, car dans les manuels, on commence par donner la démonstration de la non dénombrabilité de $\mathbb{R}$, et ensuite la dénombrabilité des nombres algébriques*. Ce qui donne le sentiment que la démonstration de Cantor n'est pas constructive.

---

[128] Wittgenstein [1956fr, 2e partie, p136].
[129] Kanamori [1996, p4].

Cependant, Kanamori nous offre plus sur les conséquences d'une telle présentation, en citant Kac et Ulam :

> Le contraste entre la méthode de Liouville[130] et de Cantor est frappant, et ces méthodes nous apportent une excellente illustration de deux approches largement différentes pour prouver l'*existence* d'objets mathématiques. Celle de Liouville est purement *constructive* ; celle de Cantor est purement *existentielle.* [131]

Kanamori veut justement critiquer cette vision qui a trop longtemps perdurée. Il fait cependant référence à Fraenkel, pour qui la démonstration diagonale a toujours gardé un aspect constructif. Mais surtout, –comme nous l'avons déjà noté– et c'est sans doute la preuve la plus marquante en faveur de la fécondité et de la validité de la méthode diagonale,

> Gray [1994] montre que tout réel transcendant est le résultat d'une diagonalisation appliquée à *quelque* énumération de réels algébriques.[132]

Ce résultat est d'un grand intérêt, car il permet véritablement de détruire le préjugé cité plus haut, selon lequel la démonstration n'est pas constructive (et aussi bien sûr de réfuter définitivement les jongleries de Wittgenstein…)

2.2.3 Essai d'éclaircissement de la difficulté d'accepter la conclusion de Cantor.

Nous n'avons vu qu'une seule critique de la démonstration diagonale de Cantor. Cependant, il existe bien quelques auteurs qui se sont élevés contre cette démonstration[133]. La question qui se pose alors naturellement est donc : pourquoi s'élever contre une telle démonstration ?

---

[130] Liouville a démontré –constructivement– la transcendance du nombre *e*.
[131] Kac et Ulam [1968, p13].
[132] Kanamori [1996, n.10, p47].
[133] D'ailleurs, encore très récemment, sur le forum de Foundations of Mathematics, (http://www.cs.nyu.edu/mailman/listinfo/fom/) M. Zenkin développe des arguments contre la méthode diagonale (bien que ses interventions commencent à lasser les logiciens et mathématiciens qui lui répondent…).

Revenons à l'article de Hodges qui a bien étudié le problème. Il commence son article en se demandant –non sans ironie …– :

> Il y a quelques années, je me demandais pourquoi tant de personnes dépensaient tant d'énergie pour réfuter ce petit argument inoffensif–qu'est-ce qu'il leur a fait pour les fâcher ?[134]

Je pense qu'il est possible de répondre très directement à cette question : c'est tout simplement que cet argument démontre qu'il existe plusieurs puissances d'infinis. Ce qui est bien sûr un fait hautement contre intuitif[135], et justifie largement la somme d'efforts déployée pour le réfuter. N'a-t-il pas fallu attendre l'arrivée de la créativité et de l'audace de Cantor pour que l'infini puisse être pleinement théorisé mathématiquement, au-delà de tous les obstacles scolastiques, métaphysiques, théologiques et intuitifs ?

Hodges fait aussi remarquer que les critiques de l'argument de Cantor ne connaissaient pas la première démonstration de la non dénombrabilité de $\mathbb{R}$[136]. Mais il ne me semble pas que cette remarque soit pertinente, car une preuve doit pouvoir être indépendante, se justifier d'elle-même. Certes, –et c'est sûrement ce à quoi pensait Hodges en écrivant cela– il est très risqué de s'attaquer à un résultat qui a déjà été établi de plusieurs façons. Mais, comme nous le soulignions plus haut, l'argument diagonal arrive souvent dans les premières pages de manuels de théorie des ensembles. Ce qui est une erreur, parce que –ainsi que Kanamori le constatait–, cela peut amener à penser que la démonstration n'a aucun aspect constructif. En effet, comme nous l'avons noté plus haut, cette démonstration est très pure, car elle n'utilise que la définition des nombres réels. La démonstration de Cantor, malgré sa simplicité apparente, nécessite une parfaite connaissance des objets mathématiques mobilisés *in extenso*. Bien que ce ne soit pas notre propos, nous pouvons suggérer qu'un enseignement des

---

[134] Hodges [1998, p1].
[135] Hodges [1998, p3] résume ce point en disant : « Mais alors vient le résultat de Cantor, et toute intuition échoue ».
[136] Voir [III.1] ci-dessus.

mathématiques peut être parfois moins abscons, et plus porté vers l'histoire de la discipline pourrait faciliter l'apprentissage et la compréhension du contexte de certains résultats.

3. Au-delà de l'infini

Cet échafaudage vertigineux
d'infinis superposés,
qu'ils croyaient inconcevable,
existe aujourd'hui, construit
par un subtil et profond mathématicien,
qui est aussi un philosophe infinitiste
d'une logique impeccable.

Couturat [1896, p456]

Un problème qui s'est posé à Cantor et qui est toujours très célèbre est le suivant. Nous venons de voir que le cardinal de $\mathbb{R}$ est continu*, c'est-à-dire qu'il est égal à $2^{\aleph_0}$. Il est strictement plus grand que celui de $\mathbb{N}$ qui est égal à $\aleph_0$. Y a-t-il un cardinal entre $2^{\aleph_0}$ et $\aleph_0$?

L'*hypothèse du continu** est l'affirmation selon laquelle il n'existe pas de tel cardinal. Le cardinal de $\mathbb{R}$ serait donc égal à $\aleph_1$. Cantor pense que cette hypothèse est vraie[137], et essayera pendant toute sa vie de la démontrer. A partir de 1878, date où Cantor énonce pour la première fois cette hypothèse, il est possible de dire que presque tous les développements mathématiques que Cantor crée sont destinés à articuler le problème du continu. Cependant nous ne rentrerons pas dans le détail de ce problème, beaucoup trop riche pour être traité ici.

Résumons notre situation. Nous savons maintenant qu'il existe –au moins– deux puissances différentes d'infinis, caractérisées par $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$. Mais y en a-t-il d'autres plus grandes ? Une réponse affirmative a déjà été suggérée, puisque nous avons énoncé le théorème de Cantor*. Ce dernier permet toujours de trouver des puissances infinies

[137] Même s'il en doutera un moment, comme en témoigne sa correspondance avec Mittag-Leffler. Voir la lettre 14 novembre 1884.

supérieures aux autres. Car, étant donné un ensemble infini de cardinalité quelconque, l'ensemble des parties* de cet ensemble aura une cardinalité strictement supérieure. La question qui pourrait suivre serait : combien y a-t-il de puissances infinies différentes ? Une infinité ?

Certainement, mais alors, quelle puissance d'infinité ? Ces questions posent en fait des problèmes considérables. La réponse ne sera que très partielle (voir [V.1]).

Désormais, nous avons suffisamment d'éléments pour examiner pourquoi l'infini a posé problème avant Cantor. Comment Cantor va-t-il réfuter les autres conceptions de l'infini, et répondre aux paradoxes classiques, à l'aide de sa création mathématique ? C'est ce que nous nous proposons d'étudier maintenant.

IV. Cantor et sa philosophie de l'infini

1. Réfutations des autres conceptions de l'infini

> *Ma théorie est aussi solide que le roc et toute flèche dirigée contre elle se retournera rapidement contre celui qui l'a lancée. Pourquoi ai-je une telle conviction ? Parce que j'ai étudié tous ses aspects pendant des années; examiné toutes les critiques que l'on peut faire aux nombres infinis; et par dessus tout, parce que j'ai, si l'on peut dire, tiré les racines de cette théorie de la cause première de toutes les choses créées.*[138]

1.1 La distinction infini potentiel, infini actuel

Nous avons déjà vu la distinction entre infini potentiel* et infini actuel*. Comment est-ce que Cantor la traite ? En 1883, il commence à redéfinir la terminologie et à dire que l'infini potentiel est l'*infini improprement dit**, tandis que l'infini actuel est l'*infini proprement dit**. En effet, avec l'infini potentiel on ne raisonne finalement que sur des grandeurs finies; aussi grandes que l'on veut, certes, mais finies. Tandis que pour Cantor, le transfini est un infini « se trouvant au-delà de toutes les grandeurs finies »[139]. Louis Couturat, dans le livre III de la deuxième partie de son ouvrage sur l'infini [1896, p441-505] met en scène un formidable dialogue d'un mathématicien finitiste contre un mathématicien infinitiste. En parlant de la distinction infini actuel / infini potentiel, le défenseur de l'infini annonce à un moment donné:

> […] en admettant l'infini potentiel, vous admettez du même coup la possibilité de l'infini actuel.[140]

[138] Lettre du 21 juin 1888 de Cantor à Heman. Cité dans Dauben [1979, p298].
[139] Cantor [1883b, p166].
[140] Couturat [1896, p494].

Je pense qu'il faut un peu nuancer cette affirmation. Car, comme nous l'avons vu en [II.2.3.3], il y a une inversion des quantificateurs, qui est caractéristique de la différence entre ces deux infinis. Mais, logiquement, on ne peut pas dériver l'infini actuel à partir de l'infini potentiel. En effet, on *n'a pas*

$$\forall x\, \exists y\ x<y \vdash \exists y\, \forall x\ \ x<y$$

Il y a bien un acte explicite et positif dans l'affirmation de l'infini actuel ; c'est qu'*il existe* un tel ensemble infini. Cependant, il reste vrai qu'il y a un lien intime entre infini potentiel et actuel. Pour l'exprimer, Cantor propose la métaphore suivante :

> Je dis que pour se promener ou voyager en sécurité, un sol et un terrain solides, comme un chemin bien plan, sont absolument nécessaires. Un chemin qui jamais ne s'achève, mais surtout qui doit être praticable, et le demeurer, où que ce trajet nous conduise.[141]

L'application de cette métaphore aux nombres cantoriens nous donne :

> Tout infini potentiel (la limite de la promenade) requiert un transfini (le chemin sûr de la promenade), et ne peut être pensé sans ce dernier.[142]

Le transfini permet donc d'assurer l'existence de domaines infinis, comme par exemple lorsque nous faisons varier une fonction* de $-\infty$ à $+\infty$.

1.2 Cantor contre les réfutations de l'infini actuel

1.2.1 Arguments mathématiques

Une des critiques contre le nombre infini est de dire qu'il ne peut y avoir que des nombres finis, car on ne peut dénombrer que le fini. Mais nous avons vu [II.2.2] que les nombres pouvaient être vu comme des ensembles, et surtout que l'on pouvait définir des

[141] Cantor [1887-1888, p392-393, note 1].
[142] Cantor [1887-1888, p393, note 1].

ensembles *en compréhension*, c'est-à-dire sans être obligé d'énumérer tous leurs éléments. Même si cette définition moderne du nombre n'est pas celle de Cantor, néanmoins, il fait bien usage de la notion de loi de progression, qui lui permet d'affirmer actuellement des ensembles infinis.

Reprenons maintenant une critique d'Aristote (vue en [I.1.1]) disant que le nombre infini est absorbant. Comment Cantor peut-il répondre à une telle objection ? Il prend l'exemple d'oméga, le premier ordinal infini et il fait remarquer que :

> on a $1 + \omega = \omega$, au contraire, $\omega+1=(\omega+1)$ où $(\omega+1)$ est un nombre différent de ω.[143]

En effet, la commutativité n'est pas une propriété valable pour les ordinaux transfinis. Tout dépend donc des positions respectives du fini et de l'infini :

> si le premier [le fini] entre avant, alors il marche dans l'infini et y disparaît; s'il est disposé à prendre sa place *après* l'infini, il subsiste et se lie avec lui en un infini nouveau, parce que modifié. [144]

Un autre argument classique contre le nombre infini, est qu'il serait contradictoire, car il serait à la fois pair et impair. En effet, si l'on suppose que le nombre infini est pair, et qu'on lui ajoute un, il est toujours infini, mais sa parité devrait avoir changé. D'où la conclusion que le nombre infini devrait être à la fois pair et impair. A cette objection, on répond que la notion de parité n'a pas simplement pas de sens pour les nombres transfinis*, et que ce n'est pas une raison pour leur refuser leur existence. En parlant de ces objections, Cantor interroge :

> A qui le paralogisme ne saute-t-il pas aux yeux ? […] N'a-t-on pas récemment introduit les grandeurs complexes, qui sont si importantes pour le développement de l'analyse, […] sans y voir l'obstacle, qu'ils ne peuvent être dits ni positifs, ni négatifs ? [145]

Cantor fait donc ici une remarque tout à fait éclairante, et qui donne à réfléchir. En effet, à chaque extension de nombre, nous avons dû étendre ce qui n'était qu'impossibilité à quelque

[143] Cantor [1883b, p177].
[144] Cantor [1883b, p177].
[145] Cantor [1883b, p178].

chose de légitime. Ainsi, à chaque fois, des nouvelles propriétés naissent des extensions nouvellement créées. Par exemple, on ne pouvait pas soustraire deux entiers naturels dans tous les cas; mais avec les entiers relatifs, c'est devenu possible. De même, deux entiers relatifs n'étaient pas toujours divisibles; mais avec les rationnels, c'est chose faite. Enfin, certains rationnels n'ont pas de racine carré, mais tout réel en a une[146]. Les nombres complexes* ne peuvent pas véritablement être dits positifs ou négatifs car ils sont constitués d'un couple de nombres. De par leur construction, ils ne peuvent pas répondre aux mêmes propriétés que les autres nombres. Il en est exactement de même pour les nombres infinis. En effet, l'erreur générale consiste à attribuer aux nombres infinis des propriétés des nombres finis. Laissons Cantor résumer ce point :

> *Toutes les prétendues preuves contre la possibilité des nombres infinis actuels sont fautives, en ce qu'elles exigent* a priori *ou mieux imposent, aux nombres en question, toutes les propriétés des nombres finis. Alors que les nombres infinis doivent constituer (par opposition aux nombres finis) une espèce entièrement nouvelle de nombres, dont l'essence est totalement dépendante de la nature des choses. C'est un objet de recherche [indépendant] de notre arbitraire et de nos préjugés.*[147]

Les nombres infinis sont donc bien entièrement nouveaux, car ils s'opposent à *tous* les autres nombres, qui étaient tous finis.

1.2.2 Autres arguments

Un autre argument, ayant un aspect théologique, est le suivant. Le transfini ne devrait pas être pensable, car il est ce qu'il y a au dessus du fini, c'est-à-dire qu'il est l'Absolu. Cantor refuse bien entendu cet argument, car son tort est de mélanger le transfini avec l'Absolu. A cela, il répond :

> Aussi remarque-t-on que depuis Kant, il est entré dans les mœurs des philosophes, la fausse idée que l'*Absolu* est la limite idéale du *fini*, tandis qu'en vérité cette limite n'est qu'un *transfini*, c'est-à-dire qu'il

[146] Ou tout nombre algébrique serait plus précis.
[147] Cantor [1887-1888, p371-372]. Traduction de Belna [2000, p180].

> peut être pensé comme le *plus petit de tous les transfinis* (qui correspond à celui qui peut être désigné par ω, le plus petit nombre au-delà du fini).[148]

Un argument célèbre contre la possibilité de manipuler l'infini par la pensée est de dire que notre esprit est fini, et que l'infini lui est donc nécessairement inaccessible. Il peut être caractérisé par un passage des *Principes de la philosophie* de Descartes :

> Ainsi nous ne nous embarrasserons jamais dans les disputes de l'infini ; d'autant qu'il serait ridicule que nous, qui sommes finis, entreprissions d'en déterminer quelque chose, et par ce moyen le supposer fini en tâchant de le comprendre ; c'est pourquoi nous ne soucierons pas de répondre à ceux qui demandent si la moitié d'une ligne infinie est infinie, et si le nombre infini est pair ou non pair, et autres choses semblables, à cause qu'il n'y a que ceux qui s'imaginent que leur esprit est infini qui semblent devoir examiner de telles difficultés.[149]

Cantor aurait pu répondre à deux niveaux. D'une part, mathématiquement en objectant que le cardinal d'une ligne est égal au cardinal de la moitié d'une ligne, car elles ont toutes deux la puissance du continu. Par ailleurs, nous avons vu que le problème de la parité du nombre infini n'a pas d'objet. D'autre part, philosophiquement, car il est tout à fait remarquable que Cantor franchisse consciemment le pas que Descartes interdisait, puisque Cantor, avec son audace et esprit profond affirme :

> Il se révèle que l'intelligence peut aussi différencier l'infini dans un sens déterminé, c'est-à-dire définir et différencier des nombres au-delà de l'infini; alors de deux choses l'une, ou bien il faut étendre la signification des mots "intelligence finie" de laquelle on ne pourrait plus tirer aucune conclusion; ou bien on doit aussi attribuer à l'intelligence humaine le prédicat "infini" en le considérant consciemment, ce qui n'est à mon avis que la seule vérité.[150]

Pour conclure sur ces réfutations, voyons ce que Cantor propose d'établir à la place de la négation de l'infini actuel, chère aux scolastiques, et qui peut se résumer dans la formulation :

---

[148] Cantor [1887-1888, p375]. Précisons que Cantor n'est pas un très bon historien de la philosophie (nous l'avions déjà remarqué avec Leibniz [I.2.2]), et que Kant ne dit nulle part, d'une façon ou d'une autre, « que l'absolu est la limite idéale du fini » ; même s'il y a bien sûr il y a un lien entre l'infini et Dieu.
[149] Descartes, [1644, I.26, p582-583].
[150] Cantor [1883b, 176].

« infinitum actu non datur »[151]. Cantor y oppose : « Omnia seu finita seu infinita *definita* sunt et excepto Deo ab intellectu determinari possunt[152] »

Bolzano n'échappe pas à la critique cantorienne. C'est sans doute la critique la plus fine, car Cantor reconnaît en Bolzano un mathématicien conscient de l'importance de l'infini actuel en mathématiques. En effet, les *Paradoxes de l'infini* ont les défauts suivants :

> Il manque à leur auteur d'avoir effectivement formé un concept général des nombres infinis déterminés; lui font aussi défaut le concept général de *puissance* et le concept spécifique d'*ordinal*. Tous deux apparaissent sans doute en germe chez lui, mais il ne parvient pas à une clarté et une précision entières, et par là s'expliquent de nombreuses inconséquences et même plusieurs erreurs dans cet ouvrage de haute valeur.[153]

2. <u>Théologie</u>

Comme nous venons de le voir avec Descartes, l'infini actuel ne pouvait pas être compris par les humains. Il semble donc naturel que ce soit une propriété appréhendable uniquement par Dieu. Une conception proche est celle de Kant, qui, comme le note Cantor, associe l'infini avec l'Absolu. Mais voilà, Cantor rend l'infini actuel connaissable, et parfaitement accessible à l'Homme. Cela n'aurait pas été problématique pour notre mathématicien, s'il avait été parfaitement athée. Toutefois, Cantor est un homme profondément croyant. En effet, Cantor ira même jusqu'à écrire à Mittag-Leffler (1846-1927) qu'il n'est pas à l'origine de son nouveau travail : il ne se considère que comme un secrétaire de Dieu, responsable de la présentation et de l'organisation du travail, mais pas du contenu même de la théorie[154].

---

[151] C'est-à-dire : « l'infini en acte n'est pas donné ».
[152] Cantor [1883b, p176] C'est-à-dire : "Toutes les choses, qu'elles soient finies ou infinies, sont *définies*, et excepté Dieu, peuvent être déterminées par l'intellect."
[153] Cantor [1883b, p180] Traduction de Belna [2000, p179].
[154] Lettre du 23 décembre 1883 et lettre du 31 janvier 1884. Voir Dauben [1979, p146] et [1979, p335, note 107] pour plus de détails sur les références.

Dès lors, une question importante émerge : comment Cantor arrive-t-il à concilier sa théorie des nombres transfinis avec sa foi ? Les textes de Cantor sur la théologie sont principalement rassemblés dans les *Mitteilungen* de [1887-1888]. On y trouvera en fait des réponses adressées à des théologiens de son époque, et notamment à Gutberlet, théologien de grande importance. En effet, ce dernier a lu les *Grundlagen* de 1883, et s'est donc intéressé à la théorie des ensembles. De plus, il a essayé d'en tirer profit pour ses propres idées théologiques et philosophiques. Il a publié un article en 1886 pour exposer ses pensées.[155] En fait, l'intérêt des deux savants est réciproque. En effet, Cantor trouvera chez Gutberlet l'assurance que ses thèses sont conformes à celles de l'Eglise ; et Gutberlet pourra s'assurer de l'existence de l'infini actuel*, comme une connaissance humaine[156].

La question qui pose problème à Gutberlet, c'est qu'il existe une *multitude* d'infinis actuels, sans oublier toutefois que l'infinitude de Dieu doit rester *unique*. Pour résoudre ce problème, Cantor va refaire des distinctions dans l'infini. On sait qu'il y a un parallèle entre infini potentiel et infini actuel d'une part :

> en vérité l'infini potentiel n'a une réalité sûre que dans la mesure où il fait d'abord référence à un infini actuel, à travers lequel il devient possible.[157]

Mais, d'autre part, Cantor propose de poser une différence entre transfini et Absolu. Voyons comment Cantor voit cette corrélation. De même que l'infini potentiel ne peut se passer de l'infini actuel, le transfini ne peut se passer de l'Absolu. En effet, Cantor pense que le transfini dans toute sa richesse « renvoie nécessairement à un *Absolu,* 'véritable infini' qu'on doit considérer quantitativement comme un maximum *Absolu*. »[158] On voit que c'est une solution tout à fait cohérente qui permet d'honorer Dieu, tout en laissant la création mathématique cantorienne intacte.

---

[155] Gutberlet [1886]. Dans ce qui suit, nous nous inspirerons des analyses de Belna [2000, p182-188] et Dauben [1979, p142-146].
[156] Cantor appelle cet infini l'infini *in abstracto*.
[157] Cantor [1887-1888, p404].
[158] Cantor [1887-1888, p405].

Néanmoins, on peut nuancer la religiosité de notre mathématicien, car il sait se démarquer de l'évangélisme et du catholicisme. En effet, Cantor préfère dire qu'il n'appartient à aucune église existante et « qu'en matière de religion, mon point de vue n'est pas confessionnel »[159]. De plus, Cantor a écrit un opuscule dans lequel il tente de démontrer, en s'appuyant sur le Nouveau Testament, que Jésus est le fils biologique de Joseph[160]. Ce qui, bien sûr vient à l'encontre de la virginité de Marie et du dogme du Christ comme étant le fils de Dieu. On peut donc juger que les préoccupations théologiques de Cantor ne concernent finalement qu'un Dieu des philosophes ; Cantor était donc théiste.

[159] Lettre du 7 mars 1896 à M^me Pott. Cité dans Charraud [1994, p173].
[160] Cet opuscule s'intitule *Ex Oriente Lux* [1905] et n'était cependant pas destiné à être publié.

V. Critique et limites de la théorie naïve des ensembles

1. Paradoxes de la théorie des ensembles : pourquoi cela ne gêne pas Cantor ?

Nous avons vu qu'une conséquence de la démonstration diagonale est que l'on peut toujours trouver des ensembles de cardinalités supérieure. Autrement dit, que pour tout ensemble *U,*

$$\text{card}\,\mathcal{P}(U) > \text{card}\,(U)$$

Soit U l'ensemble de *tous* les ensembles. Par définition, il est donc plus grand que tout ensemble. Et en particulier card $\mathcal{P}(U) \leq$ card (U). Ce qui est en contradiction avec le théorème de Cantor*. La conclusion est que la collection U n'est pas un ensemble. En particulier, nous ne pouvons donc pas déterminer le cardinal de U. Si cela avait été possible, en connaissant ce cardinal, nous aurions pu répondre à la question : combien y a-t-il de puissances infinies différentes ?[161]

Il existe aussi un autre paradoxe relatif aux ordinaux, que nous ne détaillerons pas ici[162]. Nous ne détaillerons pas nous plus les paradoxes que Cantor n'a pas connu –en bonne santé mentale–, notamment celui qu'a découvert Russell. Demandons-nous plutôt, comment est-ce que Cantor réagit face aux paradoxes ? Il propose de faire une distinction entre pluralités « consistantes » et pluralités « inconsistantes ». Seules les premières peuvent être appelées « ensembles ». Les secondes sont en fait *absolument* infinies, puisqu'elles sont les pluralités infinies sensées englober *tous* les ensembles, finis et infinis. Et c'est bien ce caractère *Absolu*

[161] Question que nous avions soulevée en [III.3].

[162] En voici tout de même l'énoncé : Soit Ω l'ensemble bien ordonné de tous les nombres ordinaux. Ω possède un ordinal α strictement supérieur à tous les éléments de Ω, donc à α lui-même. Il s'agit du paradoxe de Burali-Forti, du nom du mathématicien Italien qui l'a découvert officiellement en 1897, bien que Cantor connaissait déjà ce paradoxe en 1895. Voir Dauben [1979, p241] pour plus de détails.

qui fait, pour Cantor, que ces pluralités sont inconsistantes. En effet, on se souvient des vues théologiques de Cantor, selon lesquelles l'infini absolu ne peut être que celui de Dieu. Cantor n'est donc pas troublé par les paradoxes car considérer la suite de tous les ordinaux ou cardinaux transfinis*, c'est essayer de comprendre l'absolument infini, et il n'y a rien de surprenant à voir que l'Homme ne peut pas le comprendre. Si la justification profonde de Cantor a un caractère théologique, il est tout à fait remarquable que la postérité fera aussi ce type de distinction, en disant que les ensembles paradoxaux que nous avons présentés, ne sont pas des ensembles, mais des classes.

2. Les infiniment petits, l'axiome d'Archimède, et Véronèse

2.1 L'infiniment petit

Une réalité qui est tout à fait étonnante à propos de l'infini de Cantor, c'est qu'il n'accepte pas les infiniment petits ; l'infiniment petit *actuel* est, pour Cantor, une absurdité. Cela est surprenant au moins à deux titres. *Premièrement*, les mathématiques sont une science qui étudie, manipule des objets symétriques. La symétrie est donc un concept clé, qui est souvent au cœur de l'organisation de structures mathématiques. L'argument est le suivant : si l'on construit des infiniment grands, pourquoi ne pas construire des infiniment petits ? *Deuxièmement*, le calcul infinitésimal* est devenu rigoureux avec la notion de limite, notion qui ne fait pas usage de l'infini *actuel**. Ce calcul n'utilise donc que l'infini potentiel*[163]. Cantor en est d'ailleurs tout à fait conscient puisqu'il dit, dans une note d'un article précédant les *Grundlagen* :

[163] Nous l'avions noté dans une note en [I.2.1].

> Du point de vue de *l'analyse* purement *arithmétique*, il n'y a *pas* de grandeur infiniment petite, mais bien des grandeurs variables, *devenant* infiniment petites.[164]

Spécifions qu'à l'époque de Cantor, les infiniment petits étaient généralement rejetés. En effet, Weierstrass avait réussi à définir la notion de limite en éliminant la notion d'infiniment petit. Mais cela ne doit pas nous empêcher de nous interroger sur la chose suivante. Pourquoi Cantor, en tant que défenseur de l'infini actuel, n'a-t-il pas tenté de fonder l'infiniment petit sur les bases d'infinis actuels et ainsi dépasser la formulation des limites qui rappelle l'infini potentiel* ?

Comme nous allons le voir, Cantor a préféré assurer l'existence de ses nombres transfinis, sans s'aventurer dans les difficultés que posent les infiniment petits actuels, réfutant systématiquement ces objets « absurdes ».

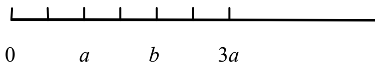
En effet, suite aux travaux de Cantor, des travaux sur les infiniment petits actuels ont fait jour. On peut penser par exemple à Du Bois Reymond en Allemagne, Stolz (1842-1905) en Autriche, ou encore Veronese (1854-1917) en Italie. Quelles sont les réactions de Cantor vis-à-vis de ces nouvelles théories ? On peut citer par exemple les piquantes répliques de Cantor, qui dit que Thomae (1840-1921) a été le premier à « infecter les mathématiques avec la bacille du choléra des infinitésimaux »[165]. Ou encore, Cantor se moque de Du Bois-Reymond, qui élargit les idées de Thomae, et qu'il y trouve une « excellente nourriture pour la satisfaction de son ambition brûlante et de sa vanité »[166]. Cependant, toutes ces considérations peu scientifiques, ne nous disent pas ce qui est au fondement du refus cantorien des infinitésimaux actuels. Nous allons voir que le nœud du débat se situe dans un axiome de l'Antiquité, énoncé par Archimède.

---

[164] Cantor [1882, p156, note 1].
[165] Lettre de Cantor à Vivanti. Meschkowski [1965, p 505]. Cité dans Dauben [1979, p131].
[166] Meschkowski [1965, p 505].

2.2 <u>L'axiome d'Archimède*</u>

L'énoncé de l'axiome d'Archimède peut se faire comme suit : soit deux *réels* positifs a et b, tels que $a < b$, alors il existe un entier n tel que $na > b$. Par exemple, si a=2, b=4, en choisissant n=3 on a bien 3*2 = 6 > 4. Ce que nous pouvons illustrer par le schéma suivant :



Si nous avons présenté l'axiome d'Archimède* avec une représentation géométrique, c'est pour une raison bien précise. En effet, pour Cantor, les grandeurs sont représentables, car il a identifié l'ensemble des nombres réels avec la droite. Cette identification se révélera en fait être un axiome, qu'Hilbert nommera l'*axiome de continuité*. Du reste, Cantor n'était pas sans savoir que la correspondance de la droite aux réels avait un caractère axiomatique, ou tout du moins arbitraire. Dans un contexte un peu différent, il le souligne lui-même, en précisant l'arbitraire de la supposition :

> L'*hypothèse de la continuité de l'espace* n'est rien d'autre que la supposition, arbitraire en elle-même, de la complète correspondance biunivoque entre les trois dimensions *purement arithmétiques du continu (x, y, z)* et de l'espace sous-jacent au monde des phénomènes.[167]

Dans ce cadre, supposons maintenant qu'il existe des grandeurs infiniment petites actuelles. Soit $a = \alpha$ où α est un infiniment petit actuel et b une grandeur finie donnée. Le produit $\alpha \times n$ reste *infiniment petit*, même si n est très grand[168]. On n'aura donc pas $n\alpha > b$. Ce qui est en contradiction avec l'axiome d'Archimède*. Supposer l'existence d'infinitésimaux actuels contredit donc l'axiome d'Archimède. En fait, Cantor limite son concept de grandeur aux

---

[167] Cantor [1882, p156].
[168] Et même si n est transfini.

archimédiennes, c'est-à-dire uniquement à celles qui respectent l'axiome du mathématicien de l'Antiquité. Comment Cantor se défend-il face aux théories qui proposent de nier cet axiome ?

Cantor va adopter une stratégie redoutable, en essayant de démontrer que cet axiome n'en est pas un, et qu'il s'agit simplement d'un théorème. Il conclut sa démonstration qui se trouve dans les *Mitteilungen* en affirmant :

> Le prétendu « axiome d'Archimède » n'est même pas un axiome, il résulte seulement par contrainte logique du concept de grandeur linéaire.[169]

Cependant, la démonstration qu'il présente est circulaire, car il utilise implicitement l'axiome de continuité. Et, en fait, l'axiome d'Archimède peut effectivement être déduit de celui de continuité (et inversement) ; cette solution ne fait donc que substituer un axiome à un autre. En mettant en avant le fait que l'axiome d'Archimède n'est qu'un *théorème*, cela empêche une construction directe d'infinitésimaux actuels. Cantor a bien réussi sa défense, puisque même Russell sera persuadé que les infinitésimaux n'existent pas[170].

Cela dit, une raison plus profonde qui pousse Cantor à rester sur sa position est sans doute la suivante. Si les infinitésimaux étaient aussi cohérents que les autres nombres, cela montrerait que sa conception du continu est imparfaite, et ainsi que sa théorie des nombres serait incomplète. Il se pourrait même que l'hypothèse du continu* soit fausse, car accepter les infinitésimaux actuels enrichirait considérablement le continu[171] …

[169] Cantor [1887-1888, p409].
[170] Russell [1903, p334-337]. Voir aussi Dauben [1979, p235].
[171] Tout du moins, cela complexifierait largement l'étude du continu.

2.3 Veronese

Veronese, qui est contemporain de Cantor, n'est pas du même avis. Il a même une conception très ouverte de l'infiniment petit. En effet, en écho aux critiques de Cantor, il répond :

> Nous devons cependant ajouter, qu'il n'y a pas, à notre avis, de quoi élever des objections contre la possibilité de l'infiniment petit de *Du Bois Reymond* et de *Stolz*.[172]

Mais Veronese va beaucoup plus loin, puisqu'il ébauche dans son ouvrage de 1894 une nouvelle géométrie, non archimédienne. C'est sans doute une des premières dans l'histoire des mathématiques. Les dernières lignes du traité sont particulièrement révélatrices :

> Somme toute, cette question est alors d'importance, de savoir si les propositions sur le continu peuvent être données indépendamment de l'axiome d'Archimède. Précisément, nous avons fait cela dans ce traité et dans ce livre, de manière à ce que nous traitions une géométrie absolue, dans laquelle il y a des segments de droite qui ne satisfont pas cet axiome.[173]

Cantor n'avait donc pas de raisons valables contre les transfinis* infinitésimaux[174]. En effet, les arguments que Cantor oppose aux infinitésimaux actuels, sont du même ordre que ceux que ses adversaires ont toujours avancés contre l'infini actuel*. Lorsque Cantor introduit les nombres infinis, il ne s'étonne pas que les propriétés du fini n'y soient plus valables. Alors, lorsqu'on introduit des infiniment petits, ce n'est pas si étonnant qu'une géométrie d'un nouveau type puisse apparaître. Mais peut-être est-ce un peu trop, de demander à un seul mathématicien de faire toutes les révolutions mathématiques. Pour résumer la situation, citons Jean-Paul Delahaye :

> Les mathématiciens du XX^e^ siècle sauront redonner aux infiniment petits un statut d'objet authentique. La méthode utilisée au XIX^e^ siècle pour rendre rigoureux le calcul infinitésimal est un renoncement à

---

172 Veronese [1894, p700]. Ce passage fait partie de la note IV intitulée *Bemerkungen über einige Beweise gegen das actual Unendlichgrosse und Unendlichkleine.*
173 Veronese [1894, p707].
174 Rétrospectivement, on peut voir là tout l'intérêt de la méthode axiomatique : ne pas rejeter ce qui est cohérent et pas intuitif.

> l'infini actuel, auquel on substitue un infini potentiel, celui de quantités qui s'approchent de plus en plus de leur limite.[175]

Que disent ces mathématiques du XX^{e} siècle ? Quelle méthode mathématique pourra redonner la symétrie dans l'infini ? La possibilité de nombres infiniment petits actuels ne pourra être rigoureusement déterminée que par un mathématicien que même Gödel admirait : Abraham Robinson.

3. Développements modernes de l'infini actuel

Cette sous-partie n'a pas l'objectif d'introduire rigoureusement aux développements mathématiques que constituent l'analyse non standard et les grands cardinaux. Ces disciplines sont fort subtiles et font appel à des techniques mathématiques évoluées. Il serait donc tout à fait inconcevable de les traiter sérieusement dans notre cadre. Cependant, nous voulons essayer d'en présenter modestement quelques aspects, pour montrer que l'infini actuel est toujours objet de recherches intenses en mathématiques, et qu'il n'y a pas de raison de s'arrêter aux "limites" des théories cantoriennes.

3.1 Vers l'infiniment petit : l'analyse non standard.

Le grand mathématicien et logicien Abraham Robinson, est l'inventeur d'une discipline mathématique : l'analyse non standard. En effet, il avait constaté que l'analyse en mathématique n'avait pas de base solide. Il a donc tenté et réussi à donner un véritable fondement à l'analyse. L'analyse non standard peut être vue comme une méthode qui permet

[175] Delahaye [2000, p34].

de faire usage aussi bien des infiniment petits que des infiniment grands. Robinson argumente en faveur de sa création en disant :

> Néanmoins, nous osons suggérer que notre approche possède un certain attrait naturel, comme le montre le fait qu'elle a été précédée au cours de l'histoire par une longue suite de tentatives d'introduire des nombres infiniment petits et infiniment grands en analyse.[176]

L'analyse non standard permet donc de concrétiser très rigoureusement les essais de Du Bois Reymond ou Stolz, tant critiqués par Cantor. De plus, il est possible d'affirmer que l'analyse non standard permet de rendre les notions de base du calcul infinitésimal* plus intuitives, lorsque l'on débute l'analyse[177]. Mais l'analyse non standard a aussi de grands intérêts pratiques. En effet, comme le note Dauben :

> Il suffit ici de citer les recherches impressionnantes en physique qui utilisent l'analyse non standard, surtout la théorie quantique et la thermodynamique, et en économie où l'économie des échanges s'est adaptée particulièrement bien à une interprétation non standard.[178]

De plus, Robinson est aussi un philosophe des mathématiques, qui a une conception très ouverte. En 1973, il décide de commenter l'ouvrage de Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen ?*[179]. Il parle alors des systèmes de nombres, et remarque :

> La collection de tous les systèmes de nombres n'est pas une totalité achevée dont la découverte était intégrale vers 1600 ou 1700 ou 1800, mais elle reste ce qu'elle a toujours été : un territoire croissant et changeant, qui absorbe parfois de nouveaux systèmes, en met des anciens au rancart, ou les relègue au grenier.[180]

Comme l'analyse non standard permet une véritable extension de la notion de nombre, féconde en mathématiques, et en mathématiques appliquées, on peut dire que Robinson a dépassé les limites des définitions de Cantor et de Dedekind des nombres réels[181]. Les nombres ne sont donc pas des entités fixées, mais bien des systèmes susceptibles d'extensions, toujours plus grandes.

---

[176] Robinson [1979, p87].
[177] Cette affirmation peut être corroborée par une étude de Sullivan [1976]. Pour plus d'explications, voir aussi l'article de Dauben [1989].
[178] Dauben [1989, p173].
[179] Dedekind [1888].
[180] Robinson, cité dans Dauben [1989, p173].
[181] Nous n'en avons pas parlé, mais Dedekind a aussi fait une théorie des nombres réels. Voir Dedekind [1888].

3.2 Vers l'infiniment grand : les grands cardinaux.

Qu'en est-il de l'infiniment grand ? Est-ce que les théoriciens des ensembles après Cantor ont réussi à aller « encore plus loin » dans l'infini ? La réponse est oui, et d'une manière fascinante. En effet, les nouveaux développements ont posés de nouveaux axiomes, dits de *grands cardinaux,* qui posent l'existence d'ensembles encore plus grands que tous ceux que l'on peut construire avec les méthodes cantoriennes. Pour comprendre ce que cela peut vouloir dire, citons le logicien Kanamori, qui s'exprime avec la comparaison suivante :

> Et de même que de grands nombres finis semblent désespérément inaccessibles si on essaye de les compter un par un, de même les grands cardinaux le semblent si on essaye de les atteindre avec des processus hiérarchiques simples. Mais de même que nous pouvons travailler avec $10^{1\,000\,000}$ dans un contexte approprié, de même nous pouvons travailler avec un cardinal mesurable.[182]

En effet, les grands cardinaux peuvent paraître inutiles, car ils sont, on ne peut plus abstraits : ce sont sans doute les objets les plus élevés de la pensée humaine aujourd'hui. Leur utilité peut donc sembler tout à fait superflue. Mais cela est faux, car ils ont bien des applications en mathématiques. Ils permettent une extension naturelle de la théorie des ensembles, car ils ajoutent –sans contradiction– des ensembles toujours plus grands. Il s'est même avéré que les grands cardinaux pouvaient se classer dans une nouvelle hiérarchie, au-delà de celle des transfinis de Cantor. Kanamori et Magidor tirent les conséquences de ce fait :

> cet aspect hiérarchique de la théorie des grands cardinaux est quelque peu mystérieux, mais est aussi un argument fort en faveur de l'adoption des axiomes de grands cardinaux et du fait qu'ils fournissent les extensions naturelles de ZFC.[183]

---

[182] Kanamori [1994, p479].

[183] Cité dans [Delahaye 1998, p50] ; article dont nous nous inspirons pour notre analyse. ZFC désigne simplement la théorie des ensembles, d'un point de vue moderne. Ce sont les initiales de **Z**ermelo, **F**raenkel, et **C** signifie que l'on ajoute l'axiome du choix. En effet, la théorie des ensembles a été axiomatisée par Zermelo et Fraenkel ; et l'axiome du choix étant controversé, les mathématiciens explicitent en général s'ils l'utilisent ou non.

De plus, les grands cardinaux permettent d'avancer dans la résolution de l'hypothèse du continu*. Avant d'expliquer ce point, il nous faut préciser que l'hypothèse du continu est équivalente à montrer que *tout sous ensemble de ℝ est en bijection* soit avec ℕ, soit avec ℝ*. Delahaye attire alors l'attention sur le fait suivant :

> La possibilité de trouver des liens entre les axiomes de grands cardinaux et l'hypothèse du continu est réelle, et des résultats partiels ont déjà été obtenus : certaines parties infinies de ℝ dont on ne sait pas montrer dans Zermelo Fraenkel qu'elles peuvent être mises en bijection avec ℕ ou ℝ, peuvent être mises en bijection avec ℕ ou ℝ grâce aux axiomes de grands cardinaux.[184]

Les grands cardinaux apparaissent donc comme un développement mathématique tout à fait normal, et très fécond. D'un certain point de vue qui est celui des mathématiciens réalistes, il semble donc que les craintes de Hilbert soient de moins en moins fondées. Car Hilbert disait : « […] il ne faut pas qu'on nous chasse du paradis que Cantor a créé pour nous »[185] ; mais ce paradis semble bien s'étendre avec les grands cardinaux…

[184] Delahaye [2000, p38].
[185] Hilbert [1929, p227].

Conclusion

Notre étude nous a permis de découvrir quelques aspects essentiels des découvertes de Cantor. Les conséquences philosophiques sont bien entendu très grandes, car il s'agit d'une réfutation de plus de deux mille ans de traditions philosophiques et mathématiques.

Pour conclure, nous voudrions revenir un moment sur l'hypothèse du continu*. Nous aimerions aviser le lecteur à une réflexion sur le devenir de cette hypothèse. Combinés, les résultat de Paul Cohen en 1963, et Kurt Gödel en 1938, permettent de conclure que l'hypothèse du continu est indécidable. C'est-à-dire que l'on ne peut ni démontrer, ni réfuter l'hypothèse du continu. Certains mathématiciens ou philosophes ont cru voir que ce résultat clôturait définitivement le problème de l'hypothèse du continu ; et que cela expliquait pourquoi Cantor n'arrivait pas à démontrer cette hypothèse : il ne le pouvait tout simplement pas, car elle est indécidable. Nous voulons insister sur le fait que Cantor n'aurait sûrement pas été d'accord avec cette clôture, ceci relativement à sa vision de la philosophie des mathématiques. Certes, cette indécidabilité est très impressionnante, et c'est bien là un des succès de la logique mathématique, qui permet de démontrer des résultats métamathématiques[186]. Mais cela se fait sous plusieurs conditions. D'une part, que l'on se place dans l'axiomatique de Zermelo-Fraenkel ; et d'autre part, que l'on suppose cette axiomatique cohérente[187]. Nous sommes donc dans un cadre très précis, loin des mathématiques telles que les pratiquaient Cantor ; il se souciait peu des fondements, et préférait laisser libre cours à ces créations mathématiques.

[186] Le plus connu étant bien sûr le théorème de Gödel. Voir Gödel [1931].
[187] Précisons que nous ne voulons nullement déprécier l'intérêt de ces résultats, mais simplement les confronter à un regard plus large relativement aux développements de l'histoire des mathématiques.

De surcroît, un célèbre extrait des *Grundlagen* déclare :

> La mathématique est pleinement libre dans son développement, et ne connaît qu'une seule obligation : ses concepts doivent être non contradictoires en eux-mêmes et soutenir d'autre part avec les concepts formés antérieurement, déjà présents et assurés, des relations fixes, réglées par des définitions.[188]

Heureusement, cette vision ouverte et libre des mathématiques, se retrouve par exemple chez Kanamori. En effet, plutôt que de se fixer sur une axiomatique déterminée de la théorie des ensembles, il propose de dire que :

> La théorie des ensembles est plus un cadre libre pour les mathématiques qu'une fondation qui élucide.[189]

Et, comme nous l'avons aperçu, c'est bien la liberté que l'on s'accorde à rajouter des axiomes de grands cardinaux, qui permet de progresser dans la résolution de l'hypothèse du continu[190]. Concluons ce mémoire avec Kanamori, en indiquant quelle a été depuis toujours la tâche du mathématicien, qui, d'un côté, est bien libre, mais d'un autre « […] semble contraint d'étendre les frontières de l'ordre contre un chaos de possibilités ». [191]

[188] Cantor [1883b, p182].
[189] Kanamori [1994, p479].
[190] Voir [V.3.2].
[191] Kanamori [1994, p481].

Glossaire.[•]

1. Notations.

$\mathbb{N}$: ensemble des entiers naturels (positifs).
$\mathbb{Z}$: ensemble des entiers relatifs (positifs et négatifs).
$\mathbb{Q}$: ensemble des nombres rationnels.
$\mathbb{A}$: ensemble des nombres algébriques.
$\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels.

$\begin{cases} f : a \longrightarrow b \\ x \longmapsto y = f(x) \end{cases}$: fonction d'un ensemble *a* dans un ensemble *b*, qui à *x* fait correspondre *y*.

$f(x)$: image par *x* de la fonction *f*.
$[a, b]$: intervalle contenant tous les éléments compris entre *a* et *b*, extrémités incluses.
∞ : infini
(u_n) : suite de terme général u_n.
$\wedge$: symbole logique de la conjonction. Se lit « et ».
$\neg$: symbole logique de la négation. Se lit « non ».
$\longrightarrow$: symbole logique de l'implication. $\varphi \longrightarrow \psi$ se lit « φ implique ψ ».
$\perp$: symbole logique de l'absurdité.
$\vdash$: symbole logique de la déductibilité. Si $\varphi \vdash \psi$, on lit « ψ est déductible de φ ».
$<$: strictement inférieur.
$>$: strictement supérieur.
$\leq$: inférieur ou égal.
$\geq$: supérieur ou égal.
$\neq$: différent.
$\in$: appartenance. $x \in a$ signifie que *x* est élément de l'ensemble *a*.
$\notin$: non appartenance. $x \notin a$ signifie que *x* n'est pas élément de l'ensemble *a*.
$\subset$: inclusion stricte.
$\mathcal{P}(m)$: ensemble des parties (ou des sous-ensembles) de l'ensemble *m*.
$\forall$: quantificateur universel. Se lit « quel que soit ».
$\exists$: quantificateur existentiel. Se lit « il existe ».
$\cup$: réunion.
$\cap$: intersection.
card *m* : nombre cardinal de l'ensemble *m*.
ordinal *m* : nombre ordinal de l'ensemble *m*.
ω : ordinal de $\mathbb{N}$.
$\aleph_0$: cardinal de $\mathbb{N}$.
c : puissance du continu.

[•] Pour notre glossaire, nous nous inspirons de celui de Belna [2000].

2. Définitions.

Axiome d'Archimède : Soient a et b deux nombres réels strictement positifs, il existe un entier n tel que $bn > a$. Voir [V.2.2] pour un exemple.

Axiome d'Euclide : Le tout est plus grand que la partie. Voir [I.1.2].

Bijection : *Application d'un ensemble dans un autre telle que tout élément de l'ensemble d'arrivée est l'image d'un unique élément de l'ensemble de départ*. Bijection entre deux ensembles ; ensembles de même cardinal ; ensembles équivalents ; correspondance biunivoque entre deux ensembles ; sont toutes des expressions synonymes. Voir [II.2.1] pour plus de détails.

Calcul infinitésimal : Discipline mathématique qui traite des questions liées à la notion de quantité infiniment petite. Voir [I.2.2].

Continu : Un ensemble est c est continu s'il a la même puissance que $\mathbb{R}$,
c'est-à-dire que card(c) = $2^{\aleph_0}$. Continu s'oppose à discret. Voir [III.3].

Convergence : Une suite (u_n) est convergente si elle a une limite l.

Dénombrable : Un ensemble infini m est dénombrable *si et seulement si* il a la même puissance que $\mathbb{N}$. En termes de cardinalités, m est dénombrable *si et seulement si* card $m = \aleph_0$. Ou encore, m est dénombrable s'il peut être mis sous forme d'une suite semblable à celle des entiers naturels. Voir [II.1.1.1].

Discret : Un ensemble est discret s'il a une structure analogue à celle de $\mathbb{N}$. Discret s'oppose à continu.

Ensemble des parties : L'ensemble des parties est l'ensemble de tous les sous-ensembles de cet ensemble.
Par exemple, l'ensemble des parties de $a = \{1,2\}$ est $\mathcal{P}(a) = \{ \varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\} \}$. On remarque que card $a = 2$ et card $\mathcal{P}(a) = 2^{\text{card } a} = 2^2 = 4$.
Plus généralement, card $\mathcal{P}(a) = 2^{\text{card } a}$. Propriété qui fonctionne aussi –et surtout– avec les ensembles infinis. Voir aussi Théorème de Cantor* dans ce glossaire.

Ensemble infini : Un ensemble est infini *si et seulement si* il est en bijection avec un de ses vrais sous ensembles. Voir [II.2.3.1].

Equation algébrique : Equation de la forme $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$ où les a_n sont des nombres rationnels et $a_n \neq 0$.

Equipotence : Deux ensembles sont équipotents s'il existe une bijection de l'un sur l'autre. Cantor parle d'équivalence entre deux ensembles. Voir [II.2.1].

Fonction : Une fonction est une mise en correspondance d'un ensemble avec un autre. Voir par exemple [II.1.1.1].

Hypothèse du continu : Hypothèse selon laquelle il n'y a pas d'ensemble dont la puissance se trouve entre le dénombrable et le continu. Voir [III.3].

Inclusion : Un ensemble *a* est inclus dans un ensemble *b*, si tout élément de *a* est aussi élément de *b*. L'inclusion est stricte s'il existe un élément de *b* qui n'est pas élément de *a*. On note alors $a \subset b$.

Infini improprement dit : Expression de Cantor qui désigne l'infini potentiel d'Aristote. Voir [IV.1.1].

Infini proprement dit : Expression de Cantor désignant l'infini actuel. Voir [IV.1.1].

Infini actuel : Infini positif, existant par soi, considéré comme un tout achevé. Synonyme d'infini achevé.

Infini potentiel : fini variable, grandeur pouvant croître au-delà de toute limite. Plus formellement, on peut le caractériser par : si *x* et *y* sont des réels, $\forall x\ \exists y\quad x<y$. Voir [I.2.2] en particulier, mais aussi Cantor [1932, p375] pour la définition de Cantor.

Intersection : L'intersection de deux ensembles *a* et *b* est l'ensemble constitué des éléments appartenant à la fois à *a* et à *b*. On note $a \cap b$.

Intervalles emboîtés : Soit $([a_n, b_n])$ une suite d'intervalles de $\mathbb{R}$, telle que pour tout entier naturel *n*, $[a_{n-1}, b_{n-1}] \subset [a_n, b_n]$. Si $\lim\limits_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$, l'intersection de ces intervalles est réduite à un élément. Aujourd'hui, on parle aussi de *segments emboîtés*. Voir [III.1].

Nombre algébrique : nombre réel solution d'une équation à coefficients entiers. Par exemple, $\sqrt{2}$ est solution de l'équation $x^2 - 2=0$. On note $\mathbb{A}$ l'ensemble de ces nombres.

Nombre cardinal : Nombre des éléments d'un ensemble, sans tenir compte de l'ordre de ses éléments. Voir [II.2.3.2].

Nombre complexe : Nombre de la forme $a + bi$ où *a* et *b* sont des nombres réels, et *i* la racine carré de -1. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble de ces nombres.

Nombre entier naturel : nombre appartenant à l'ensemble $\mathbb{N}$. Par exemple, 1, 2, 3, 4, …

Nombre entier relatif : nombre appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$. Par exemple, -2, -1, 0, 1, 2, … Voir [II.1.1].

Nombre irrationnel : Nombre qui n'est pas rationnel, c'est-à-dire qu'on ne peut écrire sous forme de fraction. Par exemple π, $\sqrt{2}$.

Nombre ordinal : Nombre des éléments d'un ensemble, lorsqu'on tient compte de l'ordre de ses éléments. Voir [II.2.3.3].

Nombre réel : Nombre soit rationnel, soit irrationnel. On note $\mathbb{R}$ l'ensemble de ces nombres. Voir [II.1.3].

Nombre transcendant : Nombre réel qui n'est pas solution d'une équation algébrique. Par exemple, π est transcendant, mais pas $\sqrt{2}$. Voir [III] et plus particulièrement [III.1.1].

Réunion : La réunion de deux ensembles *a* et *b* est l'ensemble constitué des éléments appartenants à *a* ou à *b*. On note $a \cup b$.

Suite : Une suite (u_n) est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Suite de Cauchy : suite dans $\mathbb{Q}$ qui est convergente et dont la limite est rationnelle ou non. Voir [II.1.3].

Ex 1 : $a_n=1-\frac{1}{n}$ la limite de la suite est $1 \in \mathbb{Q}$.

Ex 2 : $u_1=1$; $u_2=1-\frac{1}{3}$; $u_3= 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$ $u_4= 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$ la limite de la suite est $\pi/4 \notin \mathbb{Q}$.

Théorème de Cantor : Soit *m* un ensemble, fini ou infini, et $\mathcal{P}(m)$ l'ensemble de ses parties. On a card $\mathcal{P}(m)$ > card *m*. Une conséquence de ce théorème est que pour tout nombre cardinal, il en existe un qui lui est strictement supérieur. Voir [III.2].

Transfini : Terme inventé par Cantor, synonyme d'infini pour les nombres. Voir [II.2.4].

Bibliographie

La bibliographie est composée de deux parties : les textes de référence, et les études. Notre travail ayant un aspect historique, nous avons choisi –autant que possible– d'indiquer les dates de naissance et de décès des auteurs cités. Les dates des ouvrages sont les dates de la première édition originale.

Lorsque nous utilisons des traductions, nous indiquons l'année de parution originale, suivi de l'abréviation « fr ». Par exemple Cantor [1891fr, p199] fait référence à la traduction de H. Sinacoeur de l'article de Cantor de 1891 dans *Logique et fondements des mathématiques*, qui se trouve page 199.

Certains textes, qui sont dans le domaine public, sont disponibles électroniquement. Nous avons alors indiqué l'URL (Uniform Resource Locator) des sites où ils le sont. Mais Internet n'est pas un média pas tout à fait stabilisé. De ce fait, par souci de commodité, mais surtout pour éviter toute disparition ou mouvement potentiel des URL indiqués, nous avons rassemblé ces textes sur la page http://infini.philosophons.com.

Nous n'avons pas jugé utile de construire un index, car le document électronique disponible sur la page ci-dessus pourra le remplacer, et même le surpasser.

I Textes de référence.

ARISTOTE, (384~322 av. J.-C.)

≈335-332 av. J.-C. – *Physique*, introd. de L. Couloubaritsis ; trad. de A. Stevens, Vrin, 1999.

Métaphysique, éd. Agora, trad. J-L. Poirier, 1991.

BOLZANO B., (1781~1848)

1851 – *Les paradoxes de l'infini,* trad., notes H. Sinaceur, Paris, Le Seuil, *1993.*

CANTOR G., (1845~1918)

1872 – *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der trigonometrischen Reihen*, Mathematische Annalen 5*,* p. 123-132 (Cantor [1932 p92-102]).

1874 – *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*, Journal de Crelle 77, p258-262, (Cantor [1932, p115-118]).

1878 – *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*, Journal de Crelle 84, p. 242-258 (Cantor [1932, p119-133]).

1879a – *Über einen Satz aus der Theorie der stetigen Mannigfaltigkeiten*. (Cantor [1932, p134-138]).

1879b – *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, 1. (Cantor [1932 p139-145]).
1880 – *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, 2. (Cantor [1932 p145-148]).
1882 – *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, 3. (Cantor [1932 p149-157]).
1883a – *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, 4. (Cantor [1932 p157-164)].

1883b – *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, 5. *Grundlagen einer allgemein Mannigfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen* (Cantor [1932 p165-208]).
1883bfr – *Fondements d'une théorie générale des ensembles.* Leibzig, Teubner. Trad. Milner in *Cahiers pour l'Analyse 10. La formalisation,* pp. 35-52, le Seuil, Paris 1969.
1884 – *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, 6. (Cantor [1932 p210-246]).

1887-1888 – *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten*. (Cantor [1932, p378-439]).

1890 – *Gesammelte Abhandlungen zur Lehre vom Transfiniten,* Halle, C.E.M. Pfeffer (Cantor [1932, p370-439]).

1891 – *Über eine elementare Frage zur Mannigfaltigkeitslehre*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1*,* p.75-78 (Cantor [1932 p278-281]).
Traduction et introd. H. Sinacoeur *Sur une question élémentaire de la théorie des ensembles,* in *Logique et fondements des mathématiques, Anthologie (1850-1914),* Paris, Payot, p. 197-203.

1895-1897 – *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, Mathematische Annalen 46, p. 481-512; 49, p. 207-246 (Cantor [1932, p282-356]).
Trad. *Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis.* Trad F. Marotte. In *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux,* rééd. Gabay, Paris 1989. Disponible sur http://gallica.bnf.fr .

1905 – *Ex Oriente Lux, Gespräche eines Meisters mit seinem Schüler über wesentliche Puncte des urkundlichen Christenthums. Berichtet vom Schüler selbst.* Halle: C. E. M. Pfeffer.

1932 – *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, E. Zermelo éd., Berlin, Springer (rééd., Hildesheim, G. Olms, 1966). Disponible sur : http://gdz-srv2.sub.uni-goettingen.de/cgi-bin/pdfconvert_2.pl?docid=49507&imageset-id=1901 .

Correspondance Cantor-Dedekind, Trad. J. Cavaillès. *in* CAVAILLÈS J., *Philosophie des mathématiques.* Paris, Hermann, 1962, p. 179-250.
Dugac, *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*, Vrin 1976 p. 223-262.

Signalons aussi le document électronique disponible sur le site de la BNF (http://gallica.bnf.fr) qui rassemble la majorité des œuvres de Cantor traduites en français : [1872], [1874], [1878], [1879], [1880], [1882], [1883a], [1883b], [1884]. Cela dit, si certaines de ces traductions ont été revues par Poincaré, d'autres sont souvent mauvaises et éparses, et sont donc à consulter avec toutes les précautions nécessaires. Voir la présentation de Pierre Dugac pour plus de détails.

DESCARTES R., (1596~1650)
1644 – *Principes de la philosophie*, in Œuvres et lettres de Descartes, Bibliothèque de la Pléiade, Gallimard, 1953.

DEDEKIND R., (1831~1916)

1872 – *Stetigkeit und Irrationalzahlen.* Trad. *Continuité et nombres irrationnels.* Trad J.Milner & H.Sinacoeur., Paris 1978.

1888 – *Was sind und was sollen die Zahlen ?,* Braunschweig, Vieweg.
Trad. *Les nombres. Que sont-ils et à quoi servent-ils ?* Publié avec *Continuité et nombres irrationnels.* Trad. J.Milner & H.Sinacoeur., Paris 1978.

DU BOIS-REYMOND P., (1831~1889)

1875 – *Über asymptotische Werthe, infinitäre Approximationen und infinitäre Auflösung von Gleichungen*, Mathematische Annalen, vol. 8, p. 363-414.

EUCLIDE, (IVe-IIIe siècle avant J.-C.)

Les Eléments, PUF, 1990.

GALILEE G., (1564~1642)

1638 – *Discours et démonstrations mathématiques concernant deux sciences nouvelles*. PUF, Introd., trad., notes et index par Maurice Clavelin, 1995. Nous indiquons la pagination en marge de cet ouvrage, qui fait référence à l'édition originale.

GAUSS K. F., (1777~1855)

1860 – *Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und H. C. Schumacher.* Ed. C. A. F. Peters. Vol. II, Altona: G. Esch.

GÖDEL K., (1906~1978)

1931 – *Sur les propositions formellement indécidables des* Principia Mathematica *et des systèmes apparentés.* Points Sciences, p. 107 et suiv.

1947 – *Sur la nature du problème du continu de Cantor,* 1964, in *Intuitionnisme et théorie de la démonstration,* Vrin.

GRAY R.,

1994 – *Georg Cantor and transcendental numbers*, American Mathematical Monthly, vol. 101, p. 819–832.

GUTBERLET, C.

1886 – *Das Problem des Unendlichen*, Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik 88, p. 179-223.

HILBERT D., (1862~1943)

1929 – *Sur l'infini,* dans J. Largeault (dir.), *Logique mathématique. Textes*, A. Colin 1972.

LEIBNIZ G.W.F, (1646~1716)

1676 – Pacidius Philalethi, *Opuscules et fragments inédits,* (Paris, 1903).

1698 – Lettre à Jean Bernoulli. in *Mathematische Schriften*, éd. Gerhardt, III, 535.

LIOUVILLE, J. (1809~1882)

1851 – *Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique ni même réductible à des irrationnelles algébriques*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, vol. 16, p. 133–142.

POINCARE H., (1854~1912)

1909 – *La logique de l'infini,* in *Logique et fondements des mathématiques,* p. 393-415.

ROBINSON A., (1918~1974)

1973 – *Concerning progress in the philosophy of mathematics*. Proc. Logic Colloquium at Bristol ; in Robinson [1979, p556].

1979 – *Non standard analysis and philosophy*. Tome 2, Yale University Press.

TURING, A.,

1936 – *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, in Proceeding of the London Mathematical Society, 2nd series, 42, p. 230-265.

VERONESE, G. (1854~1917)

1894 – *Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten gradliniger Einheiten in elementarer Form entwickelt*. Trad A. Schepp. Leipzig : B. G. Teubner.

II. Etudes.

BELL E. T.

1937 – *Men of Mathematics*. New York: Simon and Schuster.

BELNA J-P.,

1996 – *La notion de nombre chez Dedekind, Cantor, Frege*. Vrin.
2000 – *Cantor*, Belles lettres.

CALDER A.,

2000 – *L'infini, pierre de touche du constructivisme*. In *Pour la science* n°278, décembre 2000.

CAVAILLES J., (1903~1944)

1962 – *Philosophie des mathématiques,* Herman.

CHARRAUD N.,

1994 – *Infini et inconscient. Essai sur Georg Cantor*. Ed Anthropos.

COUTURAT L., (1868~1914)

1896 – *De l'Infini mathématique,* rééd., Paris, Blanchard, 1973. Disponible sur http://gallica.bnf.fr

DAHAN-DALMENICO A. et J. PEIFFER

1986 – *Une histoire des mathématiques*. Points sciences.

DAUBEN J.,

1979 – Georg Cantor: *His Mathematics and philosophy of the infinite,* Harvard University press, 1979.

1989 – *Abraham Robinson, les infinitésimaux, l'analyse non standard, et les fondements des mathématiques* in *La mathématique non standard ;* CNRS.

DELAHAYE J.P,

1998 – *Jeux mathématiques et mathématique des jeux,* chap 7 : Des jeux infinis aux grands ensembles.

2000 – *L'infini est-il paradoxal en mathématiques ?* In *Pour la science* n°278, décembre 2000, p. 30-38.

HODGES W.,

1998 – *An editor recalls some hopeless papers.* The Bulletin of Symbolic Logic Volume 4, Number 1, Mars 1998. Disponible sur http://www.math.ucla.edu/~asl/bsl/0401/0401-001.ps .

LANG S.,

1976 – *Structures algébriques*. Interéditions.

LEVY T.,

2000 – *Thābit ibn Qurra et l'infini numérique*. In *Pour la science* n°278, décembre 2000.

MOORE, A.,

1993 – *Infinity*. Ed. International research library of philosophy.

MESCHKOWSKI, H.

1965 – *Aus den Briefbüchern Georg Cantors*. Archive for History of Exact Sciences 2, p. 503-519.

M. KAC et S.M. ULAM,

1968 – *Mathematics and logic*, Praeger, New York.

KAMKE E.,

1964 – *Théorie des ensembles,* Dunod. (Réed. Gabay 1993).

KANAMORI A.,

1994 – *The higher infinite : large cardinals in set theory from their beginnings,* Springer-Verlag.

1996 – *The mathematical development of set theory from Cantor to Cohen*, The Bulletin of Symbolic Logic, Volume 2, Number 1, Mars 1996. Disponible sur http://www.math.ucla.edu/~asl/bsl/0201/0201-001.ps .

REINHARDT F. et SOEDER H.,

1997 – *Atlas des mathématiques*. Ed. Le Livre de Poche.

RUSSELL B., (1872~1970)

1903 – *Principles of Mathematics.* Cambridge, England : At the University Press.

1919 – *Introduction à la philosophie mathématique,* Trad. F. Rivenc, Payot.

SCHMITZ,

2000 – *Wittgenstein la philosophie et les mathématiques,* PUF.

SIERPINSKI W., (1882~1969)

1928 – *Leçons sur les nombres transfinis*, Gauthier-Villars.

SULLIVAN, K.,

1976 – *The Teaching of Elementary Calculus Using the Nonstandard Analysis Approach.* In American Mathematical Monthly, mai 1976, p. 370-375.

WITTGENSTEIN L., (1889~1951)

1939 – *Cours sur les fondements des mathématiques*, TER, Vrin, E.Rigal (Bilingue).

1956 – *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*. Basil Blackwell, Oxford. Trad. (à éviter) M-A. Lescourret, *Remarques sur les fondements des mathématiques*, Gallimard, 1983.